Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 20.10.2003

1. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 27.10.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Geben Sie ein Ideal I an, das zwei windschiefe Geraden im $\mathbb{C}^3$ bestimmt. Geben Sie ein geometrisches Argument dafür an, dass I kein Polynom vom Grad 1 enthält.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass das **kartesische Blatt**, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, eine rationale Parametrisierung besitzt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen algebraische Varietäten sind:

(i) **Die spezielle lineare Gruppe**

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

(ii) **Der komplexe Torus**

$$\mathbb{T}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \mid \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \neq 0\}$$

Aufgabe 4: Sind die folgenden Mengen algebraische Varietäten?

(i) $M_1 := \{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $M_2 := \{(t, \cos t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 27.10.2003

2. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 03.11.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass das Radikal eines Ideals wieder ein Ideal ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass es keine minimalen Ideale im Ring $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ gibt, wohl aber minimale Primideale und charakterisieren Sie diese geometrisch.

Aufgabe 3: Sei $V = V(I) \subset \mathbb{C}^3$ definiert durch das Ideal $I = (x^2 - yz, xz - x)$. V kann als Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ dargestellt werden. Bestimmen Sie die V_i und $I(V_i)$ und zeigen Sie deren Irreduzibilität.

Aufgabe 4: Der Ring der trigonometrischen Polynome ist die Menge der Funktion, die sich als $\mathbb{C}$-Linearkombinationen von Funktionen $\cos^n\phi \sin^m\phi$ schreiben lassen. Zeigen Sie, dass der Körper der trigonometrischen Funktionen,

$$K_{\text{trig}} := \left\{ \frac{p}{q} \mid q \neq 0,\ p \text{ trigonometrisches Polynom} \right\},$$

d.h. der Körper der rationalen Funktionen in $\sin\phi$ und $\cos\phi$, isomorph zum Körper $\mathbb{C}(t)$ der rationalen Funktionen ist.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 03.11.2003

3. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 10.11.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Dabei sind R, S Ringe, I ein Ideal in R und $\pi : S \to R$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(i) Jedes Primideal ist ein Radikalideal.

(ii) I ist Radikalideal in R genau dann, wenn R/I ein reduzierter Ring ist.

(iii) I ist Radikalideal in R genau dann, wenn das Urbild $\pi^{-1}(I)$ ein Radikalideal in S ist.

Aufgabe 2: Es sei $X = \{P_1, \ldots, P_n\} \subset \mathbb{C}^m$ eine Menge mit n verschiedenen Punkten. Bestimmen Sie den Koordinatenring $\mathbb{C}[X]$.

Aufgabe 3: Es seien $f, g : Z \to W$ polynomiale Abbildungen zwischen zwei affinen Varietäten. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Diag}(f, g) := \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von Z ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass das Bild einer polynomialen Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ nicht in jedem Fall eine algebraische Menge ist. Was vermuten Sie für polynomiale Abbildungen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$?

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 10.11.2003

4. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 17.11.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Es sei $V \subset \mathbb{C}^2$ die durch $x^2 + y^2 = 1$ gegebene Quadrik auf $f \in K(V)$ die rationale Funktion, welche durch $\frac{1-y}{x}$ bestimmt ist. Geben Sie den Definitionsbereich von f an und entscheiden Sie, ob $f \in K[V]$ gilt.

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass die Hyperbel
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = 1\}$$
nicht isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3: Gegeben sei eine rationale Funktion $f \in K(\mathbb{C}^2)$ mit einem Definitionsbereich, der $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ enthält. Zeigen Sie, dass dann $f \in K[\mathbb{C}^2]$ gilt. Nutzen Sie die Tatsache, dass $K[\mathbb{C}^2]$ ein faktorieller Ring ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologie auf den beiden Faktoren ist.

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 17.11.2003

5. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 24.11.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Sei X das Achsenkreuz in $\mathbb{C}^2$, $x = \{(x,y) \mid xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass der lokale Ring von X in einem Punkt $(0,u)$, $u \neq 0$, isomorph zu $\mathbb{C}[t]_{(t)}$ ist, also zum lokalen Ring einer Geraden.

(D.h. der lokale Ring in $(0,u)$ ist unempfindlich gegen die Existenz der Komponente $y = 0$.)

Aufgabe 2: Sei $X = \{(x,y) \mid y^2 - x^3 - x^2 = 0\}$ eine Kubik mit Doppelpunkt. Zeigen Sie, dass der lokale Ring von X im Nullpunkt ein Integritätsring ist.

(D.h. der lokale Ring eignet sich zum Nachweis der Irreduzibilität von X.)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die quasiaffine Varietät $X = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,0)\}$ zu keiner affinen Varietät isomorph ist. Sie können mit dem Hilbertschen Nullstellensatz argumentieren.

Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgenden reellen Quadriken Q_i und den jeweils zugehörigen projektiven Abschluss $\overline{Q}_i$:

$$Q_1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{(Kreis)},$$
$$Q_2 = \{x^2 - y^2 = 1\} \qquad \text{(Hyperbel)},$$
$$Q_3 = \{x^2 - y = 0\} \qquad \text{(Parabel)}.$$

Skizzieren Sie die Q_i, bestimmen Sie die Schnittmenge der $\overline{Q}_i$ mit der Geraden im Unendlichen, und zeigen Sie, dass die $\overline{Q}_i$ durch projektive Koordinatentransformationen ineinander übergeführt werden können.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 24.11.2003

6. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 01.12.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Sei X die durch $x_0x_2 = x_1^2$ in $\mathbb{P}^2$ definierte Varietät. Bestimmen Sie $\mathrm{dom}(f)$ für die rationale Funktion $f = \frac{x_0}{x_1}$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie für einen graduierten Ring S:

(i) Ein Ideal I ist homogen genau dann, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

(ii) Ein homogenes Ideal I ist genau dann ein Primideal, falls für je zwei homogene Elemente $f, g \in I$ gilt: Ist $fg \in I$, so ist $f \in I$ oder $g \in I$.

(iii) Summe, Produkte, Durchschnitte und Radikale von homogenen Idealen sind wieder homogene Ideale.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^2, \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) ϕ ist wohl definiert,

(ii) das Bild Y von ϕ ist eine projektive Varietät,

(iii) die homogenen Koordinatenringe von $\mathbb{P}^1$ und Y sind nicht isomorph.

(Die letzte Aussage verwundert vielleicht, da ϕ ein Isomorphismus ist.)

Aufgabe 4: Gegeben seien Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$. Geben Sie eine Zahl $d_0 = d_0(n)$ mit folgender Eigenschaft an: Für alle $d \geq d_0$ gibt es eine projektive Varietät $C \subset \mathbb{P}^2$ beschrieben durch ein homogenes Polynom vom Grad d, welche die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ enthält.

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 01.12.2003

7. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 08.12.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass jeder Morphismus $f : X \to Y$ einer projektiven Varietät in eine affine Varietät konstant ist, d.h. X auf einen Punkt abbildet.

Aufgabe 2: Es seien f_k bzw. f_{k-1} teilerfremde homogene Polynome vom Grad k bzw. $k-1$ in n Variablen. Zeigen Sie, dass die Varietät

$$X = \{(x_0 : ... : x_n) \mid f_k(x_1,...,x_n) + x_0 f_{k-1}(x_1,...,x_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

eine rationale Varietät ist.

Aufgabe 3: Gegeben seien die folgenden singulären ebenen Kurven in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$:

(i) $x^2 + y^n = 0$, $n \geq 2$,

(ii) $x^3 + y^4 = 0$,

(iii) $x^3 + y^5 = 0$.

Bestimmen Sie das Urbild dieser Kurven unter der Aufblasung $\pi : \widetilde{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die singulären Punkte der **Steinerschen Fläche**

$$\{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - xyzw = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 08.12.2003

8. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 15.12.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die $a \in \mathbb{C}$, für welche die Kurve
$$x^3 + y^3 + z^3 + a(x + y + z)^3 = 0$$
im $\mathbb{P}^2$ singuläre Punkte besitzt. Geben Sie die singulären Punkte an. Ist die Kurve reduzibel?

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass eine ebene Kurve mit drei singulären Punkten in drei Geraden zerfällt.

Aufgabe 3: Widerlegen Sie die folgenden Aussagen für Varietäten X,Y durch Gegenbeispiele:

(i) Sind X und Y nicht singulär, so auch $X \cup Y$.

(ii) Sind X und Y singulär, so auch $X \cap Y$.

(iii) Sind X und Y nicht singulär, so auch $X \cap Y$.

Aufgabe 4: Gegeben sei der Morphismus
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^3, \\ t &\mapsto (t^3 : t^4 : t^5). \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $X = \phi(\mathbb{C})$ eine algebraische Kurve ist und berechnen Sie den Tangentialraum T_0X von X im Nullpunkt. Schließen Sie damit, dass X nicht zu einer Kurve in $\mathbb{C}^2$ isomorph ist.

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 15.12.2003

9. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 05.01.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Beweisen Sie, dass jede irreduzible ebene Kubik einen Wendepunkt besitzt.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Schnittmultiplizitäten der folgenden Paare von Parabeln im Unendlichen:
(i) $y = x^2$ und $y = x^2 + 1$,
(ii) $y = x^2$ und $y = (x+1)^2$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die ebene Kurve $C = \{x_0^3 - x_1^2 x_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Bestimmen Sie die Schnittmultiplizität mit den Kurven D_1, D_2 im Punkt $(0:0:1)$.
(i) $D_1 = \{x_0^3 - x_0^2 x_2 + x_1^2 x_2 = 0\}$,
(ii) $D_2 = \{x_0^3 + x_0^2 x_2 + x_1^2 x_2 = 0\}$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass es zu 9 Punkten $P_1,\dots,P_9 \in \mathbb{P}^2$ stets eine Kubik C gibt, die $P_1,\dots,P_9$ enthält. Ist C eindeutig bestimmt?

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 05.01.2004

10. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 12.01.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Gegeben seien die folgenden ebenen komplexen Kubiken:

Bestimmen Sie jeweils eine Weierstraß-Form und berechnen Sie die J-Invariante.

Aufgabe 2: Berechnen Sie für eine glatte Kubik in Legendre-Form $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ die J-Invariante.

Ist C eine ebene glatte Kubik in Weierstraß-Form, so ist der Punkt $O = (0:0:1)$ ein Wendepunkt und C trägt die in der Vorlesung beschriebene Gruppenstruktur mit O als neutralem Element. Ein n-Torsionspunkt auf C ist dann definiert als ein Punkt P mit $nP = \underbrace{P + ... + P}_{n\text{-mal}} = O$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die 2-Torsionspunkte für eine glatte Kubik in Weierstraß-Form.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass für die Punkte P auf einer glatten Kubik C in Weierstraß-Form gilt:

> P ist 4-Torsionspunkt genau dann, wenn die Tangente an C in P einen 2-Torsionspunkt von C enthält.

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 12.01.2004

11. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 19.01.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Finden Sie die Gleichung für 27 Geraden auf der **Fermatkubik**
$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 .$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass alle Geraden auf der Kubik S reell sind, falls gilt
$$S = \{ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 \} .$$
(Eine Gerade im komplex projektiven Raum heißt reell, wenn ihre Gleichungen nur reelle Koeffizienten besitzt.)

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den singulären Ort der **Cayley Kubik**
$$\{ x_0x_1x_2 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_1x_2x_3 \} \subset \mathbb{P}^3 .$$

Aufgabe 4: Sei S eine irreduzible kubische Fläche in $\mathbb{P}^3$. Zeigen Sie, dass S rational ist, falls S singulär ist und höchstens endlich viele Geraden enthält.

UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 19.01.2004

12. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 26.01.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grad der Abbildung $C \to \mathbb{P}^1$, die durch die Projektion vom Punkt $P = (0:1:0)$ induziert wird, für die Kurven C, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

(i) $zx - y^2 = 0$,

(ii) $zy^2 - x^3 - z^2x = 0$,

(iii) $zg(x,y,z) + xh(x,y,z) = 0$, wobei g, h homogen vom Grad d sind.

Aufgabe 2: Es sei O Wendepunkt auf einer glatten elliptischen Kurve C und $\pi_O : C \to \mathbb{P}^1$ die Projektion von C vom Punkt O auf $\mathbb{P}^1$.

(i) Bestimmen Sie den Grad d von π_O.

(ii) Bestimmen Sie alle Punkte Q in $\mathbb{P}^1$, für die $\#\{\pi_O^{-1}(O)\} \neq d$ ist.

Aufgabe 3: Definieren Sie Divisoren und Hauptdivisoren auch für quasiprojektive Kurven und zeigen Sie, dass auf $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ jeder Divisor ein Hauptdivisor ist.

Aufgabe 4: Beweisen Sie, dass es eine glatte affine Kurve C und einen Divisor D auf C gibt, der nicht Hauptdivisor ist.

Universität Hannover
Institut für Mathematik
Prof.Dr. K. Hulek, Dr. M. Lönne, Hannover, 26.01.2004

13. Aufgabenblatt zur Algebra II

Abgabe: Mo 02.02.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Es bezeichne C die durch $y^2z - x^3 + xz^2 = 0$ gegebene glatte Kurve in $\mathbb{P}^2$, $P_1,\dots,P_r$ seinen Punkte auf C. Zeigen Sie, dass es eine rationale Funktion f auf C gibt, die in $P_1,\dots,P_r$ Pole besitzt und sonst regulär ist.

Aufgabe 2: Gegeben sei die projektive Varietät

$$C = \{x_0^2 - x_0x_2 - x_1x_3 = x_1x_2 - x_0x_3 - x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Projektion vom Punkt $(0:0:0:1)$ auf die Ebene $\{x_3 = 0\}$, dass C isomorph zu einer glatten ebenen Kubik ist.

Aufgabe 3: Es sei $C \subset \mathbb{P}^3$ eine glatte, irreduzible Kurve vom Grad 3, die nicht in einer Hyperebene enthalten ist (d.h. jede Hyperebene schneidet C in einem Divisor vom Grad 3). Zeigen Sie, dass C rational ist.

Aufgabe 4: Es sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad 4. Zeigen Sie,

(i) dass C höchstens drei Singularitäten hat. (Betrachten Sie dazu Kegelschnitte durch die Singularitäten.)

(ii) dass höchstens zwei der Singularitäten von C auf einer Geraden liegen.