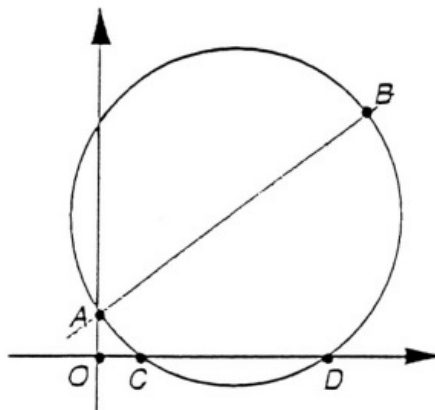


1. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 23.10.2002 in der Vorlesung

- Aufgabe 1:** Gegeben sei eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$. Beweisen Sie, dass dann für $z_1, z_2 \in M, z_2 \neq 0$ gilt: $\frac{z_1}{z_2} \in \hat{M}$.
- Aufgabe 2:** Beweisen Sie, dass zu einem festen $d \in \mathbb{Z}$ die Menge $K := \{r + s\sqrt{d} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$ einen Unterkörper von \mathbb{C} bildet.
- Aufgabe 3:** Finden Sie eine Konstruktionsvorschrift für $\sqrt[4]{2}$.
- Aufgabe 4:** Betrachten Sie die folgende Konstruktion zur graphischen Lösung von allgemeinen quadratischen Gleichungen (vgl. Zeichnung):

Gegeben seien die beiden Punkte $A = (0, 1)$ und $B = (a, b)$ in der Ebene. Zeichnen Sie den Kreis, der A und B als diametral gegenüberliegende Punkte enthält. Mit C und D seien die Schnittpunkte des Kreises mit der x -Achse bezeichnet (sofern sie existieren).



- (a) Zeigen Sie, dass diese Konstruktion als eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal im Sinne der Vorlesung durchführbar ist.
- (b) Beweisen Sie, dass im Falle $a^2 > 4b$ der Kreis die x -Achse in genau zwei Punkten schneidet, wobei die Längen der Strecken OC und OD die quadratische Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ lösen. Was passiert im Falle $a^2 \leq 4b$?
- (c) Wenden Sie dieses Verfahren zur Konstruktion der reellen positiven Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ an.

2. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 30.10.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Grade von Körpererweiterungen:

- (a) $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbf{Q}]$
- (b) $[\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt[3]{3}) : \mathbf{Q}]$

Aufgabe 2: Jede Körpererweiterung von Primzahlgrad ist einfach. (Sie besitzt keinen Zwischenkörper.)

Aufgabe 3: Die algebraische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mit rationalen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbf{Q}$ besitze $2 + \sqrt{3}$ als Lösung. Zeigen Sie, dass es dann auch eine rationale Lösung der Gleichung geben muss. ($\sqrt{3}$ ist irrational!)

Aufgabe 4: Es sei L ein Körper und L_1, L_2 seien Unterkörper von L . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt einen Unterkörper L' von L mit $L_1, L_2 \subset L'$, der in jedem Unterkörper von L enthalten ist, der L_1, L_2 enthält. Man schreibt $L' = L_1 \cdot L_2$.
- (b) Es gilt $L_1 \cdot L_2 = L_1(L_2)$, d.h. $L_1 \cdot L_2$ entsteht aus L_1 durch Adjunktion der Elemente von L_2 .
- (c) Ist K ein gemeinsamer Unterkörper von L_1 und L_2 und sind L_1 und L_2 algebraisch über K , so ist auch $L_1 \cdot L_2$ algebraisch über K und es gilt $[L_1 \cdot L_2 : K] \leq [L_1 : K][L_2 : K]$.

3. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 6.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Stellen Sie eine Multiplikationstabelle für die Gruppe der Einheiten in \mathbf{Z}_8 auf.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad höchstens 2 über \mathbf{Z}_3 .
Wieviele irreduzible Polynome vom Grad 3 gibt es?

Aufgabe 3: Es sei $f(X)$ ein normiertes Polynom in $\mathbf{Z}[X]$. Zeigen Sie:

- (a) Ist $x \in \mathbf{Q}$ eine Nullstelle von $f(X)$, so gilt sogar $x \in \mathbf{Z}$.
- (b) Ist $f(0)$ eine Primzahl, so besitzt $f(X)$ höchstens drei verschiedene rationale Nullstellen.

Aufgabe 4: Sei L eine algebraische Körpererweiterung von K , und es gelte $K \subset R \subset L$ mit einem Unterring R von L . Zeigen Sie, dass dann R ein Unterkörper von L und eine algebraische Körpererweiterung von K ist.

4. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 13.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen g.g.T. und schreiben Sie ihn als Linearkombination der Ausgangspolynome.

- (a) $X^4 - 3X^2 + X - 1$ und $X^2 + X - 1$,
- (b) $X^5 - X^4 + X^3 + X^2 + 2$ und $X^6 + X^3 + X + 1$,
- (c) $X^5 + X^4 - 12X^3 + 2X^2 + 2X - 24$ und $X^6 + X^5 + X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 2X + 2$.

Aufgabe 2: Die Eigenschaften eines Polynomringes $R[X]$ hängen stark von den Eigenschaften des Koeffizientenringes R ab:

- (a) Zeigen Sie, dass in $\mathbf{Z}_{10}[X]$ die Gradformel $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ nicht gilt.
- (b) Geben Sie ein nicht-konstantes Polynom in $\mathbf{Z}_9[X]$ an, welches Einheit ist.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie, ob die folgenden Ringe faktoriell sind, und beweisen Sie die zugehörige Behauptung:

- (a) $R_n := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ mit geradem $n \leq -4$,
- (b) $R_{10} := \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

Hinweise: $R_n = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ ist Unterring von \mathbf{C} . Man benutze, dass für die Abbildung $N : R_n \rightarrow \mathbf{Z}, a + b\sqrt{n} \mapsto a^2 - nb^2$ gilt:

- (a) $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für alle x, y aus R_n ,
- (b) x ist Einheit in R_n genau dann, wenn $N(x)$ Einheit in \mathbf{Z} ist.

Aufgabe 4: Betrachten Sie den Unterring $\mathbf{Z}_{(5)}$ von \mathbf{Q} , der aus den gekürzten Brüchen besteht, deren Nenner nicht durch 5 teilbar ist:

$$\mathbf{Z}_{(5)} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid p, q \text{ teilerfremd, } q \not\equiv 0(5) \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{Z}_{(5)}$ faktoriell ist.

5. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 20.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Beweisen Sie mit Hilfe des Eisensteinkriteriums die Irreduzibilität der folgenden Polynome:

- (a) $X^4 - 4X^2 + 2X + 3 \in \mathbf{Z}[X]$,
- (b) $aX^m + Y^n - 1 \in \mathbf{C}[X, Y]$ mit $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$.

Aufgabe 2: Man beweise die folgende Variante des Eisenstein-Kriteriums:

Sei R ein Integritätsring, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \in R[X]$ ein Polynom vom Grad n . Ist dann jeder gemeinsame Teiler der Koeffizienten eine Einheit in R und gibt es ein Primelement $p \in R$, welches a_1, \dots, a_n teilt, dessen Quadrat p^2 aber a_n nicht teilt, so ist f irreduzibel in $R[X]$.

Aufgabe 3: Der Ring $\mathbf{Q}[X]$ ist ein Hauptidealring. Für gegebene Polynome $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{Q}[X]$ ist $\{a_1f_1 + \cdots + a_rf_r \mid a_1, \dots, a_r \in \mathbf{Q}[X]\}$ ein Ideal von $\mathbf{Q}[X]$.

- (a) Wie bestimmt man einen Erzeuger für dieses Ideal?
- (b) Wie bestimmt man einen Erzeuger für das größte Ideal, das in sämtlichen Hauptidealen (f_k) , $k = 1, \dots, r$ enthalten ist?
- (c) Zeigen Sie, daß zwei Elemente genau dann assoziiert sind, wenn sie dasselbe Ideal erzeugen.

Aufgabe 4: Aus der Vorlesung wissen Sie: Sind R, S Integritätsringe, $\phi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und ist für jedes $r \in R - E(R)$ das Bild $\phi(r) \notin E(S)$, dann ist ein Element in R irreduzibel, wenn sein Bild irreduzibel in S ist.

- (a) Zeigen Sie die Irreduzibilität von $X_1^{n_1} \cdots X_k^{n_k} - 2 \in \mathbf{Q}[X_1, \dots, X_k]$ mit Hilfe eines geeigneten Ringhomomorphismus, falls $n_1 + \cdots + n_k > 0$.
- (b) Finde Sie Ringe R, S , einen Ringhomomorphismus $\phi : R \rightarrow S$ wie oben und ein irreduzibles $r \in R$ mit $\phi(r)$ nicht irreduzibel.

6. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 27.11.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass folgende Polynome irreduzibel in $\mathbf{Z}[X]$ sind, durch Betrachtung jeweils eines geeigneten Restklassenringes:

- (a) $X^3 + 2X^2 - 3X + 3$,
- (b) $X^4 + 3X^3 + X^2 - 2X + 1$.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Reduktionen von $f = X^4 - X^3 + 5X - 4 \in \mathbf{Z}[X]$ modulo 2 und modulo 3.

- (a) Zeigen Sie, dass das Bild von f in den Restklassenringen $\mathbf{Z}_2[X], \mathbf{Z}_3[X]$ nicht irreduzibel ist.
- (b) Zeigen Sie nur mit Hilfe der gegebenen Reduktionen, dass f in $\mathbf{Z}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3: Gegeben sei der Ring $R = \mathbf{Q}[X, Y]$. Zeigen Sie:

- (a) Der Ring R ist kein Hauptidealring (Das maximale Ideal $m = (X, Y)$ ist kein Hauptideal).
- (b) Für das Hauptideal $I = (X^2 - XY^2)$ ist der Restklassenring R/I kein Integritätsring.

Aufgabe 4: Gegeben seien zwei Ideal I, J in einem Ring R . Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von R Ideale in R sind:

- (a) $I \cdot J := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, m \in \mathbf{N} \right\}$,
- (b) $rad(I) := \{r \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbf{N} \text{ mit } r^n \in I\}$, das Radikal von I .

7. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 4.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Konstruieren Sie für jedes der folgenden Polynome in $\mathbf{Q}[X]$ den Zerfällungskörper K über \mathbf{Q} . Geben Sie auch jeweils $[K : \mathbf{Q}]$ und eine Basis von K über \mathbf{Q} an.

- (a) $X^2 - 4p$, p eine Primzahl,
- (b) $X^4 - 3$.

Aufgabe 2: Sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - 1 \in K[X]$ über K . Bestimmen Sie $[L : K]$ für $K = \mathbf{Z}_p$, $p = 2, 3, 5, 7$.

Aufgabe 3: Wählen Sie einen Körper K und geben Sie zwei nicht zueinander assoziierte Polynome $f, g \in K[X]$ an, so dass gilt:

$$K[X]/\langle f \rangle \cong K[X]/\langle g \rangle.$$

Aufgabe 4: Die Menge $L := \bar{\mathbf{Q}}$ der algebraischen Zahlen in \mathbf{C} ist ein algebraischer Abschluss von \mathbf{Q} . Sei $a \in L$, zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Aussagen gelten:

- (a) \bar{a} , die zu a komplex konjugierte Zahl, ist in L enthalten.
- (b) Real- und Imaginärteil, $Re(a)$, $Im(a)$, sind in L enthalten.
- (c) Der Betrag, $|a|$, ist in L enthalten.

Hinweis: Zum Beweis von (b),(c) verwende man (a).

BITTE DENKEN SIE DARAN, 50 CENT ZUR ÜBUNG AM MONTAG
MITZUBRINGEN!

8. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 11.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Sei α eine reelle Zahl mit $\alpha^4 = 3$. Zeigen Sie:

- (a) $i\alpha^2$ ist Nullstelle von $X^2 + 3 \in \mathbf{Q}[X]$,
 $\alpha + i\alpha$ ist Nullstelle von $X^4 + 12 \in \mathbf{Q}[X]$ und $X^2 - 2i\alpha^2 \in \mathbf{Q}(i\alpha^2)[X]$,
- (b) $\mathbf{Q}(i\alpha^2)$ ist normal über \mathbf{Q} ,
- (c) $\mathbf{Q}(\alpha + i\alpha)$ ist normal über $\mathbf{Q}(i\alpha^2)$,
- (d) $\mathbf{Q}(\alpha + i\alpha)$ ist nicht normal über \mathbf{Q} .

Aufgabe 2: Bestimmen Sie alle \mathbf{Q} -Homomorphismen $L \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}$ für $L = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$, und zeigen Sie damit, dass L/\mathbf{Q} separabel ist.

Aufgabe 3: L sei Erweiterungskörper von K mit $\text{char}(L) = \text{char}(K) = 2$ und $[L : K] = 2$. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt $\alpha \in L$ mit $\alpha \notin K$,
- (b) Gibt es $\alpha \in L$ mit $\alpha \notin K, \alpha^2 \in K$, so ist L über K nicht separabel,
- (c) Gibt es $\alpha \in L$ mit $\alpha \notin K, \alpha^2 + \alpha \in K$, so ist L über K separabel.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass jedes Polynom in $\mathbf{Z}_p[X]$ separabel ist. Man kann dazu wie folgt vorgehen:

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass für \mathbf{Z}_p der Frobenius-Homomorphismus injektiv und surjektiv ist,
- (b) führen Sie dann die Annahme, dass es ein irreduzibles inseparables Polynom in $\mathbf{Z}_p[X]$ gibt, zum Widerspruch,
- (c) und zeigen Sie schließlich, dass es kein inseparables Polynom geben kann.

9. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 18.12.2002 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Es seien $\alpha := i \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{3} \in \mathbf{C}$ und $L := \mathbf{Q}(\alpha)$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2} \in L$ und $e^{2\pi i/3} \in L$.
- (b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von α über \mathbf{Q} .

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über \mathbf{Q} isomorph zu $\mathbf{Q}[X]/(X^6 + 108)$ ist. **Hinweis:** Benutzen Sie Aufgabe 1!

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

- (a) $\mathbf{Q}(i, \sqrt[4]{3})$ ist galoisch über \mathbf{Q} ,
- (b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, p Primzahl, ist galoisch über \mathbf{Q} ,
- (c) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{p})$, p Primzahl, ist nicht galoisch über \mathbf{Q} .

Aufgabe 4: Sei L eine endliche Körpererweiterung von K und $G := G(L/K)$ die Automorphismengruppe von L über K . L_G bezeichne den Fixkörper von G . Man zeige:

- (a) L ist Galoiserweiterung von L_G mit $G(L/L_G) = G$.
- (b) L ist Galoiserweiterung von K genau dann, wenn $K = L_G$.

10. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 8.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Galoisgruppen der folgenden Polynome über \mathbf{Q} :

- (a) $X^3 + 14X + 1$,
- (b) $X^3 + 8X^2 + 13X - 6$.

Aufgabe 2: Es seien $\Sigma \subset \mathbf{C}$ der Zerfällungskörper von $X^4 - X^2 + 1$ und $G := G(\Sigma/\mathbf{Q})$. Berechnen Sie alle Untergruppen von G und deren Fixkörper.

Aufgabe 3: Es sei D_4 die Gruppe

$$D_4 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & e_3 \\ e_4 & 0 \end{array} \right) \mid e_1, e_2, e_3, e_4 = \pm 1 \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation.

Auf der Menge \mathcal{D} der Diagonalen des Quadrats

$$Q := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

operiert D_4 durch Drehungen und Spiegelungen. Schließlich bezeichne $d_0 \in \mathcal{D}$ die Diagonale von Q , die den Punkt $(1, 1)$ enthält.

- (a) Bestimmen Sie die Bahn \mathcal{B} von d_0 ,
- (b) Bestimmen Sie die Fixgruppe $H \subset D_4$ von d_0 .
- (c) Überprüfen Sie die Relation $|D_4| = |H| \cdot |\mathcal{B}|$.

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Gruppe D_4 aus Aufgabe 3 und ihre Untergruppen

$$V_4 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{array} \right) \mid e_1, e_2 = \pm 1 \right\}, \quad H_2 := \left\{ \left(\begin{array}{cc} e_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mid e_1 = \pm 1 \right\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) In D_4 ist V_4 Normalteiler.
- (b) In V_4 ist H_2 Normalteiler.
- (c) In D_4 ist H_2 kein Normalteiler.

11. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 15.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Klassifizieren Sie (bis auf Gruppenisomorphie) die abelschen Gruppen der Ordnung $8 \leq |G| \leq 12$. Wieviele Isomorphieklassen gibt es?

Aufgabe 2: Sei n eine positive natürliche Zahl. Zeigen Sie:

- (a) Genau dann ist 6 Teiler von n , wenn \mathbf{Z}_6 Untergruppe jeder abelschen Gruppe G der Ordnung $|G| = n$ ist.
- (b) Ist 4 Teiler von n , so gibt es eine abelsche Gruppe G der Ordnung n , die \mathbf{Z}_4 nicht als Untergruppe enthält.

Aufgabe 3: Sei $f = X^4 + aX^2 + b \in \mathbf{Q}[X]$ irreduzibel, dann ist die Galoisgruppe von f über \mathbf{Q} isomorph zu D_4 , \mathbf{Z}_4 oder $V_4 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

Aufgabe 4: Wieviele Untergruppen von S_5 sind 5-Gruppen?

Die Klausur zur Algebra I findet statt am 3.2.2003 in Raum F102,
Beginn 12 c.t., Dauer 3h.

12. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 22.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass eine Gruppe G dann auflösbar ist, wenn es einen Normalteiler N von G gibt, so dass N und G/N auflösbare Gruppen sind.

Aufgabe 3: Geben Sie alle natürlichen positiven Zahlen n an, für die Folgendes gilt:

Es gibt ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbf{Q}[X]$ von Grad n , dessen Galoisgruppe G isomorph zu S_3 ist.

Aufgabe 4: Es sei ζ eine primitive n -te Einheitswurzel in \mathbf{C} , wobei $n > 2$ gelte. Zeigen Sie, dass $[\mathbf{Q}(\zeta + \bar{\zeta}) : \mathbf{Q}] = \frac{1}{2}\phi(n)$ gilt.

**Die Klausur zur Algebra I findet statt am 3.2.2003 in Raum F102,
Beginn 12 c.t., Dauer 3h.**

13. Übungsblatt zur Algebra I

Abgabe: Mi 29.1.2003 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Kreisteilungspolynome Φ_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass der Körper $E_8(\mathbf{Q})$ der achten Einheitswurzeln eine quadratische Erweiterung von $\mathbf{Q}(i)$ ist.

Aufgabe 3: L/K sei galoisch mit Galoisgruppe G . Z sei Zwischenkörper. Zeigen Sie:

$$Z/K \text{ galoisch} \iff |G(Z/K)| = |G : G_Z|.$$

Aufgabe 4: Es sei G die Galoisgruppe von $f(X) := X^{10} + X^5 + 1$ über \mathbf{Q} .

- (a) Berechnen Sie die komplexen Nullstellen von f .
- (b) Ist G auflösbar?
- (c) Bestimmen Sie die Ordnung von G . (Achtung: f ist reduzibel!)

**Die Klausur zur Algebra I findet statt am 3.2.2003 in Raum F102,
Beginn 12 c.t., Dauer 3h.**