Lernmodul 1

Fernaufgabe 1.1

Der Term kann in den Taschenrechner eingegeben werden und die Lösung muss dann in die wissenschaftliche Schreibweise gebracht werden. Dafür sollte man wissen, was die Zehnerpotenzen bewirken. Und zwar verschiebt die Multiplikation mit 10^{-7} z.B. das Komma um sieben Stellen nach links, 10^5 entsprechend um fünf Stellen nach rechts. Wir haben

$$13.6 \cdot 0.0074 + 92.4 \cdot 0.025^2 - 0.0012 \cdot 19.6 = 0.13487 = 1.3487 \cdot 10^{-1} \doteq 1.35 \cdot 10^{-1}.$$

Bei der wissenschaftlichen Schreibweise steht das Komma nach der höchsten signifikanten Stelle, also der ersten Stelle von links, die nicht 0 ist. Um in diesem Fall beim Ergebnis das Komma an die genannte Stelle zu verschieben, muss man einmal nach rechts verschieben. Also muss man noch mit 10^{-1} multiplizieren, um das Komma damit wieder um eins nach links zu verschieben, damit die Zahl unverändert bleibt und man somit die Zahl nur in eine andere Form gebracht hat.

Fernaufgabe 1.2

Man verwende die dritte Binomische Formel auf die beiden Nenner, um die drei Summanden auf den gleichen Nenner zu bringen:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + 1 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} + \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} + \frac{x-y}{x-y} \\
&= \frac{x-\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{xy}+y}{x-y} + \frac{x-y}{x-y} \\
&= \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x-y} \\
&= \frac{2x}{x-y}
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 1.3

Als erstes faktorisiere man den dritten Nenner und füge die verschiedenen Faktoren aller Nenner zu einem neuen gemeinsamen Nenner $ab(a-b)$ zusammen:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{ab} - \frac{2}{a-b} + \frac{2b}{a^2-ab} &= \frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)} - \frac{2ab}{ab(a-b)} + \frac{2b^2}{ab(a-b)} \\
&= \frac{a^2-b^2}{ab(a-b)} - \frac{2ab}{ab(a-b)} + \frac{2b^2}{ab(a-b)} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a-b)} = \frac{a-b}{ab}
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile haben wir die zweite Binomische Formel verwendet.

Fernaufgabe 1.4

Gegeben sei der Term

$$t = \{[4x - (5xy + y)] - [7y - (x - 2xy)]\} - (x + y).$$

Die einzelnen Klammern werden von innen nach außen mit Hilfe des Distributivgesetzes aufgelöst:

$$\begin{aligned} t &= \{[4x - 5xy - y] - [7y - x + 2xy]\} - x - y \\ &= \{4x - 5xy - y - 7y + x - 2xy\} - x - y \\ &= 4x - 5xy - y - 7y + x - 2xy - x - y \\ &= 4x - 7xy - 9y \end{aligned}$$

Fernaufgabe 1.5

Gebraucht werden die dritte Binomische Formel und das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2 - 3(a+b)}{3a - 3b - 9} &= \frac{(a+b)(a-b) - 3(a+b)}{3(a-b-3)} \\ &= \frac{(a+b)[(a-b) - 3]}{3(a-b-3)} \\ &= \frac{(a+b)(a-b-3)}{3(a-b-3)} = \frac{a+b}{3} \end{aligned}$$

Fernaufgabe 1.6

Auch hier braucht man die Binomischen Formeln, und zwar die dritte und die zweite, und $b - a = -(a - b)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{2b}{a^2 - b^2} + \frac{1}{b-a} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{2b}{(a+b)(a-b)} - \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{0}{(a+b)(a-b)} = 0 \end{aligned}$$

Fernaufgabe 1.7

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{a+b} \div \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} &= \frac{b-a}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2} \\ &= -\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} \\ &= -\frac{(a-b)(a+b)^2}{(a+b)(a+b)(a-b)} = -1 \end{aligned}$$

Fernaufgabe 1.8

Man kann hier mit der Polynomdivision rangehen und das gegebene Polynom durch einen der Linearfaktoren teilen oder man „errät“ den einen fehlenden Linearfaktor, indem man die Gleichung

$$25x^3 + 15x^2 - 9x + 1 = 25(x + 1)(x - 0.2)(x - x_3)$$

aufschreibt. Die Polynomdivision wäre der längere und kompliziertere Weg. Nehmen wir den einfacheren. Da zwei Nullstellen durch die Linearfaktoren ($x_1 = -1$ und $x_2 = 0.2$) gegeben sind, fehlt ja nur eine Nullstelle x_3, da das Polynom dritten Grades ist. Auf der rechten Seite müsste man das Distributivgesetz anwenden, d.h. ausmultiplizieren, um einen Term der Form der linken Seite zu erhalten. Uns reicht es nur die Kombinationen zu betrachten, bei denen ein x^2 zustande kommt. Also können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$15x^2 = -25x_3x^2 + 25 \cdot (-0.2)x^2 + 25x^2 = -25x_3x^2 + 20x^2.$$

Wir sehen, dass x^2 in jedem Summanden auf der linken und der rechten Seite vorkommt. Also können wir beide Seiten faktorisieren und erhalten eine Gleichung ohne x^2,

$$15 = -25x_3 + 20,$$

die wir nach x_3 umstellen können und erhalten die dritte Nullstelle und damit den dritten Linearfaktor:

$$-5 = -25x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0.2$$

Der dritte Linearfaktor ist also $(x - 0.2)$.

$$25x^3 + 15x^2 - 9x + 1 = 25(x + 1)(x - 0.2)(x - 0.2) = 25(x + 1)(x - 0.2)^2$$

Das anzukreuzende Ergebnis steht aber nicht in der erwarteten Form. Man erhält es, indem man einen Faktor 5 vor der Klammer in den Linearfaktor, den wir ausgerechnet haben, reinzieht:

$$25(x + 1)(x - 0.2)(x - 0.2) = 5(x + 1)(5x - 1)(x - 0.2).$$

Lernmodul 2

Fernaufgabe 2.1

Da mehr Arbeiter die Arbeit in kürzerer Zeit schaffen, haben wir einen antiproportionalen Zusammenhang (je mehr, desto weniger). Um von 5 Arbeitern auf 6 zu kommen, muss man mit $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ multiplizieren. Auf der anderen Seite (also 5 Tage) muss man durch $\frac{3}{2}$ teilen oder mit $\frac{2}{3}$ multiplizieren. Desweiteren haben wir mehr Leitung. Mehr Leitung bedeutet mehr Zeit (je mehr, desto mehr). Um die Länge von 360 auf 972 zu bringen, muss man mit $\frac{972}{360} = \frac{27}{10} = 2.7$ multiplizieren. Auf der anderen Seite muss man auch mit 2.7 multiplizieren. Also haben wir:

$$5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2.7 = 9.$$

Also werden 9 Tage benötigt.
Die Arbeiter stehen zu der Zeit in antiproportionalem Zusammenhang. Die Zeit muss auf 7 Tage gebracht werden, also muss man mit $\frac{7}{5}$ multiplizieren. Die Arbeiter müssen dann durch $\frac{7}{5}$ geteilt, also mit $\frac{5}{7}$ multipliziert werden. Wegen mehr Leitung muss mit $\frac{1008}{360} = \frac{14}{5} = 2.8$ multipliziert werden:

$$4 \cdot \frac{5}{7} \cdot 2.8 = 8.$$

Es werden 8 Arbeiter benötigt.

Fernaufgabe 2.2

Es ist eine Gleichung mit Brüchen. Man muss natürlich alle auf gleichen Nenner bringen. Zuerst faktorisieren wir die Nenner und erzeugen aus den unterschiedlichen Faktoren den gemeinsamen Nenner und müssen danach alle Brüche auf den gemeinsamen Nenner erweitern.

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2-3x} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x}{(x-3)^2} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x(x-3)} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2}{x(x-3)^2} - \frac{(x-3)^2}{x(x-3)^2} = \frac{5(x-3)}{x(x-3)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2-(x-3)^2}{x(x-3)^2} = \frac{5(x-3)}{x(x-3)^2}
\end{aligned}$$

Zwei Brüche, deren Nenner übereinstimmen, sind genau dann gleich, wenn die Zähler gleich sind:

$$x^2 - (x-3)^2 = 5(x-3).$$

Lösen wir als Nächstes die Klammern auf, indem wir die zweite Binomische Formel verwenden:

$$\begin{aligned}
& x^2-(x-3)^2 = 5(x-3)\\
\Leftrightarrow\quad & x^2-(x^2-6x+9) = 5x-15\\
\Leftrightarrow\quad & x^2-x^2+6x-9 = 5x-15\\
\Leftrightarrow\quad & x-9 = -15\\
\Leftrightarrow\quad & x = -6
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 2.3

Am besten sollte man hier physikalisch vorgehen. Bezeichnen wir die Zustromgeschwindigkeit mit v_1, die Abpumpgeschwindigkeit mit v_2, die Kapazität des Tanks mit c und die Entwicklungen des Wasserstands im Tank mit $w_1(t)$ bzw. $w_2(t)$. Die Zeit t hat die Maßeinheit Stunden (h). Die Maßeinheit für den Tankinhalt ist unwichtig, man kann Liter (l) verwenden. Die Geschwindigkeiten werden dann mit l/h gemessen, und w_1 bzw. w_2 mit Liter. Da v_1 und v_2 entgegengesetzt sind, muss v_1 positiv und v_2 negativ sein, da die Kapazität c logischerweise positiv sein sollte. Wir erhalten folgende Gesetzmäßigkeiten:

$$c = v_1\cdot 10 = 10v_1,\ \ -c = v_2\cdot 6 = 6v_2.$$

Damit haben wir:

$$10v_1 = -6v_2 \quad\Leftrightarrow\quad v_1 = -0.6v_2 \quad\Leftrightarrow\quad v_2 = -\frac{5}{3}v_1$$

Für die erste Entwicklung haben wir

$$w_1(1.25) = (v_1+v_2)\cdot 1.25 = \left(v_1-\frac{5}{3}v_1\right)\cdot 1.25 = -\frac{2}{3}v_1\cdot 1.25.$$

Für die zweite Entwicklung haben wir wegen einer zweiten Pumpe mit doppeltem Pumpvermögen insgesamt die dreifache Leistung der ersten Pumpe:

$$w_2(t_0) = (v_1+3v_2)t_0 = \left(v_1-3\cdot\frac{5}{3}v_1\right)t_0 = -4v_1t_0.$$

Mit t_0 bezeichnen wir hier die Zeit, die benötigt wird, um den Tank in der zweiten Phase leer zu pumpen. Aufgrund der Aufgabenstellung gilt:

$$w_1(1.25)+w_2(t_0) = -c.$$

Hier steht $-c$ für den leer gepumpten Tank, unter der Annahme, dass er am Anfang voll war. Sei T die Gesamtzeit, in der der Tank leer gepumpt wird (also beide Phasen). Dann gilt:

$$T = 1.25+t_0.$$

Wir können die erstere Gleichung durch Verwendung oberer Gleichungen umformen zu:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}v_1\cdot 1.25-4v_1t_0 = -10v_1\\
\Leftrightarrow\quad & v_1\left(-\frac{2}{3}\cdot 1.25-4t_0\right) = v_1(-10)\\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{2}{3}\cdot 1.25-4t_0 = -10
\end{aligned}$$

Wir haben also eine lineare Gleichung mit einer Variable, t_0:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\cdot 1.25 - 4t_0 &= -10 \\
\Leftrightarrow \qquad -4t_0 &= -10 + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \qquad -4t_0 &= -10 + \frac{5}{6} \\
\Leftrightarrow \qquad -4t_0 &= -\frac{60}{6} + \frac{5}{6} \\
\Leftrightarrow \qquad t_0 &= -\frac{55}{6}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\
\Leftrightarrow \qquad t_0 &= \frac{55}{24}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$T = \frac{5}{4}\mathrm{h} + \frac{55}{24}\mathrm{h} = \frac{30}{24}\mathrm{h} + \frac{55}{24}\mathrm{h} = \frac{85}{24}\mathrm{h} \doteq 3.54\mathrm{h}.$$

Fernaufgabe 2.4

Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig definiert. Die Funktionsgleichung einer Geraden ist $y = mx + b$. Nehmen wir zuerst die Punkte $A(-1|-1)$ und $B(4|0)$. Die Steigung kann direkt berechnet werden:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-1)}{4-(-1)} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Damit haben wir nun die Gleichung $y = 0.2x + b$. Dies ist ja die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte A und B geht. Beide Punkte müssen die Funktionsgleichung also erfüllen. B eingesetzt erhalten wir:

$$0 = 0.2\cdot 4 + b \quad\Leftrightarrow\quad 0 = 0.8 + b \quad\Leftrightarrow\quad b = -0.8$$

Also hat diese Gerade die Gleichung

$$y_{AB} = 0.2x - 0.8.$$

Das Gleiche machen wir mit $A(-1|-1)$ und $C(2|3)$:

$$m = \frac{3-(-1)}{2-(-1)} = \frac{4}{3}.$$

C eingesetzt:

$$3 = \frac{4}{3}\cdot 2 + b \quad\Leftrightarrow\quad b = 3 - \frac{8}{3} = \frac{9}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

Wir erhalten die Gleichung

$$y_{AC} = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Und nun die letzte Kombination $B(4|0)$ und $C(2|3)$:

$$m = \frac{3-0}{2-4} = \frac{3}{-2} = -1.5.$$

B eingesetzt:

$$0 = -1.5 \cdot 4 + b \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -6 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 6$$

Somit erhalten wir die letzte Gleichung:

$$y_{BC} = -1.5x + 6.$$

Um die Koordinaten der drei Punkte rechnerisch zu überprüfen, muss man die drei Punkte in die drei Gleichungen einsetzen. Dabei sollte kein Widerspuch entstehen, ansonsten hat man sich irgendwo verrechnet.

Fernaufgabe 2.5

Zuerst muss man die Geradengleichung durch $P(-2|-2.5)$ und $Q(1|1)$ aufstellen. Zuerst die Steigung:

$$m = \frac{1-(-2.5)}{1-(-2)} = \frac{3.5}{3} = \frac{7}{6}.$$

Dann Punkt Q einsetzen:

$$1 = \frac{7}{6} \cdot 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - \frac{7}{6} = \frac{6}{6} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}$$

Also haben wir

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}.$$

Nach der Aufgabenstellung müssen wir also die Nullstelle der Geraden berechnen. Dafür müssen wir sie Null setzen:

$$0 = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{7}{6}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Fernaufgabe 2.6

Man kann die Aufgabe physikalisch lösen, also die Weg-Zeit-Gesetze verwenden:

$$s_1(t) = v_1 t + 10, \; s_2(t) = v_2 t.$$

Die Aufgabenstellung führt zu:

$$s_1(t) = s_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad 120t + 10 = 180t \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 60t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{6}\mathrm{h}$$

Eine Sechstel Stunde ist 10 Minuten. Um die zurückgelegte Strecke zu berechnen muss man die berechnete Zeit in eine der beiden Gleichungen einsetzen. Nehmen wir s_2:

$$s_2\left(\frac{1}{6}\mathrm{h}\right) = 180\mathrm{km/h} \cdot \frac{1}{6}\mathrm{h} = 30\mathrm{km}.$$

Lernmodul 3

Fernaufgabe 3.1

Am besten kann man diese Aufgabe lösen, indem man die Funktion in die Scheitelpunktform bringt. Man kann aber auch die Nullstellen und die Stelle in der Mitte dazwischen berechnen. Die letztere Methode funktioniert nicht immer, da es Nullstellen bei einer Parabel nicht geben muss. Wählen wir die Standardmethode, also die Scheitelpunktform:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 5 \\ &= -(x^2 - 4x - 5) \\ &= -(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 - 5) \\ &= -((x-2)^2 - 4 - 5) \\ &= -((x-2)^2 - 9) \\ &= -(x-2)^2 + 9 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt liegt also bei $S(2|9)$.

Fernaufgabe 3.2

Auch hier muss der Scheitelpunkt berechnet werden. Also wieder Scheitelpunktform:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.1x^2 + 0.6x + 1.5 \\ &= -0.1(x^2 - 6x - 15) \\ &= -0.1(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 - 15) \\ &= -0.1((x-3)^2 - 9 - 15) \\ &= -0.1((x-3)^2 - 24) \\ &= -0.1(x-3)^2 + 2.4 \end{aligned}$$

Da der Scheitelpunkt bei $S(3|2.4)$ liegt, ist die Höhe 2.4m.
Für die zweite Teilaufgabe ist die rechte Nullstelle der Parabel gefragt. Für die Nullstellenberechnung kann man als Alternative zur pq-Formel auch die Scheitelpunktform verwenden:

$$\begin{aligned} -0.1(x-3)^2 + 2.4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -0.1(x-3)^2 = -2.4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 24 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Die rechte Nullstelle liegt bei $x = 3 + 2\sqrt{6}\text{m} \doteq 7.9\text{m}$.
Alternativ kann man für diese und die vorhergehende Aufgabe auch die Differentialrechnung verwenden.

Fernaufgabe 3.3

Wir können die Tatsache verwenden, dass die Dreiecke alle gleichschenklig und rechtwinklig sind. Außerdem sind jeweils zwei kongruent. Bezeichnen wir die kleinere Kathete mit x, dann ist die größere $10 - x$. Sei die kleinere Hypotenuse z und die größere z', dann gilt:

$$x^2 + x^2 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = x\sqrt{2}$$

Entsprechend gilt:

$$2(10 - x)^2 = (z')^2 \quad \Leftrightarrow \quad z' = (10 - x)\sqrt{2}$$

Da wir den maximalen Flächeninhalt suchen, brauchen wir die Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks:

$$A = a \cdot b.$$

In diesem Fall sind die Seitenlängen die beiden Hypotenusen:

$$A = z \cdot z' = x\sqrt{2} \cdot (10 - x)\sqrt{2} = 2x(10 - x) = -2x^2 + 20x.$$

Von dieser Funktion $A(x) = -2x^2 + 20x$ wollen wir also den Hochpunkt berechnen. Da es eine nach unten geöffnete Parabel ist, können wir sie wieder in Scheitelpunktform bringen:

$$\begin{aligned} A(x) &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) \\ &= -2((x - 5)^2 - 25) \\ &= -2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt liegt also bei $S(5|50)$. Die Seitenlängen sind also $z = z' = 5\sqrt{2}$cm und der maximale Flächeninhalt $A = 50\text{cm}^2$.

Fernaufgabe 3.4

Hier soll man eine quadratische Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen. Diesen Weg haben wir schon zwei Mal verwendet:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2x - 1 \\ &= x^2 + 2x + 1^2 - 1^2 - 1 \\ &= (x + 1)^2 - 1 - 1 \\ &= (x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$(x + 1)^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = \pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Also haben wir zwei Lösungen:

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \doteq 0.41, \; x_2 = -1 - \sqrt{2} \doteq -2.41.$$

Fernaufgabe 3.5

Hier soll man eine Lösungsformel verwenden, also die pq-Formel. Dafür muss die Gleichung in die pq-Normalform gebracht werden, also die Form

$$0 = x^2 + px + q.$$

D.h.

$$\sqrt{3}x^2 - 3x = 6\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}x^2 - 3x - 6\sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{3}{\sqrt{3}}x - 6 = x^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$$

Aus dieser Form kann dann p und q abgelesen werden. Hier ist

$$p = -\sqrt{3},\ q = -6.$$

Die pq-Formel ist

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{-\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{27}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

und damit

$$x_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\ x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Fernaufgabe 3.6

Für die Definitionsmenge müssen wir nur den zweiten Nenner betrachten, denn bei dieser Gleichung

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{9}{2x+1} = 4$$

ist der zweite Bruch die einzige Stelle, wo etwas Undefiniertes entstehen kann, nämlich durch 0 im Nenner. Da durch 0 nicht geteilt werden darf, darf der Nenner nicht 0 werden. Die Nullstellen des Nenners müssen also aus den reellen Zahlen für den Definitionsbereich ausgeschlossen werden. D.h.

$$2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{R}^{\backslash\{-0.5\}}$.
Als Nächstes müssen wir die beiden Brüche auf einen gleichen Nenner bringen $(3(2x+1))$:

$$\frac{(2x+1)^2}{3(2x+1)} + \frac{27}{3(2x+1)} = \frac{12(2x+1)}{3(2x+1)}.$$

Damit erhalten wir eine Gleichung der Zähler, denn zwei Brüche mit gleichem Nenner sind gleich, wenn ihre Zähler gleich sind. Da es eine quadratische Gleichung ist, bringen wir sie in pq-Normalform:

$$\begin{aligned}
(2x+1)^2 + 27 &= 12(2x+1) \\
4x^2 + 4x + 1 + 27 &= 24x + 12 \\
4x^2 + 4x + 28 &= 24x + 12 \\
4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die pq-Formel erhalten wir:

$$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = 2.5 \pm \sqrt{2.25} = 2.5 \pm 1.5,$$

und damit

$$x_1 = 4,\ x_2 = 1.$$

Fernaufgabe 3.7

Physikalisch können wir diese Aufgabe mit einem rechtwinkligen Dreieck lösen, bei dem eine Kathete $v_1 t_0$ die Entfernung des ersten Wagens von der Kreuzung darstellt und die andere Kathete $v_2 t_0$ die des zweiten. Die Hypotenuse ist offensichtlich die Entfernung der beiden Wagen von einander. Nach Pytagoras haben wir (Maßeinheiten müssen beachtet werden):

$$\begin{aligned}
(72t_0)^2 + (54t_0)^2 = 0.5^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 5184t_0^2 + 2916t_0^2 = 0.25 \quad \Leftrightarrow \quad 8100t_0^2 = 0.25 \\
&\Leftrightarrow \quad t_0^2 = \frac{1}{32400} \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{1}{180}\mathrm{h} = \frac{60^2}{180}\mathrm{s} = \frac{60 \cdot 60}{3 \cdot 60}\mathrm{s} = 20\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 3.8

Gegeben ist die quadratische Funktion

$$f(x) = -\frac{5}{2}(x+4)^2 + 8.$$

Zuerst brauchen wir die Funktionsgleichung der Geraden durch $P(-2|-2)$ und $Q(3|-4)$. Wir gehen vor wie üblich:

$$g(x) = mx + b.$$

Die Steigung berechnen wir mit

$$m = \frac{-4-(-2)}{3-(-2)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} = -0.4.$$

Als Nächstes setzen wir Q ein:

$$-4 = -0.4 \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad -4 = -1.2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -4 + 1.2 = -2.8$$

Somit erhalten wir

$$g(x) = -0.4x - 2.8.$$

Um den Schnittpunkt zwischen Parabel und Gerade zu berechnen, müssen wir die beiden Funktionen gleichsetzen ($f(x) = g(x)$) und in die pq-Normalform bringen:

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{2}(x+4)^2 + 8 &= -0.4x - 2.8 \\
-2.5(x^2 + 8x + 16) + 8 &= -0.4x - 2.8 \\
-2.5x^2 - 20x - 40 + 8 &= -0.4x - 2.8 \\
-2.5x^2 - 19.6x - 29.2 &= 0 \\
x^2 + 7.84x + 11.68 &= 0
\end{aligned}$$

In die pq-Formel eingesetzt erhalten wir:

$$x_{1/2} = -\frac{7.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7.84}{2}\right)^2 - 11.68} = -3.92 \pm \sqrt{3.6864} = -3.92 \pm 1.92.$$

Es gibt also zwei Schnittpunkte, und zwar bei

$$x_1 = -2, \; x_2 = -5.84.$$

Wir brauchen noch die Funktionswerte zu den Stellen, also

$$f(x_1) = g(x_1) = -2, \; f(x_2) = g(x_2) = -0.464.$$

Die Schnittpunkte sind also

$$S_1(-2|-2), \; S_2(-5.84|-0.464).$$

Weiter müssen wir noch die Entfernung der beiden Schnittpunkte von einander berechnen. Dazu stellen wir uns ein rechtwinkliges Dreieck mit den Schnittpunkten als zwei Eckpunkten im Koordinatensystem vor. Dann ist die Differenz der x-Koordinaten der Schnittpunkte eine Kathete des Dreiecks und die Differenz der y-Koordinaten die andere Kathete. Die Entfernung d der Punkte ist dann die Hypotenuse. Nach Pytagoras haben wir nun

$$\begin{aligned}
(-5.84-(-2))^2 + (-0.464-(-2))^2 = d^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3.84^2 + 1.536^2 = d^2 \\
\Leftrightarrow \quad \sqrt{17.104896} = d \quad &\Leftrightarrow \quad d \doteq 4.1358 \doteq 4.14
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 3.9

Bei dieser Wurzel-Gleichung

$$\sqrt{3x-3}+\sqrt{4+3x}=\sqrt{6x+25}$$

muss man die Wurzeln los werden. Da man die Gleichung nicht so umformen kann, dass auf keiner Seite eine Summe steht, können wir direkt quadrieren:

$$(\sqrt{3x-3}+\sqrt{4+3x})^2=6x+25$$

Erste Binomische Formel auf die linke Seite angewendet:

$$\begin{aligned}
3x-3+2\sqrt{3x-3}\sqrt{4+3x}+4+3x &= 6x+25\\
2\sqrt{3x-3}\sqrt{4+3x}+6x+1 &= 6x+25\\
2\sqrt{3x-3}\sqrt{4+3x} &= 24\\
\sqrt{3x-3}\sqrt{4+3x} &= 12
\end{aligned}$$

Nun können wir wieder quadrieren und sind die Wurzeln los. Offensichtlich wird es eine quadratische Gleichung. Bringen wir sie also in die pq-Normalform:

$$\begin{aligned}
(3x-3)(4+3x) &= 12^2\\
12x+9x^2-12-9x &= 144\\
9x^2+3x-12 &= 144\\
x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3} &= 16\\
x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}-\frac{48}{3} &= 0\\
x^2+\frac{1}{3}x-\frac{52}{3} &= 0
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die pq-Formel anwenden:

$$x_{1/2}=-\frac{1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{52}{3}}=-\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{625}{36}}=-\frac{1}{6}\pm\frac{25}{6}$$

Die Lösungen sind somit

$$x_1=4,\ x_2=-\frac{13}{3}=-4\tfrac{1}{3}.$$

Fernaufgabe 3.10

In dieser Aufgabe wurde offensichtlich vergessen die Bedeutung von a in der gegebenen Formel zu erklären:

$$r=a\sqrt[3]{T^2}.$$

Und zwar sollte wohl im Hinweis stehen, dass der mittlere Abstand der Erde zur Sonne $a = 149.5\text{Mkm}$.
Also haben wir folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
108\text{M} &= 149.5\text{M}\sqrt[3]{T^2} \\
\frac{108\text{M}}{149.5\text{M}} &= \sqrt[3]{T^2} \\
\frac{108^3}{149.5^3} &= T^2 \\
\sqrt{\frac{108^3}{149.5^3}} &= T
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$T \doteq 0.614.$$

Über die Maßeinheit von T steht auch nichts, aber da a der mittlere Abstand der Erde zur Sonne ist, müsste T in Erdjahren gemessen werden. Rechnen wir T in Tage um, erhalten wir

$$T = 365 \cdot \sqrt{\frac{108^3}{149.5^3}}\ \text{Tage} \doteq 224.1\ \text{Tage}.$$

Fernaufgabe 3.11

Die Strahlung soll zur Hälfte absorbiert werden. D.h., es gilt

$$N_{(d)} = \frac{1}{2}N_0.$$

Also haben wir

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\mu d}.$$

Formen wir um:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}N_0 &= N_0 e^{-\mu d} \\
\frac{1}{2} &= e^{-\mu d} \\
\ln(0.5) &= -\mu d \\
\frac{\ln(0.5)}{-\mu} &= d \\
\frac{\ln(0.5)}{-1.25} &= d
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$d \doteq 0.55\text{mm}.$$

Einfacher als etwas einem Funktionsgraphen zu entnehmen, ist es die gegebenen Daten in die Formel einzugeben, indem man für N_0 nicht die anfängliche Strahlung, sondern einfach 100% verwendet, und damit den Strahlungsanteil in Prozent zu berechnen:

$$p\% = 100\% \cdot e^{-1.25 \cdot 0.8} \doteq 36.8\%.$$

Fernaufgabe 3.12

Gegeben ist eine Exponentialgleichung

$$25^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+2} - 16 = 0.$$

Ziel muss es sein, die Exponentialfunktionen zu „eliminieren“. Wir haben in der Gleichung zwei verschiedene. Zuerst müssen diese zu einer Exponentialfunktion (also mit einer gemeinsamen Basis und einem gemeinsamen Exponenten) umgeformt werden.

$$\begin{aligned} 25^{x+1} + 3 \cdot 5^{x+2} - 16 &= 0 \\ \left(5^2\right)^{x+1} + 3 \cdot 5^1 \cdot 5^{x+1} - 16 &= 0 \\ \left(5^{x+1}\right)^2 + 15 \cdot 5^{x+1} - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Um vorerst die Exponentialfunktion aus der Gleichung zu eliminieren, macht man eine Substitution:

$$z = 5^{x+1}.$$

Damit erhalten wir offenbar eine quadratische Gleichung in z:

$$z^2 + 15z - 16 = 0.$$

Diese können wir bekannterweise mit der pq-Formel lösen:

$$z_{1/2} = -7.5 \pm \sqrt{7.5^2 + 16}.$$

Wir erhalten zwei Lösungen:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -16.$$

Da es Lösungen für z sind, müssen wir also noch zwei Gleichungen lösen, um Lösungen für x zu erhalten:

$$1 = 5^{x+1},\ -16 = 5^{x+1}.$$

Die zweite Gleichung hat offensichtlich keine Lösungen, da eine Exponentialfunktion (mit positiver Basis) nur positive Werte liefert. Die erste führt zu:

$$\begin{aligned} 1 &= 5^{x+1} \\ \log_5(1) &= x + 1 \\ \log_5(1) - 1 &= x \\ -1 &= x \end{aligned}$$

Lernmodul 4

Fernaufgabe 4.1

Gegeben sind

$$\eta = 60^\circ,\ \rho = 80^\circ.$$

Man kann an mehreren Stellen anfangen. Fangen wir bei δ an. Wegen der Parallelität der Schenkel von δ gilt $\delta = \eta = 60^\circ$. η befindet sich in einem rechtwinkligen Dreieck, also ist nur noch ein Winkel hier unbekannt, nennen wir ihn η'. Offensichtlich ist η' Komplementwinkel von η, also gilt $\eta' = 90^\circ - \eta = 30^\circ$. Offenbar gilt weiter $\eta' + \varepsilon + \rho = 180^\circ$, also haben wir $\varepsilon = 180^\circ - \rho - \eta' = 70^\circ$. Auch ε befindet sich in einem rechtwinkligen Dreieck, also gilt für den Komplementwinkel ε' von ε: $\varepsilon' = 90^\circ - \varepsilon = 20^\circ$. Offenbar ist ρ Wechselwinkel zu $\varepsilon' + \beta$, also gilt $\rho = \varepsilon' + \beta$ und damit $\beta = \rho - \varepsilon' = 60^\circ$. Weiter sehen wir, dass $\varepsilon' + \beta + \gamma = 180^\circ$ gilt, also haben wir $\gamma = 180^\circ - \varepsilon' - \beta = 100^\circ$. Bleibt nur noch α und wir sehen, dass α Wechselwinkel von ε' ist, also $\alpha = \varepsilon' = 20^\circ$.

Fernaufgabe 4.2

Betrachten wir hier zwei rechtwinklige Dreiecke: die Eckpunkte des ersten seien linke untere Ecke, die Mitte der unteren Kante und die Mitte des Bretts; die Eckpunkte des zweiten seien linke untere Ecke, Mitte des linken unteren Kreises und der Punkt auf der unteren Kante senkrecht unter dieser. Bezeichnen wir den Radius des kleinen Kreises mir r und den des großen Kreises mit R. Offensichtlich sind beide rechtwinklige Dreiecke gleichschenklig. Wenden wir den Satz des Pytagoras auf die beiden Dreiecke an. Bei diesen ist ein Stück der Hypotenusen (das linke untere) undefiniert. Bezeichnen wir dieses Stück mit y.

$$\begin{aligned}(r+x)^2 + (r+x)^2 &= (r+y)^2\\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= (R+x+d+y)^2\end{aligned}$$

Formen wir um:

$$\begin{aligned}2(r+x)^2 &= (r+y)^2\\ 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 &= (R+x+d+y)^2\end{aligned}$$

Hier können wir Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(r+x) &= r+y\\ \sqrt{2}\cdot\frac{a}{2} &= R+x+d+y\end{aligned}$$

Es sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, R und y. Uns interessiert R, deswegen eliminieren wir y, indem wir die beiden Gleichungen subtrahieren, und zwar untere minus obere:

$$\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2} - \sqrt{2}(r+x) = R+x+d-r$$

Formen wir nun nach R um und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} - \sqrt{2}(r + x) - x - d + r \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}r - \sqrt{2}x - x - d + r \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} + \left(1 - \sqrt{2}\right) r - \left(1 + \sqrt{2}\right) x - 2r \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} + \left(1 - \sqrt{2} - 2\right) r - \left(1 + \sqrt{2}\right) x \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} + \left(-1 - \sqrt{2}\right) r - \left(1 + \sqrt{2}\right) x \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} - \left(1 + \sqrt{2}\right) r - \left(1 + \sqrt{2}\right) x \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} - \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot (r + x)
\end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichung mit 2 multiplizieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{2a}{\sqrt{2}} - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)(r + x) \\
D &= \sqrt{2}a - \left(1 + \sqrt{2}\right)(2r + 2x) \\
&= \sqrt{2}a - \left(1 + \sqrt{2}\right)(d + 2x) \\
&\doteq 109.35\text{mm}
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 4.3

Wir haben ein rechtwinkliges Dreieck, also gilt der Satz des Pytagoras:

$$r^2 + t^2 = (r + s)^2$$

Da s die Unbekannte ist und es eine quadratische Gleichung in s ist, müssen wir sie in pq-Normalform bringen:

$$\begin{aligned}
(r + s)^2 &= r^2 + t^2 \\
r^2 + 2rs + s^2 &= r^2 + t^2 \\
s^2 + 2rs + r^2 - r^2 - t^2 &= 0 \\
s^2 + 2rs - t^2 &= 0
\end{aligned}$$

Damit ist $p = 2r$ und $q = -t^2$. Mit der pq-Formel (die Maßeinheiten wandeln wir zuerst in cm um)

$$s_{1/2} = -r \pm \sqrt{r^2 + t^2} = -6 \pm \sqrt{6^2 + 8^2} = -6 \pm 10$$

berechnen wir:

$$s_1 = 4, \; s_2 = -16.$$

Da es negative Längen nicht gibt, ist die Antwort $s_1 = 4\text{cm}$.
Um den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, benutzt man eine Kathete als Grundseite und die andere als Höhe und erhält:

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2}\text{cm}^2 = 24\text{cm}^2.$$

Fernaufgabe 4.4

Der Riemen besteht hauptsächlich aus drei Teilen, deren Längen (b_1, b_2 und e) sich einzeln berechnen lassen. Offenbar ist e eine Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse a und dessen andere Kathete $R - r$ sind. Wandeln wir die Maßeinheiten in Meter um. Also haben wir

$$\begin{aligned} e^2 + (R-r)^2 &= a^2 \\ e^2 &= a^2 - (R-r)^2 \\ e &= \sqrt{a^2 - (R-r)^2} \\ e &\doteq 3.794\text{m} \end{aligned}$$

Für b_1 und b_2 brauchen wir α. Da α ein Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist, können wir α mit dem Sinus berechnen:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{R-r}{a} \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{R-r}{a}\right) \doteq 3.32^\circ \end{aligned}$$

Damit können wir b_1 berechnen:

$$b_1 = 2\pi R \cdot \frac{90^\circ + \alpha}{360^\circ} \doteq 0.863\text{m}.$$

Und auch b_2:

$$b_2 = 2\pi r \cdot \frac{90^\circ - \alpha}{360^\circ} \doteq 0.469\text{m}.$$

Die Länge des Riemens ist dann

$$l = 2(b_1 + b_2 + e) \doteq 10.252\text{m}.$$

Fernaufgabe 4.5

Am einfachsten ist es, die Fläche des Rechtecks und die Fläche der Aussparung in Form eines Trapezes zu berechnen und die Differenz zu bilden. Die Fläche des Rechtecks ist

$$A_1 = 70 \cdot 20 = 1400\text{mm}^2.$$

Beim Trapez fehlt die untere Seite a. Diese kann man mit Hilfe des Winkels berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(60^\circ) &= \frac{12}{x} \\ x &= \frac{12}{\tan(60^\circ)} = 4\sqrt{3} \doteq 6.93\text{mm} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$a = c + 2x = 30 + 8\sqrt{3} \doteq 43.86\text{mm}.$$

Die Fläche der Aussparung ist dann

$$A_2 = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{30 + 8\sqrt{3} + 30}{2} \cdot 12 = (60 + 8\sqrt{3}) \cdot 6 = 360 + 48\sqrt{3} \doteq 443.14\text{mm}^2.$$

Die Fläche der Figur ist somit

$$A = A_1 - A_2 = 956.86\text{mm}^2.$$

Fernaufgabe 4.6

Die Figur besteht aus einem Ring und einem Ringsektor. Der Ringsektor hat die Radien $R_1 = 10\text{cm}$ und $r_1 = 3\text{cm}$. Der Winkel des Sektors ist 75°. Also haben wir

$$A_1 = (\pi R_1^2 - \pi r_1^2) \cdot \frac{75°}{360°} \doteq 59.56\text{cm}^2.$$

Der Ring hat die Radien $R_2 = 3\text{cm}$ und $r_2 = 1.5\text{cm}$. Also

$$A_2 = \pi R_2^2 - \pi r_2^2 \doteq 21.21\text{cm}^2.$$

Die Fläche ist also

$$A = A_1 + A_2 \doteq 80.77\text{cm}^2.$$

Fernaufgabe 4.7

Gegeben ist also die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks $a = 65\text{mm} = 6.5\text{cm}$. Jede Seite bildet mit dem Mittelpunkt des In- und Umkreises ein gleichschenkliges Dreieck mit zwei Schenkeln der Länge r. Damit besteht die Fläche des Fünfecks aus fünf kongruenten Dreiecken. Der Winkel α an der Spitze des Dreiecks ist somit bekannt:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°.$$

Ein gleichschenkliges Dreieck besteht aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken mit der Hälfte der Basis als eine Kathete, r als Hypotenuse und der Höhe ρ als andere Kathete. Der Winkel gegenüber der Hälfte der Basis ist offenbar $\alpha' = 36°$. Der Sinus liefert:

$$\begin{aligned} \sin(36°) &= \frac{32.5}{r} \\ r &= \frac{32.5}{\sin(36°)} \doteq 55.29\text{mm} \end{aligned}$$

Mit dem Tangens kann man den Inkreisradius berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(36°) &= \frac{32.5}{\rho} \\ \rho &= \frac{32.5}{\tan(36°)} \doteq 44.73\text{mm} \doteq 4.47\text{cm} \end{aligned}$$

Die Fläche ist dann

$$A = 5 \cdot \frac{6.5 \cdot \rho}{2} \doteq 72.69\text{cm}^2.$$

Fernaufgabe 4.8

Die gegebene Situation führt zur Konstruktion zweier rechtwinkliger Dreiecke mit einer gemeinsamen Kathete a und zwei Winkeln: α und β. Die andere Kathete x des einen Dreiecks ist ein Teil der anderen Kathete $x + 30$ des anderen Dreiecks. Wir haben:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{x}{a} \\ a &= \frac{x}{\tan\alpha} \end{aligned}$$

Im anderen Dreieck gilt analog:

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{x+30}{a} \\ a &= \frac{x+30}{\tan\beta} \end{aligned}$$

Mit dem Gleichsetzungsverfahren erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\tan\alpha} &= \frac{x+30}{\tan\beta} \\ x\tan\beta &= (x+30)\tan\alpha \\ x\tan\beta &= x\tan\alpha + 30\tan\alpha \\ x\tan\beta - x\tan\alpha &= 30\tan\alpha \\ x(\tan\beta - \tan\alpha) &= 30\tan\alpha \\ x &= \frac{30\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \doteq 1006.15\text{m} \end{aligned}$$

Da wir uns 750m über dem Meeresspiegel befinden, müssen wir diese Höhe hinzurechnen:

$$h_b = x + 750\text{m} = 1756.15\text{m}.$$

Fernaufgabe 4.9

Wir können den Winkel β mit dem Kosinussatz berechnen. Dazu sei $a = \overline{M_1M_2} = 5.5\text{cm}$, $b = \overline{M_2M_3} = 4\text{cm}$ und $c = \overline{M_1M_3} = 3.5\text{cm}$:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ b^2 - a^2 - c^2 &= -2ac\cos\beta \\ \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} &= \cos\beta \\ \beta &= \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}\right) \doteq 46.5^\circ \end{aligned}$$

Damit kann α mit Hilfe von $\gamma = 28^\circ$ berechnet werden:

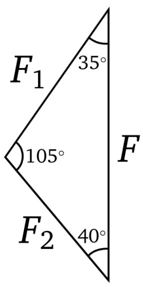
$$\alpha = 90^\circ - \beta - \gamma \doteq 15.5^\circ.$$

Um die Koordinaten x und y von M_2 zu berechnen, verwenden wir Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{x}{a} \\
x &= a\cos\alpha \doteq 5.30\text{cm} \\
\sin\alpha &= \frac{y}{a} \\
y &= a\sin\alpha \doteq 1.47\text{cm}
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 4.10

Die Aufgabe führt zu einem Kräftediagramm mit folgendem Aussehen:



Da wir die Länge von F kennen ($F = 1200$N), können wir F_1 und F_2 mit dem Sinussatz berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{F}{\sin(105^\circ)} &= \frac{F_1}{\sin(40^\circ)} \\
F_1 &= F \cdot \frac{\sin(40^\circ)}{\sin(105^\circ)} \doteq 798.56\text{N} \\
\frac{F}{\sin(105^\circ)} &= \frac{F_2}{\sin(35^\circ)} \\
F_2 &= F \cdot \frac{\sin(35^\circ)}{\sin(105^\circ)} \doteq 712.57\text{N}
\end{aligned}$$

Fernaufgabe 4.11

Draht hat offenbar Zylinderform, dessen Durchmesser gegeben ist. Gesucht ist somit die Höhe, also die Länge des Drahtes. Dafür müssen wir zuerst Gewicht in Volumen mit Hilfe der Dichte umrechnen, indem wir auch die Maßeinheiten anpassen, d.h. 25kg $\hat{=}$ 25000g:

$$V = \frac{25000}{8.93} \doteq 2799.55\text{cm}^3.$$

Außerdem gilt:

$$V = \pi r^2 h.$$

Also gilt (wobei $r = 0.125$cm):

$$\begin{aligned} \frac{25000}{8.93} &= \pi r^2 h \\ h &= \frac{25000}{8.93\pi r^2} \doteq 57032\text{cm} = 570.32\text{m} \end{aligned}$$

Fernaufgabe 4.12

Gegeben ist ein komplizierter Körper: es ist eine Kugel, bei der unten etwas weggeschnitten ist, und die einen Hohlraum in Form eines Zylinders und eines Kegels hat. Insgesamt müssen vier Volumina berechnet werden, drei werden dann von einem abgezogen. Das Weggeschnittene, nennen wir es Kuppel, der Kugel ist dabei das eigentliche Problem. Dafür gibt es keine konventionelle Formel. Kümmern wir uns darum als letztes. Die Maßeinheiten wandeln wir am besten in cm um. Zuerst Kugelvolumen:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2.5^3 \doteq 65.45\text{cm}^3.$$

Zylindervolumen:

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3.2 \doteq 10.05\text{cm}^3.$$

Der Kegel hat einen Spitzenwinkel von 140°, d.h. es gibt einen Querschnitt des Kegels, der ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkel an der Spitze 140° ist. Die anderen beiden Winkel müssen also je 20° sein. Wir können nun die Höhe des Kegels mit Tangens berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(20^\circ) &= \frac{h}{1} \\ h &\doteq 0.36\text{cm} \end{aligned}$$

Das Volumen ist dann:

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \doteq 0.38\text{cm}^3.$$

Um es nicht zu kompliziert zu machen, erklären wir hier nicht in aller Ausführlichkeit den Satz von Cavalieri und dessen Anwendung auf diese Situation, den kann man im vierten Lernmodul nachschlagen. Das Volumen einer Kuppel mit einer bestimmten Höhe kann mit dem Satz von Cavalieri berechnet werden. Und zwar ist das Volumen eines Zylinders mit Radius und Höhe r mit dem Hohlraum eines Kegels mit gleichem Radius und Höhe nach dem Satz von Cavalieri volumengleich einer Halbkugel mit Radius r. Man führe sich diese Tatsache mit einer Skizze vor Augen. Somit ist dann eine Kuppel beliebiger Höhe h (wobei h kleiner als der Radius r der zugehörigen Kugel ist) volumengleich einem Zylinder mit gleicher Höhe h und Radius r mit dem Hohlraum eines Kegelstumpfes mit gleichem ersten Radius und gleicher Höhe eines Kegels mit Radius und Höhe r. Der zweite Radius des Kegelstumpfes, bzw. der Radius und Höhe der Kegelspitze, ist $r - h$ (das kann man sich an der oben genannten Skizze klar machen). Volumen so eines Kegelstumpfes ist dann

$$V_{\mathrm{KS}} = \frac{1}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(r-h)^3 = \frac{1}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3) = \pi h\left(r^2 - rh + \frac{1}{3}h^2\right).$$

Die Idee der oberen Formel: Volumen des umhüllenden Kegels minus Volumen der Kegelspitze. Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h ist

$$V_{\mathrm{Z}} = \pi r^2 h.$$

Das Volumen der Kuppel ist dann (wobei $r = 2.5\mathrm{cm}$ und $h = 0.4\mathrm{cm}$)

$$V_4 = V_{\mathrm{Z}} - V_{\mathrm{KS}} = \pi r^2 h - \pi h\left(r^2 - rh + \frac{1}{3}h^2\right) = \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right) \doteq 1.19\mathrm{cm}^3.$$

Somit erhalten wir

$$V = V_1 - V_2 - V_3 - V_4 \doteq 53.83\mathrm{cm}^3.$$

Fernaufgabe 4.13

Das Volumen der Kugel ist klar. Doch aus welchen bekannten Körpern besteht das Volumen, das abgezogen werden muss? Offenbar handelt es sich um einen Zylinder mit Radius $R = 3\mathrm{cm}$ und $h = 2\sqrt{5^2 - 3^2}\mathrm{cm} = 8\mathrm{cm}$ und zwei identische Kuppeln, ähnlich wie in der Aufgabe zuvor, mit dem Radius der Kugel $r = 5\mathrm{cm}$ und Höhe $k = 1\mathrm{cm}$. Zuerst die Kugel:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3\mathrm{cm}^3 \doteq 523.60\mathrm{cm}^3.$$

Der Zylinder:

$$V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 8\mathrm{cm}^3 \doteq 226.19\mathrm{cm}^3.$$

Die Formel für die Kuppel entnehmen wir der Aufgabe zuvor (wobei wir k für h einsetzen):

$$V_3 = \pi k^2\left(r - \frac{1}{3}k\right) = \pi \cdot 1^2 \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\cdot 1\right)\mathrm{cm}^3 \doteq 14.66\mathrm{cm}^3.$$

Das Volumen ist dann

$$V = V_1 - V_2 - 2V_3 \doteq 268.08\mathrm{cm}^3 \doteq 268\mathrm{cm}^3.$$

Die Dichte von Holz wandeln wir in $\mathrm{g/cm^3}$ um, d.h.

$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = \frac{1000\mathrm{g}}{(10\mathrm{cm})^3} = \frac{1000\mathrm{g}}{1000\mathrm{cm}^3} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Die Masse m der hohlen Kugel ist dann

$$m = V \cdot 0.7\mathrm{g/cm}^3 \doteq 187.66\mathrm{g} \doteq 188\mathrm{g}.$$

Für die beschränkte Oberfläche brauchen wir eine Idee. Denn wie das Volumen der Kuppel, lässt sich die Fläche der Kuppel nicht ohne Weiteres berechnen. Dafür können wir, ähnlich wie für die Oberfläche der Kugel das Volumen (im vierten Lernmodul nachzulesen), verwenden. Wir brauchen aber nicht nur das Volumen der Kuppel, sondern zusätzlich das Volumen des Kegels mit Radius $R = 3\text{cm}$ und Höhe $h' = \frac{1}{2}h = 4\text{cm}$:

$$V_{\mathrm{K}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h' = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4\text{cm}^3 \doteq 37.70\text{cm}^3.$$

Das Volumen des Körpers, den wir brauchen, um die Fläche der Kuppel zu berechnen, ist nun

$$V_{\mathrm{KF}} = V + V_{\mathrm{K}} \doteq 305.78\text{cm}^3.$$

Wir versuchen jetzt diesen Körper mit Kegeln der Höhe r auszufüllen, so dass das Gesamtvolumen der Kegel gegen V_{KF} konvergiert. Die Grundflächen der Kegel bedecken annähernd die Fläche der Kuppel. Je mehr Kegel wir wählen, desto näher kommen die Volumina der Kegel dem Volumen V_{KF}, und desto näher kommen die Grundflächen der Kegel der Fläche der Kuppel A_{KF}. Alle Grundfächen seien dabei gleich groß und haben die Bezeichnung G. Wir haben

$$V_n = \frac{1}{3}Gr \cdot n.$$

Lassen wir n gegen Unendlich laufen, so haben wir

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{KF}} &= \frac{r}{3}A_{\mathrm{KF}} \\
A_{\mathrm{KF}} &= \frac{3}{r}V_{\mathrm{KF}} \\
&= \frac{3}{r}\left(\pi k^2\left(r - \frac{1}{3}k\right) + \frac{1}{3}\pi R^2 h'\right) \\
&= \frac{3}{r}\left(\pi k^2\left(r - \frac{1}{3}k\right) + \frac{1}{3}\pi R^2 (r-k)\right) \\
&= \pi k^2\left(3 - \frac{k}{r}\right) + \pi R^2\left(1 - \frac{k}{r}\right) \\
&= \pi k^2\left(2 + 1 - \frac{k}{r}\right) + \pi R^2\left(1 - \frac{k}{r}\right) \\
&= 2\pi k^2 + (\pi k^2 + \pi R^2)\left(1 - \frac{k}{r}\right) \\
&= 2\pi k^2 + \pi(k^2 + R^2)\left(1 - \frac{k}{r}\right)
\end{aligned}$$

Wir haben hier $h' = r - k$ verwendet.
Weiter verwenden wir $k = r - \frac{1}{2}h$ und $\frac{1}{4}h^2 + R^2 = r^2$, um den Term möglichst gut zu

vereinfachen (man veranschauliche sich das an einer Skizze):

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{KF}} &= 2\pi k^2 + \pi(k^2 + R^2)\left(1 - \frac{k}{r}\right) \\
&= 2\pi\left(r - \frac{1}{2}h\right)^2 + \pi\left(\left(r - \frac{1}{2}h\right)^2 + R^2\right)\left(1 - \frac{r - \frac{1}{2}h}{r}\right) \\
&= 2\pi\left(r - \frac{1}{2}h\right)^2 + \left(r^2 - rh + \frac{1}{4}h^2 + R^2\right)\frac{\pi h}{2r} \\
&= 2\pi\left(r - \frac{1}{2}h\right)^2 + \left(2r^2 - rh\right)\frac{\pi h}{2r} \\
&= 2\pi\left(r - \frac{1}{2}h\right)^2 + \pi h\left(r - \frac{1}{2}h\right) \\
&= (2\pi r - \pi h + \pi h)\left(r - \frac{1}{2}h\right) \\
&= 2\pi r\left(r - \frac{1}{2}h\right) \\
&= 2\pi r k
\end{aligned}$$

Die Formel für die Fläche einer Kuppel der Höhe k einer Kugel mit Radius r ist also

$$A_{\mathrm{KF}} = 2\pi r k.$$

Für die gesuchte Oberfläche werden drei Flächen benötigt: die Oberfläche der Kugel, zwei mal die Fläche der Kuppel der Höhe k und die Mantelfläche des Zylinders mit Radius R und Höhe h. Oberfläche der Kugel:

$$A_1 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2\mathrm{cm}^2 = 314.16\mathrm{cm}^2.$$

Fläche der Kuppel:

$$A_2 = 2\pi r k = 2\pi \cdot 5 \cdot 1\mathrm{cm}^2 = 31.42\mathrm{cm}^2.$$

Mantelfläche des Zylinders:

$$A_3 = 2\pi R h = 2\pi \cdot 3 \cdot 8\mathrm{cm}^2 = 150.80\mathrm{cm}^2.$$

Die gesuchte Oberfläche ist somit

$$A_{\mathrm{O}} = A_1 - 2A_2 + A_3 \doteq 402.12\mathrm{cm}^2 \doteq 402\mathrm{cm}^2.$$

Fernaufgabe 4.14

Die Formel für einen quadratischen Pyramidenstumpf ist

$$V = \frac{1}{3}h\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right).$$

Da hier nur $a_2 = b$ unbekannt und es eine quadratische Gleichung in b ist, bringen wir die Gleichung in pq-Normalform:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right) \\ 0 &= \frac{1}{3}h\left(b^2 + ab + a^2\right) - V \\ 0 &= b^2 + ab + a^2 - \frac{3V}{h} \end{aligned}$$

Also ist $p = a$ und $q = a^2 - \frac{3V}{h}$. Wenden wir nun die pq-Formel an:

$$b_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2 + \frac{3V}{h}} = -5 \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} - 10^2 + \frac{3 \cdot 392}{6}}.$$

Somit haben wir $b_1 = 6$ und $b_2 = -16$. Da es negative Längen nicht gibt, haben wir

$$b = 6\text{cm}.$$

Offenbar ist b parallel zu a. Wir können also den zweiten Strahlensatz anwenden, um die Höhe h' der Pyramidenspitze zu berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{h'}{h' + h} \\ b(h' + h) &= ah' \\ bh' + bh &= ah' \\ bh &= (a - b)h' \\ h' &= \frac{bh}{a - b} = 9\text{cm} \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir die Seitenkante s' der Pyramidenspitze berechnen. Das kann man z.B. mit Pytagoras:

$$(s')^2 = (h')^2 + \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = 9^2 + 3^3 + 3^3 = 99$$

Damit ist $s' = \sqrt{99}\text{cm} \doteq 9.95\text{cm}$. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{s}{s'} \\ s &= \frac{a}{b} \cdot s' \doteq 16.58\text{cm} \doteq 16.6\text{cm} \end{aligned}$$

Lernmodul 5

Fernaufgabe 5.1

Wir wissen Folgendes:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -20 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem wissen wir, dass

$$|\vec{v_1}| = 50, \ |\vec{v_2}| = 40.$$

Wir haben also zwei Gleichungen:

$$20^2 + y_1^2 = 50^2, \ 30^2 + y_2^2 = 40^2,$$

und somit

$$y_1 = -\sqrt{50^2 - 20^2} = -10\sqrt{21} \doteq -45.83, \ y_2 = -\sqrt{40^2 - 30^2} = -10\sqrt{7} \doteq -26.46.$$

Wir haben also die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10\sqrt{21} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -20 \\ -45.83 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10\sqrt{7} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 30 \\ -26.46 \end{pmatrix}.$$

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, gibt es eine Formel für die besondere Eigenschaft des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Der Winkel α ist dabei der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Diese Formel muss offenbar nach α umgestellt werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -20 \\ -10\sqrt{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -10\sqrt{7} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -10\sqrt{21} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 30 \\ -10\sqrt{7} \end{pmatrix}\right|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-20 \cdot 30 + 10\sqrt{21} \cdot 10\sqrt{7}}{\sqrt{20^2 + 10^2 \cdot 21} \cdot \sqrt{30^2 + 10^2 \cdot 7}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-600 + 700\sqrt{3}}{\sqrt{2500} \cdot \sqrt{1600}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-6 + 7\sqrt{3}}{20}\right) \doteq 72.17^\circ \end{aligned}$$

Fernaufgabe 5.2

Da der Weg 15m ist und durch den Vektor $\vec{e}_s$ die Richtung bestimmt wird, der die Länge 1 hat, haben wir

$$\vec{s} = 15\text{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Skalrprodukt berechnet man dann

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \frac{15}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3\text{m} \\ 2\text{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\text{N} \\ 5\text{N} \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{13}}(9\text{Nm} + 10\text{Nm}) = \frac{285}{\sqrt{13}}\text{Nm} \doteq 79.04\text{Nm}.$$

Fernaufgabe 5.3

Zuerst müssen wir die Koordinaten von $\vec{r} = \vec{ES}$ berechnen. Da die Muttern sich an den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks befinden, ist der Winkel zwischen $\overline{SE}$ und der x-Achse 30°. Also haben wir

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 900\cos(30^\circ) \\ 900\sin(30^\circ) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 779.42 \\ 450 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt zwischen zweidimensionalen Vektoren existiert eigentlich nicht, da das Kreuzprodukt senkrecht zu den Vektoren ist, von denen es gebildet wird. Da aber bei Übertragung dieser Vektoren in den dreidimensionalen Raum die ersten beiden Koordinaten des Kreuzproduktes 0 sind und wir uns meistens für die Länge des Ergebnisvektors interessieren, kann man vereinbaren, dass das Kreuzprodukt zweidimensionaler Vektoren eine Zahl ist, und zwar die dritte Koordinate und damit die Länge des Ergebnisvektors. Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0.9\cos(30^\circ)\text{m} \\ 0.45\text{m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\text{kN} \\ 10\text{kN} \end{pmatrix} = 9\cos(30^\circ)\text{kNm} \doteq 7.794\text{kNm}.$$

Fernaufgabe 5.4

Eine Drehmatrix ist eine Matrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt für die einzelnen Drehungen die Winkel berechnen, um die gedreht werden soll. Der erste Winkel ist offenbar

$$\frac{4}{10} \cdot 360^\circ = 144^\circ,$$

der zweite

$$-\frac{6}{10} \cdot 360^\circ = -216^\circ$$

und der dritte

$$\frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

Nun muss man nur die Winkel in die Matrix einsetzen und erhält:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos(144^\circ) & -\sin(144^\circ) \\ \sin(144^\circ) & \cos(144^\circ) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -0.8090 & -0.5878 \\ 0.5878 & -0.8090 \end{pmatrix},$$
$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos(-216^\circ) & -\sin(-216^\circ) \\ \sin(-216^\circ) & \cos(-216^\circ) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -0.8090 & -0.5878 \\ 0.5878 & -0.8090 \end{pmatrix},$$
$$D_3 = \begin{pmatrix} \cos(36^\circ) & -\sin(36^\circ) \\ \sin(36^\circ) & \cos(36^\circ) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0.8090 & -0.5878 \\ 0.5878 & 0.8090 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen nun das Produkt $\vec{z}' = D_1 \cdot \vec{z}$ bilden:

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} \cos(144^\circ) & -\sin(144^\circ) \\ \sin(144^\circ) & \cos(144^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\text{cm} \\ 5\text{cm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\sin(144^\circ)\text{cm} \\ 5\cos(144^\circ)\text{cm} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -2.9389\text{cm} \\ -4.0451\text{cm} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ergebnis multiplizieren wir D_2 und erhalten $\vec{z}''$:

$$\vec{z}'' = \begin{pmatrix} \cos(-216^\circ) & -\sin(-216^\circ) \\ \sin(-216^\circ) & \cos(-216^\circ) \end{pmatrix} \cdot \vec{z}' \doteq \begin{pmatrix} 4.7553\text{cm} \\ 1.5451\text{cm} \end{pmatrix}.$$

Und als Letztes multiplizieren wir D_3 mit $\vec{z}''$:

$$\vec{z}_e = \begin{pmatrix} \cos(36^\circ) & -\sin(36^\circ) \\ \sin(36^\circ) & \cos(36^\circ) \end{pmatrix} \cdot \vec{z}'' \doteq \begin{pmatrix} 2.9389\text{cm} \\ 4.0451\text{cm} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 2.94\text{cm} \\ 4.05\text{cm} \end{pmatrix}.$$

Fernaufgabe 5.5

Da wir hier die maximale Leistung berechnen sollen, muss also von der gegebenen Funktion

$$P(R) = U_0^2 \frac{R}{(R+R_i)^2}$$

ein Extremum, genauer, ein Hochpunkt berechnet werden. Offenbar braucht man dafür die Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
P'(R) &= U_0^2 \frac{1 \cdot (R+R_i)^2 - R \cdot 2(R+R_i)}{(R+R_i)^4} \\
&= U_0^2 \frac{(R+R_i) - 2R}{(R+R_i)^3} \\
&= U_0^2 \frac{R_i - R}{(R+R_i)^3} \\
P''(R) &= U_0^2 \frac{-(R+R_i)^3 - (R_i - R) \cdot 3(R+R_i)^2}{(R+R_i)^6} \\
&= U_0^2 \frac{-(R+R_i) - 3(R_i - R)}{(R+R_i)^4} \\
&= U_0^2 \frac{2R - 4R_i}{(R+R_i)^4} \\
&= 2U_0^2 \frac{R - 2R_i}{(R+R_i)^4}
\end{aligned}$$

Als Nächstes müssen wir die Nullstellen von $P'(R)$ berechnen (notwendige Bedingung). Da es ein Bruch ist, ist die Ableitung 0, wenn der Zähler 0 ist:

$$\begin{aligned}
0 &= U_0^2(R_i - R) \\
0 &= R_i - R \\
R &= R_i
\end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist erfüllt, wenn $P''(R_i) \neq 0$ ist:

$$\begin{aligned}
P''(R_i) &= 2U_0^2 \frac{R_i - 2R_i}{(R_i + R_i)^4} \\
&= 2U_0^2 \frac{-R_i}{(2R_i)^4} \\
&= -\frac{U_0^2}{8R_i^3} < 0
\end{aligned}$$

Wir haben also einen Hochpunkt bei R_i.

Fernaufgabe 5.6

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2(x^2 - 8x + 16).$$

Um die Nullstellen zu berechnen, setzen wir die Funktion 0:

$$0 = x^2(x^2 - 8x + 16).$$

Da es offenbar eine Produktgleichung ist, gilt:

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

Also ist die erste Nullstelle $x_1 = 0$. Für die restlichen müssen wir die zweite Gleichung lösen:

$$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} = 4.$$

Also haben wir $x_2 = 4$ und somit zwei Nullstellen. Für Extrema und Wendepunkte brauchen wir drei Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 32x \\ f''(x) &= 12x^2 - 48x + 32 \\ f'''(x) &= 24x - 48 \end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung berechnen wir die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^3 - 24x^2 + 32x \\ 0 &= 4x(x^2 - 6x + 8) \end{aligned}$$

Aus dieser Produktgleichung folgt:

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

Also ist $x_1 = 0$. Weiter haben wir

$$x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1$$

und damit $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$. Hinreichende Bedingung liefert:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 32 = 32 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP \\ f''(4) &= 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 32 = 192 - 192 + 32 = 32 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP \\ f''(2) &= 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 32 = 48 - 96 + 32 = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad HP \end{aligned}$$

Wir brauchen noch die y-Koordinaten zu den x-Koordinaten der Punkte:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) = 0^2 \cdot (0^2 - 8 \cdot 0 + 16) = 0 \\ y_2 &= f(4) = 4^2 \cdot (4^2 - 8 \cdot 4 + 16) = 0 \\ y_3 &= f(2) = 2^2 \cdot (2^2 - 8 \cdot 2 + 16) = 16 \end{aligned}$$

Somit haben wir die Extrema:

$$TP(0|0),\ HP(2|16),\ TP(4|0).$$

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte basiert auf den Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 48x + 32 \\ &= x^2 - 4x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir:

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{8}{3}}$$

Also haben wir $x_1 \doteq 3.15$ und $x_2 \doteq 0.85$. Für die hinreichende Bedingung gilt:

$$f'''(x_1) \approx 24 = \frac{6+2\sqrt{2}}{3} \cdot 3.15 - 48 \neq \;\Rightarrow\; WP$$
$$f'''(x_2) \approx 24 = \frac{6-2\sqrt{2}}{3} \cdot 0.85 - 48 \neq \;\Rightarrow\; WP$$

Für die y-Koordinaten gilt:

$$f(x_1) = x_1^2(x_1^2 - 8x_1 + 16) = \frac{64}{9} \doteq 7.11$$
$$f(x_2) = x_2^2(x_2^2 - 8x_2 + 16) = \frac{64}{9} \doteq 7.11$$

Wir haben somit die Wendepunkte:

$$WP_1\left(\frac{6-2\sqrt{2}}{3}\middle|\frac{64}{9}\right) \doteq WP_1(0.85|7.11),\; WP_2\left(\frac{6+2\sqrt{2}}{3}\middle|\frac{64}{9}\right) \doteq WP_2(3.15|7.11).$$

Der Verlauf des Graphen erschließt sich aus den Extrema und Wendepunkten. Die Fläche, die vom Graphen und Achsen eingeschlossen wird, wird offenbar links und rechts von 0 und 4 begrenzt. Wir müssen also das bestimmte Integral über 0 bis 4 von $f(x)$ bilden:

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 x^4 - 8x^3 + 16x^2\,dx &= \left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 + c\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{5}\cdot 4^5 - 2\cdot 4^4 + \frac{16}{3}\cdot 4^3 + c - \left(\frac{1}{5}\cdot 0^5 - 2\cdot 0^4 + \frac{16}{3}\cdot 0^3 + c\right) \\ &= \frac{1}{5}\cdot 4^5 - 2\cdot 4^4 + \frac{16}{3}\cdot 4^3 = \frac{512}{15} \doteq 34.13\end{aligned}$$

Fernaufgabe 5.7

Wir haben eine Abbremsung einer vorher konstanten Geschwindigkeit mit einem Beschleunigungsgesetz (eigentlich Entschleunigungsgesetz):

$$a(t) = -0.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t,$$

kurz:

$$a(t) = -0.5t.$$

Also haben wir folgende Endgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}v_e = v_0 + \int_0^{15} a(t)\,dt &= 100\mathrm{m/s} + \int_0^{15} -0.5t\,dt \\ &= 100\mathrm{m/s} + \left[-0.25t^2\right]_0^{15} = 100\mathrm{m/s} + (-56.25\mathrm{m/s}) = 43.75\mathrm{m/s}.\end{aligned}$$