Lernmodul 5, Kapitel 2.1

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion und Logarithmus sind zwei Funktionsklassen, die jeweils Umkehrfunktionen von einander sind. Eine **Umkehrfunktion** einer Funktion f ist eine Funktion, die jedem Funktionswert von f, also $f(x_0)$, den Wert x_0 zuordnet und wird mit f^{-1} bezeichnet. Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2$ ordnet dem Wert 5 aus dem Definitionsbereich den Wert 25 aus dem Wertebereich zu. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ordnet dem Wert 25 aus dem Definitionsbereich den Wert 5 aus dem Wertebereich zu. Also genau umgekehrt. Was bedeutet, dass der Definitionsbereich und der Wertebereich bei der Umkehrfunktion vertauscht werden. Graphisch hat die Umkehrfunktion einer gegebenen Funktion die Eigenschaft, die Spiegelung an der **Winkelhalbierenden** (die Gerade $y = x$) zu sein. Die allgemeine Form einer **Exponentialfunktion** ist

$$f(x) = c \cdot a^x, \; a > 0, \; a \neq 1, \; c \neq 0.$$

Da $a^0 = 1$ unabhängig von der Basis a ist, schneidet die Funktion $f(x) = a^x$ die y-Achse immer bei 1. Das bedeutet, dass die oben angegebene Funktion die y-Achse immer bei c schneidet. Da Potenzen mit wachsendem Exponenten immer größer werden, wenn die Basis größer 1 ist und umgekehrt immer kleiner werden, wenn die Basis kleiner 1 ist, muss f für $a > 1$ streng monoton steigend und für $a < 1$ streng monoton fallend sein (wenn c positiv ist). Ist c negativ, so ist offenbar f im Vergleich zum betragsmäßig gleichen, aber positiven $c' = |c|$, an der x-Achse gespiegelt. Nimmt man statt a den Kehrwert von a, so spiegelt man offenbar f an der y-Achse, was man mit den Potenzgesetzen leicht nachvollziehen kann.
Aus einer beliebigen Funktion kann man die Umkehrfunktion berechnen (das kann man nur, wenn die Funktion injektiv ist, d.h. zu einem Wert aus dem Wertebereich gibt es nur einen zugehörigen Wert aus dem Definitionsbereich), indem man statt $f(x)$ die Variable y schreibt und die Funktionsgleichung nach x umstellt. Dann vertauscht man die Rollen von x und y und ersetzt y durch $f^{-1}(x)$.
Die reine Exponentialfunktion ist $f(x) = a^x$, bestehend aus einer festen Basis und einem variablen Exponenten. Die reine Logarithmusfunktion ist $f(x) = \log_a(x)$ und besteht aus einer festen Basis und einem variablen Argument. Damit eine Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion einer bestimmten Exponentialfunktion wird, muss die Basis der Logarithmusfunktion gleich der Basis der Exponentialfunktion sein.

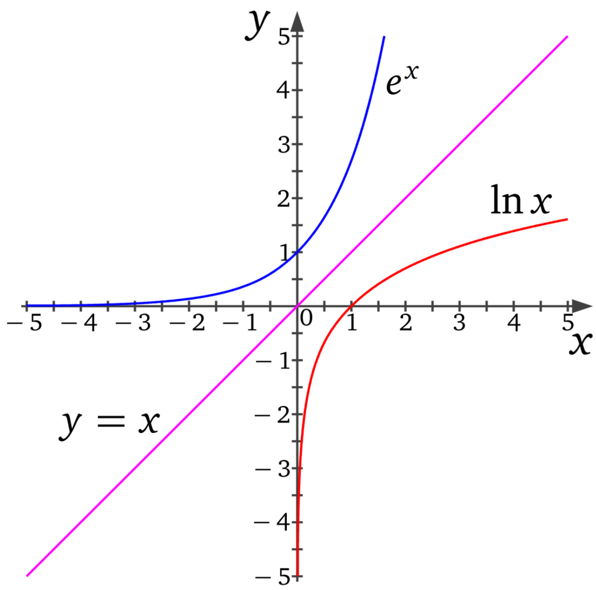
$$f(x) = ca^x \quad \Leftrightarrow \quad y = ca^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{c} = a^x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a\left(\frac{y}{c}\right) = \log_a\left(a^x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_a\left(\frac{y}{c}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a\left(\frac{x}{c}\right) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_a\left(\frac{x}{c}\right)$$

Da $\log_a()$ die Umkehrfunktion von $a^{()}$ ist, gilt $\log_a\left(a^x\right) = a^{\log_a x} = x$. Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion und damit die allgemeine Form einer **Logarithmusfunktion** ist

$$f(x) = \log_a\left(\frac{1}{c}x\right).$$

Die wichtigste Basis einer Exponentialfunktion ist die **Eulersche Konstante** e. Wie π hat sie unendlich viele Stellen nach dem Komma, deren Muster sich nicht wiederholen. Die ersten fünf Stellen sind $2,71828\ldots$. Sie heißt auch die **natürliche Zahl** und damit $f(x) = e^x$ die **natürliche Exponentialfunktion**. Selbstverständlich gibt es dann auch die natürliche Logarithmusfunktion: sie hat die Basis e und wird mit $f(x) = \ln x$ bezeichnet. Die Graphen der Exponentialfunktionen und der Logarithmusfunktionen sind insbesondere wichtig, da man an ihnen wichtige Eigenschaften erkennt:



Eine wichtige Eigenschaft ist, dass die Exponentialfunktion keine Nullstellen und nur positive Funktionswerte hat. Entsprechend ist die Logarithmusfunktion nur für den Definitionsbereich $x > 0$ definiert.

Potenzgesetze

Es gibt folgende Potenzgesetze, die man zur Umformung von Termen verwenden kann:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Logarithmusgesetze

Aus den Potenzgesetzen folgen die Logarithmusgesetze, da die zugehörigen Funktionen ja Umkehrfunktionen von einander sind:

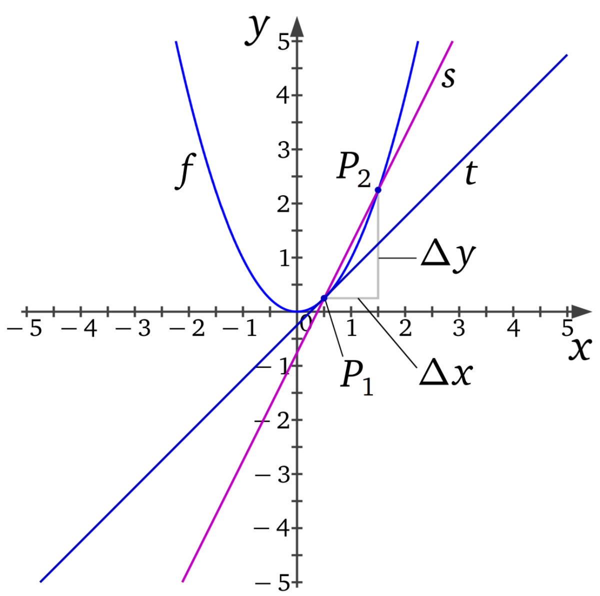
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$

Tangenten und Sekanten

Eine **Tangente** ist eine lineare Funktion, d.h. eine Gerade, die eine gegebene nicht lineare Funktion **lokal**, d.h. in einem eingeschränkten Bereich, nur in einem Punkt des Funktionsgraphen berührt. Sie hat also eine ganz bestimmte Steigung, denn hätte sie eine etwas größere oder kleinere Steigung, müsste sie offenbar die Funktion in einem weiteren Punkt des eingeschränkten Bereiches schneiden, also den Graphen in zwei Punkten schneiden. Eine Gerade, die einen Funktionsgraphen lokal in zwei Punkten schneidet, nennt man eine **Sekante**. Da eine Tangente einen Funktionsgraphen lokal in einem Punkt berührt und damit eine bestimmte Steigung hat, repräsentiert die Tangentensteigung die Steigung der Funktion an der Stelle (eine **Stelle** ist ein Wert auf der x-Achse) der x-Koordinate des Berührpunktes.



Oben sind eine Funktion $f(x) = x^2$, eine Tangente $t(x) = x - 0,25$ und eine Sekante $s(x) = 2x - 0,75$ abgebildet. Die abgebildeten Punkte sind $P_1(0.5|0.25)$ und $P_2(1.5|2.25)$. Wählt man irgend eine Stelle x_0 (auf der x-Achse), so sieht man, dass die Tangentensteigung an dieser Stelle (meistens) nicht offensichtlich ist. Wie findet man diese Steigung heraus? Offenbar über die Sekantensteigung, denn wählen wir zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ auf dem Graphen, wissen wir, dass wir die Steigung der Sekanten durch die beiden Punkte berechnen können mit der Formel für das Steigungsdreieck:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Wenn man jetzt überlegt, einen der Punkte festzuhalten, z.B. den linken, und den anderen auf den linken „zugehen zu lassen", d.h. die x-Koordinate des rechten Punktes so neu zu wählen, dass sie näher an der x-Koordinate des linken Punktes liegt, und den Prozess auf diese Weise weiter zu führen, dann kommen die damit verbundenen Steigungen der Sekanten der Steigung der Tangente immer näher. Diese Idee kann man folgenderweise formulieren, indem man die Punkte $P_1(x_0\,|\,f(x_0))$ und $P_2(x_0 + h\,|\,f(x_0 + h))$ verwendet, deren Koordinaten man sich mit Hilfe des oben abgebildeten Graphen überlegt:

$$m(x_0; h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wir haben die bekannte Formel für m von oben verwendet, um diese neue Formel zu formulieren. Im Nenner kommt h zustande, da $(x_0 + h) - x_0 = h$ ergibt. Diese Formel heißt **Differenzenquotient** und trägt den Namen zurecht, denn im Zähler und im Nenner stehen Differenzen, während es sich um einen Bruch, also um einen Quotienten, handelt — deswegen Differenzenquotient.

Schließlich erhalten wir die Steigung der Funktion f an der Stelle x_0, indem wir den Limes, d.h. den Grenzwert, von $m(x_0; h)$ für $h \to 0$ bilden, denn der Grenzwert ist offensichtlich die Tangentensteigung. Die Steigung der Funktion f an der Stelle x_0 nennt man **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 und bezeichnet sie mit f':

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} m(x_0; h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Berechnung von $f'(x_0)$ mit Hilfe der Limesbildung des Differenzenquotienten für eine Funktion f nennt man die **h-Methode**.

Zu erwähnen wären noch zwei Begriffe, die in diesem Zusammenhang manchmal vorkommen: die momentane und die durchschnittliche Änderungsrate. Die **momentane Änderungsrate** bezieht sich auf einen Funktionsverlauf, genauer gesagt: darauf, wie sich der Verlauf einer Funktion ändert. Wenn man es sich überlegt, muss die momentane Änderungsrate die Steigung der Funktion an irgend einer Stelle sein, also $f'(x_0)$. Die **durchschnittliche Änderungsrate** muss der Durchschnitt der Änderungsraten über einen Zeitraum, d.h. über einem Bereich auf der x-Achse, sein. Logischerweise muss sie durch die Sekantensteigung der durch die beiden Punkte auf dem Graphen der Funktion, die am linken und rechten Rand des Bereiches ihre x-Koordinaten haben, erzeugten Sekante repräsentiert werden. Also durch $m(x_0; h)$, wobei x_0 der linke Rand und h die Breite des Bereiches ist.

Ableitungsregeln

Mit Hilfe der h-Methode kann man für gegebene Funktionen die Ableitungen berechnen, indem man zuerst den Differenzenquotienten vereinfacht (nachdem man

f durch den gegebenen Funktionsterm ersetzt), so dass h im Nenner eliminiert wird, und dann den Limes gebildet. Wenn man dann Funktionen und deren Ableitungen betrachtet, stellt man fest, dass es gewisse Gesetzmäßigkeiten zwischen ihnen gibt.

Summenregel: Besteht die Funktion aus einer Summe zweier Funktionen, so können beide Summanden unabhängig von einander abgeleitet und wieder zu einer Summe zusammengefasst werden:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Faktorregel: Besteht die Funktion aus einem Produkt einer Zahl mit einer Funktion, so kann die Funktion unabhängig von der Zahl abgeleitet und dann mit der Zahl multipliziert werden:

$$f(x) = c \cdot u(x)$$
$$f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Potenzregel: Handelt es sich bei der Funktion um eine Potenzfunktion, so gilt:

$$f(x) = ax^n$$
$$f'(x) = anx^{n-1}$$

Produktregel: Besteht die Funktion aus einem Produkt zweier Funktionen, so gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel: Besteht die Funktion aus einer Verkettung zweier Funktionen, so ergibt sich die Ableitung durch „äußere Ableitung mal innere Ableitung“:

$$f(x) = u(v(x))$$
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel: Besteht die Funktion aus einem Quotienten zweier Funktionen, so gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Kurvendiskussion

Die **Kurvendiskussion** ist ein umfangreicher Begriff und umfasst mehrere verschiedene Rechenprozesse, deren Ergebnisse vor allem dazu helfen sollen, den Graphen einer gegebenen Funktion gut zeichnen zu können. Bevor wir anfangen, definieren wir einige Begriffe.

Ein **Intervall** ist eine Menge von Zahlen, die zwischen zwei Zahlen liegen. Diese beiden Zahlen nennt man **untere** und **obere Grenze** des Intervalls. Ein Intervall kann geschlossen (eckige Klammer), offen (runde Klammer) oder halboffen sein und wird so beschrieben:

$$[a;b],\ (a;b),\ [a;b),\ (a;b] \text{ mit } a,b \in \mathbb{R}.$$

Die eckige Klammer gibt dabei an, dass die Grenze im Intervall enthalten ist, die runde, entsprechend nicht.
Eine Funktion f heißt in einem Intervall I **monoton steigend** oder **monoton wachsend**, wenn für alle $a,b \in I$ mit $a < b$ gilt: $f(a) \leq f(b)$. Sie heißt **streng monoton steigend** oder **streng monoton wachsend**, wenn für alle $a,b \in I$ mit $a < b$ sogar $f(a) < f(b)$ gilt. Entsprechend heißt eine Funktion **monoton fallend**, wenn für alle $a,b \in I$ mit $a < b$ gilt: $f(a) \geq f(b)$. Sie heißt **streng monoton fallend**, wenn für alle $a,b \in I$ mit $a < b$ sogar $f(a) > f(b)$ gilt.
Nun kommt die Kurvendiskussion.

Schnittpunkte mit den Achsen: Die Achsen verlaufen da, wo jeweils eine Koordinate 0 ist, d.h. $x = 0$ (y-Achse) oder $y = 0$ (x-Achse). Den Schnittpunkt mit der y-Achse berechnet man also, indem man $f(0)$ bildet. Die Schnittpunkte mit der x-Achse erhält man, wenn man die Gleichung $f(x) = 0$ löst.

Verhalten für betragsgroße x-Werte: Das Verhalten der Funktion für betragsgroße Zahlen dient dazu, festzustellen, wo man ansetzen muss, wenn man die Funktion von links nach rechts zeichnet, und wo man am rechten Rand des Koordinatensystems ankommt, wenn man mit dem Zeichnen fertig ist. Es muss also der Limes von $f(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ gebildet werden, damit man die „Randwerte“ kennt.

Extrempunktberechnung: Mit Extrema bezeichnet man Punkte auf dem Graphen einer Funktion, die lokal den höchsten oder den niedrigsten y-Wert haben. D.h., von allen Punkten auf dem Graphen in der Nähe ist die y-Koordinate der Punkte kleiner oder größer als beim Extremum. Einen Punkt, der den maximalen y-Wert in einem Bereich hat, nennt man **Hochpunkt**, einen, der den minimalen y-Wert hat, nennt man **Tiefpunkt**. Einen Hochpunkt oder Tiefpunkt nennt man allgemein **Extremum**. Die Stelle, an der sich ein Hochpunkt befindet, heißt **Maximum** und die, an der sich ein Tiefpunkt befindet, heißt **Minimum**.
Das Vorgehen, ein Extremum zu berechnen, basiert auf der Eigenschaft einer Funktion im Extremum die Steigung 0 zu haben, wie man sich leicht überlegt. Die Steigung einer Funktion f wird von der Ableitung f' beschrieben. Da wir auf der Suche nach Extrema sind, suchen wir die Stellen, an denen die Ableitung 0 ist, denn wenn die Ableitung nicht 0 ist, kann an der Stelle kein Extremum sein (dann ist die Funktion an der Stelle ja streng monoton steigend oder fallend). Deswegen muss die Ableitung an der Stelle eines Extremums notwendigerweise 0 sein. D.h., wir suchen zuerst die Nullstellen der ersten Ableitung. Dieser erste Schritt der Extrempunktberechnung nennt man **Überprüfung der notwendigen Bedingung**. Die notwendige Bedingung der Extrempunktberechnung wird also erfüllt an den Nullstellen der ersten Ableitung. Diese Stellen müssen noch nicht Extrema aufweisen, deswegen muss es noch eine hinreichende Bedingung geben. Diese

kann mit Hilfe einer weiteren Eigenschaft der Funktion formuliert werden — der Krümmung. Die **Krümmung** einer Funktion f wird durch die zweite Ableitung f'' beschrieben. Anschaulich, wenn man von links nach rechts durch den Funktionsgraphen geht, kann man sich die Krümmung als Rechts- oder Linkskurve verdeutlichen. Eine Stelle, an der eine Rechtskrümmung herrscht, würde eingesetzt in die zweite Ableitung einen negativen Wert liefern, entsprechend eine Linkskrümmung wiederum einen positiven. Ein **Krümmungswechsel** liegt vor, wenn eine Links- in eine Rechtskrümmung übergeht oder umgekehrt. Diese Stelle muss offenbar eine Nullstelle der zweiten Ableitung sein. Die **hinreichende Bedingung** muss an allen Stellen überprüft werden, an denen die notwendige Bedingung erfüllt ist. Sie ist erfüllt, wenn die zweite Ableitung an der zu überprüfenden Stelle ungleich 0 ist.

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{x_1, x_2, \ldots\}$
Hinreichende Bedingung: $f''(x_i) \neq 0$ muss für alle $x_i \in L$ überprüft werden.

Für jedes $x_i \in L$ gibt es eine eigene Aussage darüber, ob die hinreichende Bedingung erfüllt ist oder nicht. Es bleibt am Ende also nur ein Teil der Menge L übrig, für den die hinreichende Bedingung erfüllt ist. Für die Stellen, an denen die hinreichende Bedingung erfüllt ist, liefert die zweite Ableitung einen positiven oder einen negativen Wert und wir haben schon bemerkt, dass ein negativer Wert eine Rechtskrümmung, also Hochpunkt, und ein positiver eine Linkskrümmung, also Tiefpunkt, bedeutet.

$$f''(x_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad HP; \quad f''(x_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

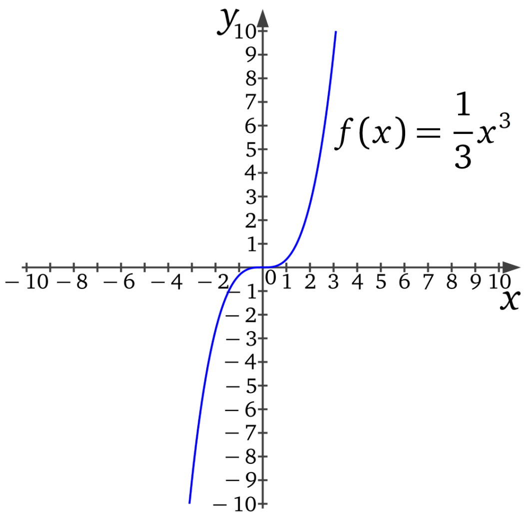
Um die Punkte komplett anzugeben, müssen die Funktionswerte an den Stellen, an denen beide Bedingungen erfüllt sind, berechnet werden.

$$EP_1(x_1 \,|\, f(x_1)), EP_2(x_2 \,|\, f(x_2)), \ldots$$

Wendepunktberechnung: Wendepunkte sind Punkte auf dem Funktionsgraphen, in denen ein Krümmungswechsel vorliegt. Man kann auch noch eine Eigenschaft erkennen. Es sind Punkte, an deren Stellen die Steigung entweder minimal oder maximal wird. Beide Eigenschaften führen dazu, dass die notwendige Bedingung der Wendepunktberechnung an den Nullstellen der zweiten Ableitung erfüllt wird. Für die hinreichende Bedingung muss die dritte Ableitung an der zu prüfenden Stelle ungleich 0 sein. Diese muss natürlich nur für die Stellen überprüft werden, an denen die notwendige Bedingung erfüllt ist.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{x_1, x_2, \ldots\}$
Hinreichende Bedingung: $f'''(x_i) \neq 0$ muss für alle $x_i \in L$ überprüft werden.

Was haben wir eigentlich, wenn sowohl $f'(x_i) = 0$, als auch $f''(x_i) = 0$ gilt? Nun, dann muss die Funktion solche Form haben (unter der Voraussetzung, dass eine weitere Bedingung erfüllt ist):



Aufgrund der Form heißt der Punkt $(0|0)$ **Sattelpunkt** und gehört zur Gattung Wendepunkte (da ja die Krümmung 0 ist). Und weil es ja ein Wendepunkt ist, muss zusätzlich die hinreichende Bedingung für Wendepunkte erfüllt sein, d.h. $f'''(x_i) \neq 0$.

$$f'(x_i) = 0,\ f''(x_i) = 0,\ f'''(x_i) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad SP$$

Wie bei der Extrempunktberechnung bleibt nur ein Teil von L übrig, für den die Bedingungen erfüllt sind. Um die Punkte komplett anzugeben, müssen die Funktionswerte an den Stellen, an denen die Bedingungen erfüllt sind, wie schon bei den Extrempunkten, berechnet werden.

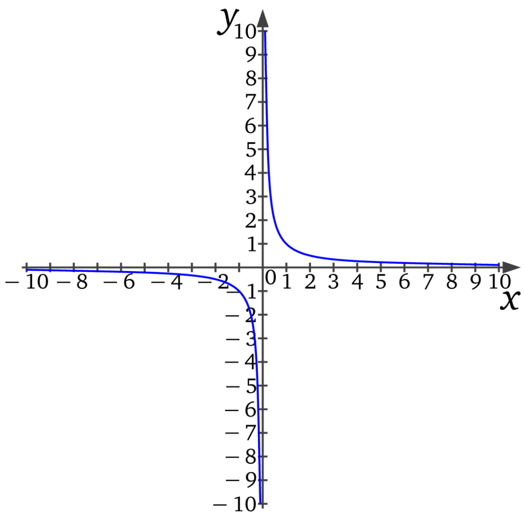
$$WP_1(x_{W1}|f(x_{W1})), WP_2(x_{W2}|f(x_{W2})), \ldots, SP_1(x_{S1}|f(x_{S1})), SP_2(x_{S2}|f(x_{S2})), \ldots$$

Monotonieverhalten: In welchen Intervallen ist die Funktion monoton steigend, streng monoton steigend, monoton fallend, streng monoton fallend?

Asymptoten: Eine Asymptote einer Funktion f ist eine lineare Funktion oder eine Parallele zur y-Achse, der sich f beliebig nähert, aber sie nicht berührt. Beispiel: Die Funktion

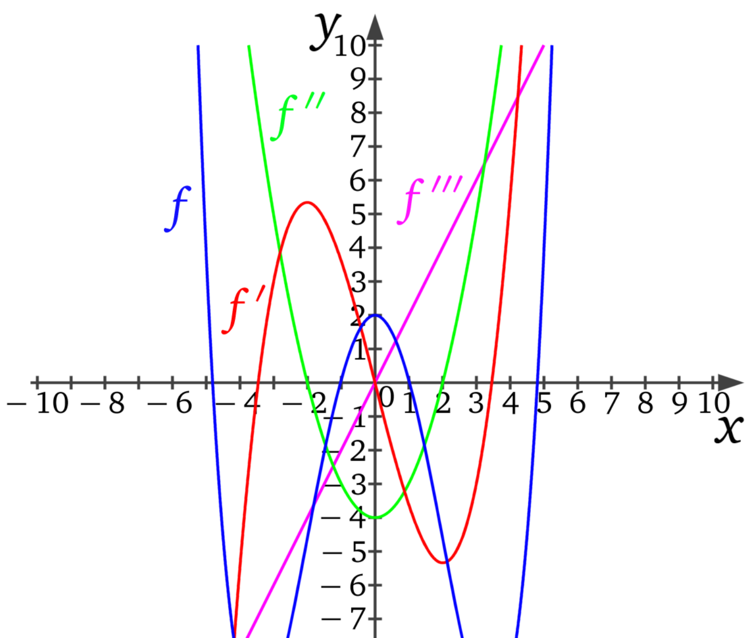
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

heißt **Hyperbel** und hat als Asymptoten beide Achsen: $x = 0$, $y = 0$.



Beispiel einer Kurvendiskussion

Ein Beispiel einer Funktion vierten Grades und ihre ersten drei Ableitungen sehen wir in der folgenden Abbildung.



Die zugehörige Funktion und deren Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 4x \\ f''(x) &= x^2 - 4 \\ f'''(x) &= 2x \end{aligned}$$

Schnittpunkte mit den Achsen: $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 24x^2 + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 24z + 24 = 0$$

Im letzten Schritt haben wir $x^2 = z$ substituiert (x^2 durch z ersetzt), um eine Funktion vierten Grades auf eine zweiten Grades zu reduzieren. Jetzt können wir die pq-Formel verwenden und z berechnen, wonach wir dann auf x zurückschließen können.

$$z_{1/2} = 12 \pm \sqrt{12^2 - 24} = 12 \pm \sqrt{120} \quad \Rightarrow \quad z_1 \doteq 22.95, \; z_2 \doteq 1.05$$

und damit

$$\begin{aligned} x^2 = z \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1}, \; x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} \\ \Rightarrow \quad x_1 \doteq 4.79, \; x_2 \doteq -4.79, \; x_3 \doteq 1.02, \; x_4 \doteq -1.02 \end{aligned}$$

Das sind die vier Schnittpunkte mit der x-Achse. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $f(0) = 2$.

Verhalten für betragsgroße x:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \; \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Da der größte Exponent von x, der vorkommt, 4 ist, müssen wir nur den ersten Summanden betrachten, da er der stärkste ist und bestimmt, wie sich die Funktion bei betragsgroßen x verhält. Das ist ein gerader Exponent, somit wird das Vorzeichen von dem ersten Summanden „verschluckt“. Das Ergebnis ist also positiv, da auch der Koeffizient positiv ist. Da eine (betragsmäßig) große Zahl noch größer wird, wenn sie potenziert wird, geht mit x auch $f(x)$ gegen ∞. Das gilt sowohl für positive als auch für negative x-Werte, da das Vorzeichen beim entscheidenden Summanden verschwindet. D.h., die Funktion kommt von oben und geht wieder nach oben.

Extrempunktberechnung: Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$:

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ oder } x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \sqrt{12} \doteq 3.46, \; x_3 = -\sqrt{12} \doteq -3.46$$

$$L = \{x_1, x_2, x_3\} = \left\{0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right\} \doteq \{0, 3.46, -3.46\}$$

Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$:

$$f''(x_1) < 0,\ f''(x_2) > 0,\ f''(x_3) > 0$$

Wir haben also Extrema bei L,

$$f(x_1) = 2,\ f(x_2) = -10,\ f(x_3) = -10,$$

und damit folgende:

$$HP_1\,(0\,|\,2)\,,\ TP_2\left(2\sqrt{3}\,|\,-10\right),\ TP_3\left(-2\sqrt{3}\,|\,-10\right).$$

Wendepunkte: Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = 2,\ x_2 = -2$$

$$L = \{x_1, x_2\} = \{2, -2\}$$

Hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$:

$$f'''(x_1) \neq 0,\ f'''(x_2) \neq 0$$

Wir haben also Wendepunkte bei L,

$$f(x_1) = -\frac{14}{3},\ f(x_2) = -\frac{14}{3},$$

und damit folgende:

$$WP_1\left(2\,\middle|\,-\frac{14}{3}\right),\ WP_2\left(-2\,\middle|\,-\frac{14}{3}\right).$$

Monotonieverhalten: Offenbar ist die Funktion im Intervall $\left(-\infty; -2\sqrt{3}\right]$ streng monoton fallend, im Intervall $\left[-2\sqrt{3}; 0\right]$ streng monoton steigend, im Intervall $\left[0; 2\sqrt{3}\right]$ streng monoton fallend und im Intervall $\left[2\sqrt{3}; \infty\right)$ streng monoton steigend.

Asymptoten: Bei dieser Funktion gibt es keine Asymptoten.

Ableitung der Exponential- und der Logarithmusfunktion

Übliche Ableitungsregeln helfen nicht, die Exponential- und die Logarithmusfunktion abzuleiten. Deswegen müssen diese Spezialfälle gemerkt werden.
Die Exponentialfunktion ohne den Streckungsfaktor c, da es ja die Faktorregel gibt:

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \\ f'(x) &= \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Die Logarithmusfunktion, auch ohne c, wegen der Kettenregel:

$$f(x) = \log_a(x)$$
$$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$$

Spezialfälle sind $f(x) = e^x$, mit der Eigenschaft als einzige nichttriviale Funktion sich selbst als Ableitung zu haben, also $f'(x) = e^x$, und $f(x) = \ln x$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Übungen

Aufgabe 1

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = (4x^2 - 4x + 2.75)e^{-x+2}$.

Aufgabe 2

Für welchen Radius und welche Höhe hat eine zylinderförmige Blechdose mit 1L Volumen minimale Oberfläche? Also, unter welchen Bedingungen gibt es minimalen Materialverbrauch? Wie groß ist dann die minimale Oberfläche?

Lösungen

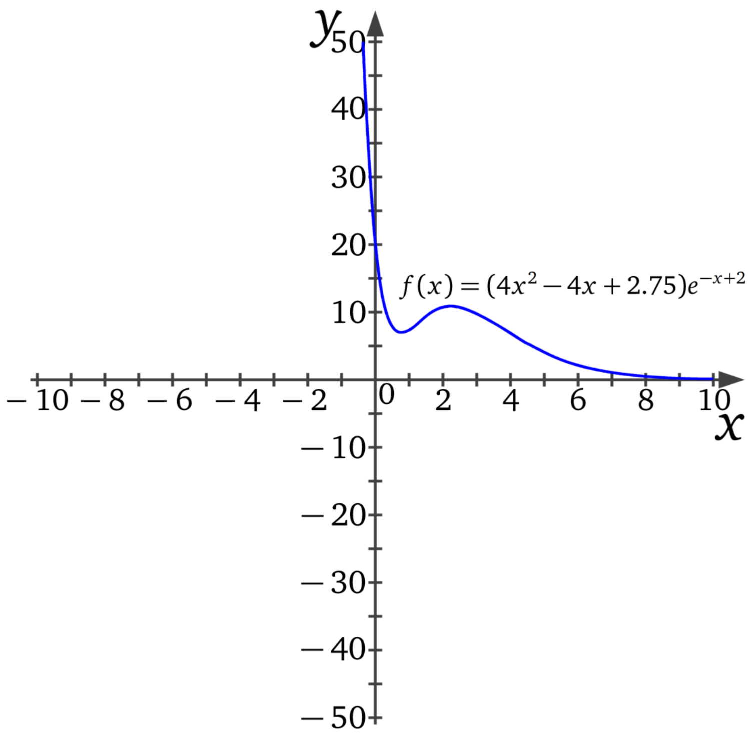
Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (4x^2 - 4x + 2.75)e^{-x+2} \\
f'(x) &= (-4x^2 + 12x - 6.75)e^{-x+2} \\
f''(x) &= (4x^2 - 20x + 18.75)e^{-x+2} \\
f'''(x) &= (-4x^2 + 28x - 38.75)e^{-x+2}
\end{aligned}
$$

Die Extrema liegen bei $TP(0.75|6.98)$ und $HP(2.25|10.9)$. Die Wendepunkte sind $WP_1(1.25|8.47)$ und $WP_2(3.75|7.65)$. Es gibt eine Asymptote, die die x-Achse repräsentiert, also $y = 0$. Es gilt weiter:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Es gibt nur einen Schnittpunkt mit einer Achse, der y-Achse, bei $f(0) = 20.32$. Es gibt keine Nullstellen. Die Funktion ist im Bereich $(-\infty; 0.75]$ streng monoton fallend, im Bereich $[0.75; 2.25]$ streng monoton steigend und im Bereich $[2.25; \infty)$ streng monoton fallend.



Aufgabe 2

Da es um einen Zylinder geht, brauchen wir die Formeln für Volumen und Oberfläche eines Zylinders:

$$V = \pi r^2 h, \ O = 2\pi r(r + h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Da wir die minimale Oberfläche suchen, brauchen wir eine Funktion, die Oberfläche als Funktionswert liefert. Die Oberflächenformel erfüllt dies, hängt allerdings vom Radius und von der Höhe ab, d.h. hat zwei Variablen. Eine muss eliminiert werden, und zwar mit der Volumenformel. Wir entscheiden uns für h, da mit der Eliminierung von r die Funktion deutlich komplizierter wird, was man sich leicht überlegen kann. Wir stellen die Formel also nach h um:

$$V = \pi r^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Eingesetzt in die Oberflächenformel ergibt das

$$O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + 2V r^{-1}.$$

Um die minimale Oberfläche zu bestimmen, müssen wir Extrema berechnen. Dafür brauchen wir die erste und die zweite Ableitung:

$$O'(r) = 4\pi r - 2V r^{-2} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$
$$O''(r) = 4\pi + 4V r^{-3} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

Für die notwendige Bedingung muss man die Nullstellen der ersten Ableitung berechnen:

$$O'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 - 2V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 = 2V$$

$$\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{2V}{4\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Für die hinreichende Bedingung muss $O''(r) \neq 0$ überprüft werden:

$$O''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} = 4\pi + \frac{4V \cdot 2\pi}{V} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad TP$$

Mit der nach h umgestellten Volumenformel berechnen wir:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Wir können erkennen, dass $h = 2r$ gilt:

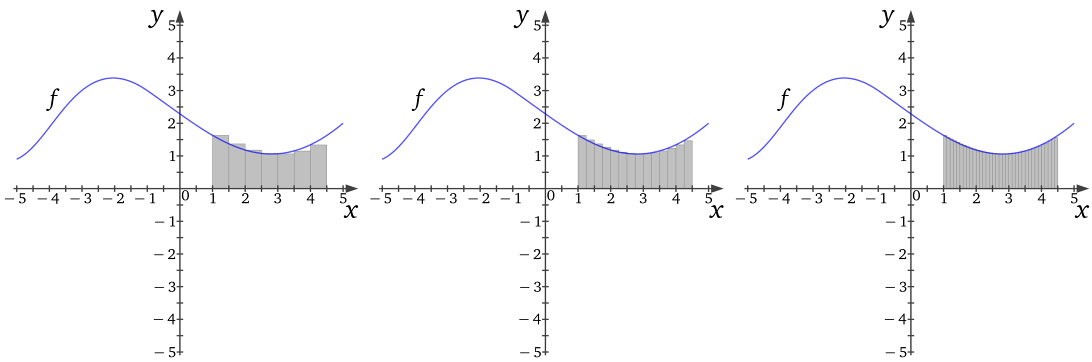
$$2r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = h.$$

Mit dem Wissen, dass $1\text{L} \mathrel{\hat{=}} 1000\text{ml} \mathrel{\hat{=}} 1000\text{cm}^3$ gilt, können wir mit dem Taschenrechner $r \doteq 5.42\text{cm}$ und $h \doteq 10.84\text{cm}$ berechnen. Mit der Oberflächenformel erhält man die minimale Oberfläche $O \doteq 553.58\text{cm}^2$.

Lernmodul 5, Kapitel 2.2

Flächeninhalt kurvenbegrenzter Gebiete

Bei der Integralrechnung geht es um Bestimmung des Flächeninhalts zwischen einem Funktionsgraphen einer stetigen Funktion f (eine Funktion heißt **stetig**, wenn sie keine Sprünge, Polstellen oder Lücken hat, also in einem Zug ohne abzusetzen gezeichnet werden kann) und der x-Achse innerhalb vorgegebener Grenzen auf der x-Achse. Wir versuchen, die Fläche zu bestimmen bzw. anzunähern, indem wir sie in kleine Streifen schneiden, von denen jeder als ein Rechteck aufgefasst wird, mit den Seitenlängen „Breite des Streifens“ und „Funktionswert der Funktion f an der Stelle des Streifens“. Dieses Rechteck ist nur annähernd der Flächeninhalt unter dem Graphen im Bereich des Streifens. Wenn wir aber die Breite der Streifen sukzessive verkleinern, nähern wir uns dem tatsächlichen Flächeninhalt immer mehr. Nehmen wir an, wir wollen den Flächeninhalt unter dem Graphen in einem bestimmten Bereich bestimmen, dann können wir die Verkleinerung der Streifen erreichen, indem wir den Bereich in n gleiche Teile teilen und n sukzessive vergrößern. Der tatsächliche Flächeninhalt ist also der Grenzwert für $n \to \infty$. Auf diese Weise können wir also den Flächeninhalt unter dem Graphen einer beliebigen stetigen Funktion in vorgegebenen Grenzen bestimmen.



Man kann zeigen, dass es wieder Regeln gibt, mit deren Hilfe man eine neue Funktion erzeugt, mit der die Fläche unter dem Graphen in vorgegebenen Grenzen berechnet werden kann. Diese Funktion nennt man **Stammfunktion** von f und bezeichnet sie mit F. Den Prozess der Erzeugung von F aus f nennt man „**integrieren**“ oder „**Integration**“. Für die Integration einer Funktion f wird ein Zeichen verwendet, um zu zeigen, dass man integriert — das **Integral**-Zeichen. Es gibt zwei Arten von Integralen, das **unbestimmte** und das **bestimmte**. Das unbestimmte Integral ist das Integral ohne Grenzen und das Ergebnis ist einfach eine Stammfunktion. Das bestimmte Integral ist das Integral in vorgegebenen Grenzen und das Ergebnis ist eine Zahl, dessen Bedeutung die Fläche unter dem Graphen ist. Berechnet wird diese Zahl mit einer Formel, die eine Stammfunktion verwendet: $F(b) - F(a)$. Hierbei sind a die untere (kleinere) und b die obere (größere) Grenzen. Diese Formel heißt der **Hauptsatz der Integralrechnung**. Geschrieben werden Integrale folgenderweise. Zuerst das unbestimmte:

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Das bestimmte ist etwas komplizierter:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Wichtig zu erwähnen wäre noch, dass Flächen unterhalb der x-Achse negatives Vorzeichen haben, oberhalb sind sie positiv. Es gibt wieder eine Reihe von Funktionen, von denen die Stammfunktionen gemerkt werden müssen. Für alle anderen zusammengesetzten Funktionen werden Regeln verwendet. Wir haben ja schon Regeln für Ableitungen kennen gelernt. Das Integral ist übrigens die Umkehrung der Ableitung, allerdings nicht eindeutige, denn eine konstante Funktion wird ja zu 0 abgeleitet, deswegen muss beim Integral immer eine frei wählbare Konstante addiert werden. Im übrigen haben die Ableitungsregeln natürlich Integrationsregeln zur Folge. Genauer, jede Ableitungsregel hat als Umkehrung eine Integrationsregel.
Die **Summenregel** überträgt sich unkompliziert auf Integrale:

$$\int u(x) + v(x)\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx.$$

Die **Faktorregel** überträgt sich ähnlich:

$$\int c \cdot u(x)\,dx = c \cdot \int u(x)\,dx.$$

Die **Potenzregel** ist schon etwas komplizierter. In Worten war es ja so: man nimmt den Exponenten und multipliziert den Koeffizienten damit, den Exponentnen verkleinert man danach um 1. Beim Integral geht man rückwärts vor und macht das Gegenteil. Statt um 1 zu verringern, erhöht man den Exponenten zuerst um 1 und teilt den Koeffizienten dann durch den neuen Exponenten:

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}.$$

Die **partielle Integration** erhält man, indem man die Produktregel für Ableitungen integriert. Es gibt zwei Versionen:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx,$$
$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx.$$

Die schwierigste Integration ist **Integration durch Substitution**. Sie folgt aus der Kettenregel und um Übersicht zu behalten, substituiert (also ersetzt) man die innere Funktion aus der Kettenregel durch eine neue Variable (bevorzugt wird z, also $z = v(x)$). Das schwierige ist, die innere Funktion samt seiner Ableitung in der gegebenen Funktion zu erkennen, mit der Struktur, wie sie von der Kettenregel bekannt ist.

$$\int u'(v(x)) \cdot v'(x)\,dx = \int u'(z)\,dz = u(z) = u(v(x)).$$

Da Integration die Umkehrung der Ableitung ist, können wir die Stammfunktion auch so definieren: Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** einer Funktion f, genau dann, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Dies ist eine wichtige Definition, denn wenn man zeigen muss, dass eine bestimmte Funktion F Stammfunktion einer gegebenen Funktion f ist, so braucht man nicht f zu integrieren und mit F zu vergleichen, sondern nur F' zu bilden und mit f zu vergleichen.

Übungen

Aufgabe 1

Integrieren Sie folgende Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \ln x \\
f_2(x) &= \sin^2 x \\
f_3(x) &= \sin x \cos x
\end{aligned}
$$