Analysis III

Wintersemester 2003/2004

W. Ebeling

1 Integration von Treppenfunktionen

Wir wollen nun das Integral für Funktionen einführen, die auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Dabei wollen wir gleich einen allgemeineren Integralbegriff betrachten als den aus Analysis I bekannten. Wir wollen nämlich

- auch unbeschränkte Funktionen integrieren
- Limesbildung und Integration auch bei nicht gleichmäßiger Konvergenz vertauschen können.

Der geeignete Integralbegriff dazu ist der Begriff des *Lebesgue-Integrals*.

Diesen Begriff wollen wir nun einführen. Wir werden dazu analog zu der Einführung des Integrals einer stetigen Funktion auf einem kompakten Intervall in Analysis I vorgehen. Die entscheidenden Schritte sind

(1) Definition des Integrals einer Treppenfunktion.

(2) Approximation einer gegebenen Funktion f durch eine Folge von Treppenfunktionen.

(3) Definition des Integrals von f als Grenzwert der Integrale einer approximierenden Folge von Treppenfunktionen.

Wir beginnen nun mit Schritt (1). Eine Treppenfunktion in Analysis I war eine Funktion einer Veränderlichen, die konstant auf Intervallen war. Wir übertragen nun den Begriff des Intervalls auf den $\mathbb{R}^n$.

In $\mathbb{R}$ kennen wir folgende Intervalle:

- Beschränkte Intervalle: $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} &(a,b) \quad \text{(offen)} \\ &[a,b), (a,b] \quad \text{(halboffen)} \\ &[a,b] \quad \text{(abgeschlossen)} \end{aligned}$$

- Unbeschränkte Intervalle:

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Mit eingeschlossen ist dabei die leere Menge:

$$\emptyset = (a,b) = [a,b) = (a,b] \text{ für } a = b.$$

Definition Ein *Quader* $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist das kartesische Produkt

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \in I_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

von n beschränkten Intervallen aus $\mathbb{R}$. Ein Quader heißt *leer*, wenn eins der Intervalle leer ist. Ein nicht leerer Quader heißt *ausgeartet*, wenn eins der Intervalle zu einem Punkt entartet ist.

Man skizziere den Fall $n = 2$!

Satz 1.1 *Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Quadern ist ein Quader.*

Beweis. Dieser Satz gilt in $\mathbb{R}$: als unteren Eckpunkt nimmt man das Supremum aller unteren Eckpunkte, als oberen Eckpunkt das Infimum aller oberen Eckpunkte. Damit gilt der Satz koordinatenweise und damit auch für Quader des $\mathbb{R}^n$. □

Die Vereinigung von Quadern ist dagegen im Allgemeinen kein Quader (Beispiel?).

Definition Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zulässig*, wenn es paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_r$ gibt, so dass $M = \bigcup_{k=1}^r Q_k$.

Satz 1.2 *Sind M und N zulässige Mengen, so ist auch ihr Durchschnitt $M \cap N$ eine zulässige Menge.*

Beweis. Da M und N zulässig sind, gibt es Quader P_1, ..., P_r und Q_1, ..., Q_s, so dass

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{k=1}^{r} P_k, \quad P_k \cap P_l = \emptyset, \quad k \neq l, \\ N &= \bigcup_{m=1}^{s} Q_m, \quad Q_m \cap Q_n = \emptyset, \quad m \neq n. \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$M \cap N = \left(\bigcup_{k=1}^{r} P_k \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{s} Q_m \right) = \bigcup_{k,m} (P_k \cap Q_m).$$

Die Quader $P_k \cap Q_m$ sind paarweise disjunkt, denn

$$\begin{aligned} & (P_k \cap Q_m) \cap (P_l \cap Q_n) \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad & P_k \cap P_l \neq \emptyset \text{ und } Q_m \cap Q_n \neq \emptyset \\ \Rightarrow \quad & k = l \text{ und } m = n. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.1 *Sind die Mengen $M_1, \dots, M_r$ zulässig, so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^r M_k$ zulässig.*

Beweis. durch vollständige Induktion nach r. □

Satz 1.3 *Die Differenz $Q \setminus Q'$ zweier Quader Q und Q' des $\mathbb{R}^n$ ist eine zulässige Menge.*

Beweis. ($n = 2$) Es sei $Q = I \times J$ und $Q' = I' \times J'$. Dann gibt es paarweise disjunkte Intervalle I_0, I_1, $I_2 \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$I \setminus I' = I_1 \cup I_2, \quad I \cap I' = I_0.$$

Analog gibt es paarweise disjunkte Intervalle J_0, J_1, $J_2 \subset \mathbb{R}$ mit

$$J \setminus J' = J_1 \cup J_2, \quad J \cap J' = J_0.$$

Wegen $I = (I \setminus I') \cup (I \cap I')$ gilt

$$I = I_0 \cup I_1 \cup I_2.$$

Analog gilt

$$J = J_0 \cup J_1 \cup J_2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Q &= I \times J = \bigcup_{k,l} I_k \times J_l, \\ Q \cap Q' &= (I \cap I') \times (J \cap J') = I_0 \times J_0, \\ Q \setminus Q' &= Q \setminus (Q \cap Q') = \bigcup_{(k,l) \neq (0,0)} I_k \times J_l. \end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, dass die rechts vereinigten Mengen paarweise disjunkt sind. □

Satz 1.4 *Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zulässige Menge, dann ist auch $Q \setminus M$ zulässig.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots,$ Q_r, so dass $M = \bigcup_{k=1}^r Q_k$. Es gilt nun

$$Q \setminus M = Q \setminus \bigcup_{k=1}^r Q_k = \bigcap_{k=1}^r (Q \setminus Q_k).$$

Nach Satz 1.3 sind die Mengen $Q \setminus Q_k$ zulässig, nach Korollar 1.1 damit auch $Q \setminus M$. □

Satz 1.5 *Sind die Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ zulässig, so ist auch die Menge $M \setminus N$ zulässig.*

Beweis. Da ein Quader beschränkt ist, ist auch M beschränkt, also in einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ enthalten. Es gilt

$$M \setminus N = M \cap (Q \setminus N).$$

Nach Satz 1.4 ist $Q \setminus N$ und nach Satz 1.2 damit auch $M \cap (Q \setminus N)$ zulässig. □

Satz 1.6 *Sind die Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ zulässig, so ist auch die Menge $M \cup N$ zulässig.*

Beweis. Es ist $M \cup N = (M \cap N) \cup (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ und die rechts stehenden Mengen sind paarweise disjunkt. Der Satz folgt damit aus Satz 1.2 und Satz 1.5 (wie?). □

Korollar 1.2 *Sind die Mengen $M_1, \ldots, M_r$ zulässig, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{k=1}^r M_k$ zulässig.*

Beweis. durch vollständige Induktion nach r. □

Definition Das *Volumen* $v(Q)$ des Quaders $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ ist das Produkt seiner Kantenlängen:

$$v(Q) := \lambda(I_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(I_n).$$

(Dabei ist $\lambda(I_j)$ die Länge des Intervalls I_j, vgl. Analysis I. Ein Intervall J mit den Eckpunkten a, b, $a \leq b$, hat die Länge $\lambda(J) = b - a$.)

Statt $v(Q)$ schreiben wir manchmal auch $v_n(Q)$.

Bemerkung 1.1 Ist Q ausgeartet, so gilt $v(Q) = 0$.

Definition Eine Funktion $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion* auf $\mathbb{R}^n$, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_r$ gibt, so dass gilt:

(i) t ist auf jedem Q_k, $k = 1, \ldots, r$, konstant.

(ii) $t(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^r Q_k$.

Die Menge aller Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$.

Satz 1.7 *Sind $t_1, \ldots, t_m$ Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$, so gibt es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_r$, so dass*

(i) t_i ist konstant auf Q_k für jedes i und k.

(ii) $t_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^r Q_k$ und jedes i.

Beweis. Es sei M_i die Vereinigung der Quader, auf denen die Treppenfunktion t_i konstant ist, $i = 1, \ldots, m$. Dann ist M_i zulässig. Nach Korollar 1.2 ist auch die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{m} M_k$ zulässig, also die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Quader $Q_1', \ldots, Q_{r'}'$. Indem wir die Durchschnitte mit den ursprünglichen Quadern bilden, erhalten wir ein System von Quadern mit den gewünschten Eigenschaften. □

Satz 1.8 *Für $s, t \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i) $s + t \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\lambda s \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $|s| \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Man wähle nach Satz 1.7 ein gemeinsames System von paarweise disjunkten Quadern für s und t. Auf diesen Quadern sind dann auch die Funktionen aus (i)–(iii) konstant. □

Korollar 1.3 *Die Menge $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.*

Definition Die *charakteristische Funktion* einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $1_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Bemerkung 1.2 Jede Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination von charakteristischen Funktionen von Quadern dargestellt werden:

$$t = \sum_{k=1}^{r} c_k 1_{Q_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

Umgekehrt ist jede solche Linearkombination eine Treppenfunktion ($Q_1, \ldots, Q_r$ brauchen dabei nicht paarweise disjunkt zu sein).

Definition Unter dem *Integral* einer Treppenfunktion $t = \sum_{k=1}^{r} c_k 1_{Q_k}$ versteht man die Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,dx := \sum_{k=1}^{r} c_k v(Q_k).$$

Satz 1.9 *Die Definition des Integrals hängt nicht von der Darstellung der Treppenfunktion ab.*

Beweis. Angenommen

$$t = \sum_{k=1}^{r} c'_k 1_{Q'_k} = \sum_{l=1}^{s} c''_l 1_{Q''_l}.$$

Nach Satz 1.7 gibt es paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_p$, so dass

$$t = \sum_{k=1}^{p} c_k 1_{Q_k}$$

und jedes Q'_j und Q''_i ist Vereinigung von gewissen Q_k. Es sei

$$Q'_j = \bigcup_{k \in I_j} Q_k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c'_j v(Q'_j) &= c'_j v\left(\bigcup_{k \in I_j} Q_k\right) = c'_j \sum_{k \in I_j} v(Q_k), \\ \sum_{j=1}^{r} c'_j v(Q'_j) &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k \in I_j} c'_j v(Q_k) = \sum_{k=1}^{p} c_k v(Q_k). \end{aligned}$$

Entsprechend folgt

$$\sum_{i=1}^{s} c''_i v(Q''_i) = \sum_{k=1}^{p} c_k v(Q_k).$$

□

Wir zeigen nun Eigenschaften dieses Integrals.

Satz 1.10 (Linearität) *Es seien $s, t \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} (s+t)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} s(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,dx.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \lambda s(x)\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} s(x)\,dx.$

Beweis. Übergang zu gemeinsamem System von Quadern für s und t, darauf ausrechnen, wie in Analysis I. □

Bemerkung 1.3 Dieser Satz besagt, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} dx$ eine Linearform $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist.

Satz 1.11 (Monotonie) *Sind $s, t \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ mit $s \leq t$, so ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,dx.$$

Beweis. Wie bei Satz 1.10, wobei zu beachten ist: $v(Q) \geq 0$ für jeden Quader Q. □

Korollar 1.4 *Für $t \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |t(x)|\, dx.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

2 Abzählbarkeit und Nullmengen

In der Lebesgueschen Integrationstheorie braucht man gewisse Mengen, die Nullmengen, nicht zu beachten im folgenden Sinne: Ändert man eine integrierbare Funktion auf einer Nullmenge ab, so ändert sich ihr Integral nicht. Bevor wir Nullmengen einführen, wollen wir noch einiges über die Abzählbarkeit von Mengen nachtragen.

Definition Eine nichtleere Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $M = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Eine nichtleere Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Beispiel 2.1 Beispiele für abzählbare Mengen: endliche Mengen, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

Satz 2.1 *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen M_k, $k \in \mathbb{N}$, ist wieder abzählbar.*

Beweis. Es sei $M_k = \{x_{kl} \,|\, l \in \mathbb{N}\}$. Wir schreiben die Elemente der Vereinigungsmenge $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ in einem quadratisch unendlichen Schema an:

$$\begin{tikzcd}
M_0 : & x_{00} \arrow[r] & x_{01} \arrow[dl] & x_{02} \arrow[r] & x_{03} \arrow[dl] & \cdots \\
M_1 : & x_{10} \arrow[d] & x_{11} \arrow[ur] & x_{12} \arrow[dl] & x_{13} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
M_2 : & x_{20} \arrow[ur] & x_{21} \arrow[dl] & x_{22} \arrow[ur] & x_{23} \arrow[dl] & \cdots \\
M_3 : & x_{30} \arrow[d] & x_{31} \arrow[ur] & x_{32} \arrow[dl] & x_{33} \arrow[ur] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Die Abzählungsvorschrift ist durch die Pfeile angedeutet und erfasst alle Elemente der Vereinigungsmenge. □

Korollar 2.1 *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *aller rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ sind die Mengen

$$A_k := \left\{ \frac{m}{k} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$$

abzählbar. Nun gilt $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \geq 1} A_k$. Daher ist nach Satz 2.1 auch $\mathbb{Q}$ abzählbar. □

Satz 2.2 *Die Menge* $\mathbb{R}$ *aller reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Wir verwenden das sogenannte *Cantorsche Diagonalverfahren.* Es genügt zu zeigen, dass das Intervall $(0,1)$ nicht abzählbar ist. Angenommen, $(0,1)$ sei abzählbar. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen, so dass $(0,1) = \{x_n \,|\, n \geq 1\}$. Die Dezimalbruchentwicklungen der Zahlen x_n seien

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Zahl $c \in (0,1)$ durch die Dezimalentwicklung

$$c = 0, c_1c_2c_3\ldots\,,$$

wobei

$$c_k := \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{kk} \neq 5, \\ 4, & \text{falls } a_{kk} = 5. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $c_k \neq a_{kk}$ für alle $k \geq 1$. Nach Annahme existiert ein $n \geq 1$ mit $x_n = c$. Daraus folgt aber $a_{nn} = c_n$, ein Widerspruch. □

Aufgabe 2.1 (a) Man zeige, dass jedes nichtleere offene Intervall (a,b) überabzählbar ist.

(b) Man zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar ist.

Definition Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *(Lebesgue-)Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern $Q_1, Q_2, \ldots$ gibt, so dass $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$.

Satz 2.3 *Ist* $M_1, M_2, \ldots$ *eine Folge von Nullmengen, so ist auch* $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ *eine Nullmenge.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da M_k eine Nullmenge ist, gibt es Q_{k1}, $Q_{k2}, \dots$, so dass $M_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{kj}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{kj}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Daraus folgt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{kj} \text{ und } \sum_{k,j} v(Q_{kj}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Da die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist (Satz 2.1), ist M eine Nullmenge. $\square$

Beispiel 2.2 Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist $\{x_0\}$ eine Nullmenge. Ebenso ist jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, z.B. auch $\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$.

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *fast überall definiert* auf D, wenn es eine Nullmenge $M \subset D$ gibt, so dass f auf $D \setminus M$ definiert ist.

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ heißen *fast überall gleich* (in Zeichen $f =_v g$), wenn es eine Nullmenge $M \subset D$ gibt, so dass $f|_{D \setminus M} = g|_{D\setminus M}$ (d.h. wenn $\{x \in D \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist).

Beispiel 2.3 Die auf $D = [0, 1]$ erklärte *Dirichlet-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

ist fast überall gleich zur Nullfunktion.

Definition Eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *fast überall konvergent* gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wenn es eine Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Aufgabe 2.2 Man vergleiche die Begriffe fast überall konvergent, punktweise konvergent und gleichmäßig konvergent.

3 Das Lebesgue-Integral

Wir führen nun die Schritte (2) und (3) des am Anfang von §1 beschriebenen Programms aus.

Definition Mit $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen f konvergiert und deren Integralfolge $(\int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\, dx)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Satz 3.1 *Es sei* $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ *und* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen* f *konvergiert. Dann hat die Integralfolge* $(\int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx)_{k\in\mathbb{N}}$ *einen Grenzwert in* $\mathbb{R}$ *und dieser ist unabhängig von der gewählten Folge* (t_k).

Definition Dieser Grenzwert heißt das *(Lebesgue-)Integral* von f:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx.$$

Zum Beweis von Satz 3.1 benötigen wir zwei Hilfssätze:

Satz 3.2 *Es sei* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Treppenfunktionen mit*

(i) $s_0 \geq s_1 \geq \ldots \geq 0$,

(ii) (s_k) *konvergiert fast überall gegen die Nullfunktion.*

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx = 0.$$

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir ein Lemma.

Lemma 3.1 *Es sei* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *ein Quader. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *einen* offenen *Quader* Q^* *mit* $Q \subset Q^*$ *und*

$$v(Q^*) - v(Q) < \varepsilon.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis von Satz 3.2. Nach (i) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} s_0(x)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} s_1(x)\,dx \geq \ldots \geq \int_{\mathbb{R}^n} 0\,dx = 0.$$

Daher existiert $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx$ und ist ≥ 0. Es reicht daher zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} s_{k_0}(x)\,dx < \varepsilon.$$

Es sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
(a) Da s_0 nur endlich viele Werte hat, gibt es wegen (i) ein $M > 0$ mit

$$s_k(x) < M \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Es sei N die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, für die $s_k(x)$ nicht gegen 0 konvergiert. Nach (ii) ist N eine Nullmenge. Daher gibt es eine Folge von Quadern $P_1, P_2, \dots$ mit

$$N \subset \bigcup_{\mu=1}^{\infty} P_\mu \text{ und } \sum_{\mu=1}^{\infty} v(P_\mu) < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Nach Lemma 3.1 gibt es für jedes $\mu = 1, 2, \dots$ einen offenen Quader P_μ^* mit $P_\mu \subset P_\mu^*$ und

$$v(P_\mu^*) - v(P_\mu) < \frac{\varepsilon}{2^\mu 6M}.$$

Dann gilt

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} v(P_\mu^*) \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(v(P_\mu) + \frac{\varepsilon}{2^\mu 6M} \right) < \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3M}.$$

(c) Da $s_0 \neq 0$ nur auf endlich vielen Quadern, gibt es einen kompakten Quader Q_0 mit $s_0(x) = 0$ für $x \notin Q_0$, also wegen (i)

$$s_k(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_0 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(d) Für jede Funktion s_k gibt es nun eine Zerlegung von Q_0 in endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1^{(k)}, Q_2^{(k)}, \dots, Q_{r_k}^{(k)}$, auf denen s_k konstant ist. Betrachte die Folge

$$Q_1^{(0)}, \dots, Q_{r_0}^{(0)}, Q_1^{(1)}, \dots, Q_{r_1}^{(1)}, \dots$$

Es sei

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

die Teilfolge der Quader $Q_\rho^{(k)}$, auf denen $s_k(x) < \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1}$ gilt.

Setze $h_i = k$ falls $Q_i = Q_\rho^{(k)}$. Dann ist Q_i Konstanzquader für die Treppenfunktion s_{h_i} und es gilt

$$s_{h_i}(x) < \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1} \text{ für alle } x \in Q_i \text{ und } i = 1, 2, \dots .$$

Nach Lemma 3.1 gibt es offene Quader Q_i^* $(i = 1, 2, \dots)$ mit

$$Q_i \subset Q_i^* \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} (v(Q_i^*) - v(Q_i)) < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Behauptung 3.1

$$Q_0 \subset \bigcup_{\mu=1}^{\infty} P_\mu^* \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_\mu^*.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
x \in N &\Rightarrow x \in \bigcup_{\mu=1}^{\infty} P_\mu^* \text{ (nach (b))} \\
x \in Q_0 \setminus N &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0 \text{ (nach (ii))} \\
&\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ s_{k_0}(x) < \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1} \\
&\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ x \in Q_i \subset Q_i^*.
\end{aligned}$$

□

Da Q_0 kompakt ist, gibt es nach Heine-Borel ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned}
Q_0 &\subset \bigcup_{\mu=1}^{m} P_\mu^* \cup \bigcup_{i=1}^{m} Q_\mu^* \\
&= \bigcup_{\mu=1}^{m} P_\mu^* \cup \bigcup_{i=1}^{m} Q_\mu \cup \bigcup_{i=1}^{m} (Q_i^* \setminus Q_i).
\end{aligned}$$

Wir definieren nun neue Treppenfunktionen, mit Hilfe derer wir die Integrale über die Treppenfunktionen s_k abschätzen:

$$\begin{aligned}
t_\mu(x) &:= \begin{cases} M & \text{für } x \in P_\mu^*, \\ 0 & \text{für } x \notin P_\mu^*, \end{cases} \qquad \mu = 1, \ldots, m, \\
t(x) &:= \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1} & \text{für } x \in \bigcup_{i=1}^m Q_i, \\ 0 & \text{für } x \notin \bigcup_{i=1}^m Q_i, \end{cases} \\
u_i(x) &:= \begin{cases} M & \text{für } x \in Q_i^* \setminus Q_i, \\ 0 & \text{für } x \notin Q_i^* \setminus Q_i, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m, \\
h &:= \max(h_1, h_2, \ldots, h_m)
\end{aligned}$$

Behauptung 3.2

$$s_h \leq \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu + t + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \text{ auf } \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Da alle rechts stehenden Funktionen nicht negativ sind, genügt es zu zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine der rechts stehenden Funktionen $\geq s_h$.

$$\begin{aligned}
x \notin Q_0 &\Rightarrow s_h(x) = 0. \\
x \in Q_0 &\Rightarrow x \in P_\mu^* \text{ oder } x \in Q_i \text{ oder } x \in Q_I^* \setminus Q_i : \\
x \in P_\mu^* &\Rightarrow t_\mu(x) = M > s_h(x) \text{ (nach (a))} \\
x \in Q_i &\Rightarrow s_h(x) \leq s_{h_i}(x) < \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1} = t(x) \\
x \in Q_i^* \setminus Q_i &\Rightarrow u_i(x) = M > s_h(x) \text{ (nach (a))}.
\end{aligned}$$

□

Aus der Behauptung folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} s_h(x)\,dx \le \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} t_\mu(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} u_i(x)\,dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} t_\mu(x)\,dx &= Mv(P_\mu), \quad \mu = 1,\dots,m, \\ \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (t \cdot 1_{Q_0})(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{3v(Q_0)+1} v(Q_0) < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.3 gibt es paarweise disjunkte Quader $R_1^{(i)}, \dots, R_{p_i}^{(i)}$ mit

$$Q_i^* \setminus Q_i = \bigcup_{\rho=1}^{p_i} R_\rho^{(i)}.$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_i(x)\,dx = M \sum_{\rho=1}^{p_i} v(R_\rho^{(i)}) = M(v(Q_i^*) - v(Q_i)).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} s_h(x)\,dx &< M \sum_{\mu=1}^{m} v(P_\mu^*) + \frac{\varepsilon}{3} + M \left(\sum_{i=1}^{m} (v(Q_i^*) - v(Q_i)) \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 3.3 *Es seien $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge. Die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere fast überall gegen eine Funktion f, die Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion g und es gelte $f \le g$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx \le \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, führen wir noch folgende Notation ein: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so bezeichnen wir mit f^+, f^- die Funktionen mit $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Skizze!). Es gilt

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Beweis von Satz 3.3. Wir werden Satz 3.2 auf eine geeignete Folge von Treppenfunktionen anwenden.

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt. Definiere

$$u_m := (s_k - t_m)^+, \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Wir zeigen, dass die Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt.

Da $t_m \le t_{m+1}$ ist $u_m \ge u_{m+1}$. Somit ist $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen.

Die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere außerhalb der Nullmenge N_1 gegen f und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb der Nullmenge N_2 gegen g. Es sei $N := N_1 \cup N_2$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$

$$\begin{aligned}
s_0(x) \le s_1(x) \le \dots \quad &\Rightarrow \quad s_k(x) \le f(x) \\
&\Rightarrow \quad s_k(x) - t_m(x) \le f(x) - t_m(x) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} (s_k(x) - t_m(x)) \le f(x) - g(x) \le 0. \\
&\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} u_m(x) = \lim_{m\to\infty} (s_k - t_m)^+(x) = 0.
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.2 gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_m(x)\, dx = 0.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&s_k - t_m \le (s_k - t_m)^+ = u_m \\
&\quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} t_m(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} u_m(x)\, dx \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \\
&\quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\, dx - \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_m(x)\, dx \le 0 \\
&\quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\, dx \le \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_m(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\, dx \le \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_m(x)\, dx.$$

□

Beweis von Satz 3.1. Es sei $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine weitere monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f konvergiert. Dann folgt aus Satz 3.3

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_m(x)\, dx &\le \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\, dx, \\
\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\, dx &\le \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_m(x)\, dx,
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} s_m(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx.$$

□

Wir notieren einige Eigenschaften dieses Integral.

Satz 3.4 (i) *Sind $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $f+g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ und für das Integral von $f+g$ gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

(ii) *Ist $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ und $\boxed{\lambda \geq 0}$ eine reelle Zahl, so ist auch $\lambda f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ und für das Integral von λf gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Beweis. (i) Nach Voraussetzung gibt es monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots$ und $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots$ mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f bzw. g konvergieren. Dann konvergiert die Folge $(s_k + t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen die Funktion $f+g$. Da $(s_k+t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine monoton wachsende Folge mit beschränkter Integralfolge ist, folgt $f+g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} (s_k+t_k)(x)\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx\right) \text{(Satz 1.10(i))} \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx + \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} t_k(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

(ii) Nach Voraussetzung gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots$ mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f konvergiert. Wegen $\lambda \geq 0$ ist auch $(\lambda s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit beschränkter Integralfolge. Diese Folge konvergiert fast überall gegen λf. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda s_k)(x)\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\lambda\int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx \text{(Satz 1.10(ii))} \\
&= \lambda\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx \\
&= \lambda\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Die Menge $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ ist aber kein Vektorraum: Zum Beispiel gehört die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

zu $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, nicht aber $-f$. Wir erweitern daher $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ durch Einführen neuer Funktionen zu einem Vektorraum.

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *(Lebesgue-)integrierbar*, wenn es zwei Funktionen $g, h \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $f = g - h$ gilt. Die Menge aller integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f = g - h$, $g, h \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, so definieren wir das *(Lebesgue-)Integral* von f durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx.$$

Das Integral ist unabhängig von der gewählten Darstellung von f als Differenz (Beweis Übungsaufgabe).

Notation Andere Schreibweisen: $\int f(x)d^nx$, $\int f(x)dx_1 \cdots dx_n$, $\int f\,dx$.

Satz 3.5 (i) *Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $f + g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und für das Integral von $f + g$ gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

(ii) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und λ eine reelle Zahl, so ist auch $\lambda f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und für das Integral von λf gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Beweis. (i) Es sei $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$, $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f + g = (f_1 + g_2) - (f_2 + g_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

da nach Satz 3.4(i) $f_1 + g_1$, $f_2 + g_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int (f+g)\,dx &= \int (f_1 + g_1)\,dx - \int (f_2 + g_2)\,dx \\ &= \int f_1\,dx + \int g_1\,dx - \int f_2\,dx - \int g_2\,dx \text{Satz 3.4(i)} \\ &= \int f_1\,dx - \int f_2\,dx + \int g_1\,dx - \int g_2\,dx \\ &= \int f\,dx + \int g\,dx. \end{aligned}$$

(ii) Es sei $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \lambda \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), \\ \lambda < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda f = (-\lambda) f_2 - (-\lambda) f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Den Rest des Beweises lassen wir als Übungsaufgabe. (Wieder ist eine Fallunterscheidung nötig.) □

Korollar 3.1 *Die Menge $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist ein reeller Vektorraum und das Integral $\int : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Satz 3.6 (Monotonie) *Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und ist $f \leq g$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

Beweis. (a) Aus Satz 3.3 folgt, dass ein entsprechender Satz für $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(b) Es sei $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$, $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} f \leq g \quad &\Rightarrow \quad f_1 - f_2 \leq g_1 - g_2 \\ &\Rightarrow \quad f_1 + g_2 \leq g_1 + f_2 \\ &\Rightarrow \quad \int f_1\,dx + \int g_2\,dx \leq \int g_1\,dx + \int f_2\,dx \\ &\Rightarrow \quad \int f_1\,dx - \int f_2\,dx \leq \int g_1\,dx - \int g_2\,dx \\ &\Rightarrow \quad \int f\,dx \leq \int g\,dx. \end{aligned}$$

□

Satz 3.7 *Mit f und g liegen auch die Funktionen*

$$\max(f, g), \quad \min(f, g), \quad f^+, \quad f^- \quad \textit{und} \quad |f|$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass mit $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ auch $\max(f, g) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Nach Voraussetzung gibt es monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots$ und $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots$ mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f bzw. g konvergieren. Dann ist auch $(\max(s_k, t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen die Funktion $\max(f,g)$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass diese Folge eine beschränkte Integralfolge besitzt. Es ist

$$\max(s_k,t_k) \leq \max(s_k^+,t_k^+) \leq s_k^+ + t_k^+.$$

Wegen $s_k - s_0 \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} s_k^+ &= ((s_k - s_0) + s_0)^+ \leq s_k - s_0 + s_0^+, \\ t_k^+ &= ((t_k - t_0) + t_0)^+ \leq t_k - t_0 + t_0^+, \end{aligned}$$

also

$$\max(s_k,t_k) \leq s_k + t_k + (-s_0 + s_0^+ - t_0 + t_0^+).$$

Da die Integralfolgen von (s_k) und (t_k) nach oben beschränkt sind, ist dies auch die Integralfolge von $(\max(s_k,t_k))$.

(b) Wir zeigen, dass mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ auch $f^+ = \max(f,0) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Es sei $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$f^+ + f_2 = \max(f,0) + f_2 = \max(f + f_2, f_2).$$

Wegen $f + f_2 = f_1$ folgt

$$f^+ = \max(f_1,f_2) - f_2.$$

Nach (a) gilt $\max(f_1,f_2) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Deswegen folgt $f^+ \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) Wir zeigen: $f,g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \max(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dies folgt aus

$$\max(f,g) = \max(f-g,0) + g = (f-g)^+ + g.$$

(d) Aus $\min(f,g) = -\max(-f,-g)$ folgt, dass mit f und g auch $\min(f,g)$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Den Beweis der übrigen Aussagen überlassen wir als Übungsaufgabe. □

Wir wollen nun auch das Lebesgue-Integral über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $A \subset D$.

Definition Die *triviale Fortsetzung* f_A von f ist die Funktion $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Definition Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar über* $A \subset D$, falls die triviale Fortsetzung f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x)\,dx$$

das *Lebesgue-Integral von f über A*. Die Menge aller über A integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(A)$.

Die Sätze 3.5, 3.6 und 3.7 übertragen sich sinngemäß auch auf Integrale über eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.

4 Der Satz von Beppo Levi

Dadurch, dass wir bei monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge die Grenzfunktionen bildeten, konnten wir $\mathcal{L}^0(\mathbb{R}^n)$ zu $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ erweitern. Könnte man nun mit derselben Methode $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ noch mehr vergrößern? Die folgenden Sätze zeigen, dass die Antwort auf diese Frage nein ist.

Satz 4.1 *Es sei s_0, s_1, s_2, ... eine Folge von Treppenfunktionen mit*

(i) $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$

(ii) *Es gibt ein $B \in \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} s_k(x)\,dx < B$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Dann konvergiert die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge N aller $x \in \mathbb{R}^n$, für die $(s_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergent ist, eine Nullmenge ist. Da die Folge $(s_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, liegt Konvergenz genau dann vor, wenn die Folge nach oben beschränkt ist. Somit gilt

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (s_k(x)) \text{ nicht beschränkt}\}.$$

Zu zeigen: N ist Nullmenge.

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. O. B. d. A. $s_0 \geq 0$ (falls $s_0 < 0$ betrachte $s'_k = s_k - s_0$).

Es sei $E_k := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, s_k(x) > \frac{2B}{\varepsilon}\}$. Da $s_k \leq s_{k+1}$, gilt $E_k \subset E_{k+1}$. Es gilt $N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$: Für jedes $x \in N$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in E_{k_0}$, denn sonst wäre für alle k $s_k(x) \leq \frac{2B}{\varepsilon}$, d.h. $(s_k(x))$ wäre nach oben beschränkt und somit $x \notin N$.

Jedes E_k ist Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Quadern, nämlich den Konstanzquadern von s_k mit $s_k(x) > \frac{2B}{\varepsilon}$. Also ist E_k zulässig und nach Satz 1.5 damit auch $E_k \setminus E_{k-1}$. Also gibt es paarweise disjunkte Quader Q_1, Q_2, ... mit

$$\begin{aligned}
E_0 &= \bigcup_{j=1}^{m_0} Q_j \\
E_1 \setminus E_0 &= \bigcup_{j=m_0+1}^{m_1} Q_j \\
\vdots \;\; &\vdots \;\; \vdots \\
E_{k+1} \setminus E_k &= \bigcup_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} Q_j
\end{aligned}$$

Da $E_{k-1} \subset E_k$, gilt

$$E_k = \bigcup_{j=1}^{m_k} Q_j.$$

Wir definieren nun eine Folge von Treppenfunktionen ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$t_k(x) = \begin{cases} \frac{2B}{\varepsilon} & \text{für } x \in E_k, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus E_k. \end{cases}$$

Dann gilt wegen $s_0 \geq 0$ und nach Definition von E_k

$$s_k(x) \geq t_k(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ k = 0, 1, \dots ,$$

und

$$B > \int s_k \, dx \geq \int t_k \, dx = \frac{2B}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m_k} v(Q_j).$$

Es folgt

$$\frac{2B}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{m_k} v(Q_j) < B,$$

also

$$\sum_{j=1}^{m_k} v(Q_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da dies für alle k gilt, folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wegen $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ folgt, dass N eine Nullmenge ist. □

Satz 4.2 *Es sei f_0, f_1, f_2, … eine fast überall monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f, die Funktion f liegt in $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, dx.$$

Beweis. Da $f_j \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, gibt es Treppenfunktionen s_{ij} mit

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_{00} & \leq & s_{10} & \leq & s_{20} & \leq & \dots & \leq_v & f_0 \\
s_{01} & \leq & s_{11} & \leq & s_{21} & \leq & \dots & \leq_v & f_1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
s_{0j} & \leq & s_{1j} & \leq & s_{2j} & \leq & \dots & \leq_v & f_j \\
\vdots & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

und $\lim_{i\to\infty} s_{ij}(x) = f_j(x)$ bis auf x aus einer Nullmenge N_j.

Wir konstruieren nun eine neue Folge von Treppenfunktionen durch:

$$s_k := \max\{s_{kj} \,|\, 0 \le j \le k\}.$$

Man überlegt sich leicht, dass dies wieder Treppenfunktionen sind. Für sie gilt:

(a) $s_0 \le s_1 \le s_2 \le \dots$

(b) $s_k \le_v f_k$, also $\int s_k dx \le \int f_k dx < B$.

Nach Satz 4.1 konvergiert die Folge (s_k) fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

Behauptung Es gilt $f_j \le f$ außerhalb der Nullmenge $N = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j \cup \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (s_k(x)) \text{ divergent}\}$ für alle $j = 0, 1, \dots$.

Beweis. Angenommen es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus N$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f_j(x_0) > f(x_0)$. Da $\lim_{i\to\infty} s_{ij}(x_0) = f_j(x_0)$, gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \ge i_0$ gilt:

$$f_j(x_0) \ge s_{ij}(x_0) > f(x_0).$$

Daraus folgt

$$s_i(x_0) = \max\{s_{ij}(x_0) \,|\, 0 \le j \le i\} \ge s_{i_0 j}(x_0) > f(x_0)$$

für alle $i \ge \max\{i_0, j\}$ im Widerspruch zu $s_i \le_v f$. □

Es gilt also $s_j \le_v f_j \le_v f$ und damit $\lim_{j\to\infty} f_j =_v f$.

Für die Integrale folgt daraus

$$\int s_j \, dx \le \int f_j \, dx \le \int f dx,$$

$$\int f \, dx = \lim_{j\to\infty} \int s_j \, dx \le \lim_{j\to\infty} \int f_j \, dx \le \int f \, dx,$$

also

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \, dx = \int f \, dx.$$

□

Wir können nun in Satz 4.2 die Klasse $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ durch $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ersetzen. Dies liefert den Satz von Beppo Levi.

Satz 4.3 (Satz von Beppo Levi) *Es sei f_0, f_1, f_2, … eine fast überall monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion f, die Funktion f liegt in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, dx.$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch einen Hilfssatz.

Lemma 4.1 *Es sei* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *Funktionen* $g, h \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ *mit* $f = g - h$, $h \geq_v 0$ *und*

$$\int h \, dx < \varepsilon.$$

Beweis. Da $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, gibt es f_1, $f_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ mit $f = f_1 - f_2$. Es sei $s_0 \leq s_1 \leq \ldots$ eine Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge, so dass $\lim_{i\to\infty} s_i =_v f_2$. Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int s_i \, dx = \int f_2 \, dx.$$

Daher gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass

$$0 \leq \int f_2 \, dx - \int s_i \, dx = \int (f_2 - s_i) \, dx < \varepsilon.$$

Setzen wir nun $g := f_1 - s_i$, $h := f_2 - s_i$, so gilt: $g, h \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, $f = g - h$, $h \geq_v 0$ (da $s_i \leq_v f_2$) und

$$\int h \, dx < \varepsilon.$$

□

Beweis des Satzes von Beppo Levi. Man konstruiert zunächst geeignete Hilfsfunktionen:

(a) Setze

$$\begin{aligned} k_0 &= f_0 \\ k_j &= f_j - f_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots; \quad k_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1 gibt es für jedes j Funktionen g_j, $h_j \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ mit $k_j = g_j - h_j$, $h_j \geq_v 0$ und

$$\int h_j \, dx \leq \frac{1}{2^{j+1}}.$$

(b) Setze

$$H_j = h_0 + \ldots + h_j.$$

Dann gilt $H_j \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ für alle $j = 0, 1, \ldots$, $H_0 \leq_v H_1 \leq_v \ldots$ und

$$\int H_j \, dx \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{j+1}} < 1.$$

Nach Satz 4.2 konvergiert (H_j) fast überall gegen eine Funktion $H \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

(c) Setze

$$G_j = g_0 + \ldots + g_j.$$

Dann gilt $G_j = \sum_{i=0}^{j} k_i + H_j = f_j + H_j$, $G_j \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ für alle $j = 0, 1, \ldots$, $G_0 \leq_v G_1 \leq_v \ldots$ und

$$\int G_j\,dx = \int f_j\,dx + \int H_j\,dx \leq B + 1$$

(B gemeinsame Schranke aller $\int f_j\,dx$). Nach Satz 4.2 konvergiert (G_j) fast überall gegen eine Funktion $G \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

Mittels dieser Hilfsfunktionen können wir nun wie folgt schließen: Die Folge $(f_j) = (G_j - H_j)$ konvergiert fast überall gegen die Funktion $f =_v G - H$, also $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, und für das Integral gilt

$$\begin{aligned}
\int f\,dx &= \int G\,dx - \int H\,dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int G_j\,dx - \lim_{j\to\infty} H_j\,dx \quad \text{(Satz 4.2)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\int G_j\,dx - \int H_j\,dx \right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \int (G_j - H_j)\,dx \quad \text{(Satz 3.5)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \int f_j\,dx.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass eine stetige Funktion $f : Q \to R$, wobei Q ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ ist, in $\mathcal{L}^1(Q)$, ja sogar in $\mathcal{L}^+(Q)$ liegt, und damit der neue Integralbegriff mit dem in Analysis I für stetige Funktionen im Fall $n = 1$ eingeführten Begriff übereinstimmt. Wir wollen sogar noch etwas allgemeinere Funktionen betrachten.

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *fast überall stetig*, wenn es eine Nullmenge $N \subset D$ gibt, so dass $f|_{D\setminus N}$ stetig ist (d.h.

$\forall x_0 \in D \setminus N\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \setminus N\ ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.)

Beispiel 4.1 Es sei $D = \mathbb{R}$. Die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt aus $\mathbb{R}$ stetig, aber fast überall stetig: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also Nullmenge und $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \equiv 1$ ist stetig.

Für einen Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne $d(Q)$ das Maximum aller Kantenlängen von Q, also

$$d(Q) := \max\{\lambda(I_k) \mid k = 1, \ldots, n\}.$$

Eine endliche Menge $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ von paarweise disjunkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_r$ mit $Q = \bigcup_{j=1}^r Q_j$ nennen wir eine *Zerlegung* von Q. Die Zahl

$$d(\mathfrak{Z}) := \max\{d(Q_j) \,|\, j = 1, \ldots, r\}$$

nennen wir den *Feinheitsgrad* der Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Eine Folge von Zerlegungen $(\mathfrak{Z}_k)$ heißt *ausgezeichnet*, wenn $\lim_{k\to\infty} d(\mathfrak{Z}_k) = 0$ gilt.

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ heißt *Verfeinerung* von $\mathfrak{Z}$ (in Zeichen $\mathfrak{Z}' \subset \mathfrak{Z}$), wenn jedes Q_j aus $\mathfrak{Z}$ Vereinigung gewisser Q'_k aus $\mathfrak{Z}'$ ist.

Satz 4.4 *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte fast überall stetige Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{L}^+(Q)$.*

Beweis. Es sei N eine Nullmenge, so dass $f|_{Q\setminus N}$ stetig ist. Weiter sei $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ eine Zerlegung von Q. Zu dieser Zerlegung definieren wir eine Treppenfunktion

$$s(x) = \begin{cases} \inf\{f(\xi) \,|\, \xi \in Q_j \setminus N\} & \text{für } x \in Q_j, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus Q. \end{cases}$$

Das Integral

$$\int s\,dx = \sum_{j=1}^r \inf\{f(\xi) \,|\, \xi \in Q_j \setminus N\} \cdot v(Q_j)$$

nennen wir auch die *Untersumme* von f zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Geht man zu einer Verfeinerung $\mathfrak{Z}' = \{Q'_1, \ldots, Q'_p\}$ über und betrachtet die zugehörige Treppenfunktion s', so gilt $s(x) \le s'(x)$ für jedes $x \in Q$, da das Infimum einer Menge kleiner oder gleich dem Infimum einer Teilmenge ist.

Es sei nun $\mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{Z}_1$, ... eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so dass $\mathfrak{Z}_{i+1}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_i$ ist, und s_i sei die wie oben der Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ zugeordnete Treppenfunktion. Dann gilt

$$s_0 \le s_1 \le \ldots .$$

Da f nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) < M \quad \text{für alle } x \in Q.$$

Somit gilt auch

$$s_i(x) < M \quad \text{für alle } x \in Q \text{ und } i \in \mathbb{N}.$$

Also folgt

$$\int s_i\,dx \le M \cdot v(Q),$$

d.h. die zugehörige Integralfolge ist beschränkt.

Nach Satz 4.1 konvergiert daher die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen eine Funktion g.

Wir müssen nun noch zeigen, dass f und g fast überall gleich sind, d.h. dass $\lim_{k\to\infty} s_k =_v f$.

Es sei zu diesem Zweck $x_0 \in Q \setminus N$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in Q \setminus N$ gilt:

$$||x - x_0||_{\max} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} d(\mathfrak{Z}_k) = 0$, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k > k_0$ gilt: $d(\mathfrak{Z}_k) < \delta$. Falls $x_0 \in Q_j^{(k)}$ gilt also für alle $k > k_0$

$$||x - x_0||_{\max} \leq d(\mathfrak{Z}_k) < \delta \text{ für alle } x \in Q_j^{(k)},$$

also auch

$$||\xi - x_0||_{\max} < \delta \quad \text{für alle } \xi \in Q_j^{(k)} \setminus N,$$

und daher

$$|f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $s_k(x_0) = \inf\{f(\xi) \,|\, \xi \in Q_j^{(k)} \setminus N\}$, folgt

$$|s_k(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also folgt $\lim_{k\to\infty} s_k(x_0) = f(x_0)$. Da dies für alle $x_0 \in Q \setminus N$ gilt, folgt $\lim_{k\to\infty} s_k =_v f$ und somit $f \in \mathcal{L}^+(Q)$. □

Korollar 4.1 *Ist Q ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar und es gilt sogar $f \in \mathcal{L}^+(Q)$.*

Wir geben eine Anwendung des Satzes von Beppo Levi.

Definition Eine *Ausschöpfung* einer Menge A ist eine aufsteigende Folge $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ von Teilmengen $A_k \subset A$ mit

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Satz 4.5 (Integration durch Ausschöpfung) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$, f eine fast überall auf A definierte Funktion und (A_k) eine Ausschöpfung von A, so dass f über jedes A_k integrierbar ist. Dann gilt: f ist genau dann über A integrierbar, wenn die Folge der Integrale $(\int_{A_k} |f|\, dx)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_A f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\, dx.$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Ist f über A integrierbar, so ist auch $|f|$ über A integrierbar und es gilt

$$\int_{A_k} |f|\, dx \le \int_A |f|\, dx \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

"$\Leftarrow$": Es sei zunächst $f \ge 0$. Dann ist (f_{A_k}) eine fast überall monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f_A konvergiert. Nach dem Satz von Beppo Levi ist also f_A integrierbar und

$$\int_A f\, dx = \int f_A\, dx = \lim_{k\to\infty} \int f_{A_k}\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f\, dx.$$

Im allgemeinen Fall wenden wir die vorherigen Argumente auf $f = f^+ - f^-$ an. □

Aufgabe 4.1 Man zeige, dass die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, nicht über $(0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar ist, aber das uneigentliche Integral im Sinne von Analysis I

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

existiert.

5 Der Satz von Lebesgue

Der Konvergenzsatz von Lebesgue stellt klar, unter welchen Bedingungen Integration und Grenzwertbildung vertauschbar sind. Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Satz.

Satz 5.1 *Es sei $f_0, f_1, \ldots$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(i) *Gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \le_v F$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist* $\sup\{f_0, f_1, \ldots\}$ *fast überall definiert und gehört zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Gibt es eine Funktion $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $G \le_v f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist* $\inf\{f_0, f_1, \ldots\}$ *fast überall definiert und gehört zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. (i) Es sei

$$g_k := \sup\{f_0, f_1, \ldots, f_k\}.$$

Dann gilt: $g_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (nach Satz 3.7), $g_0 \le g_1 \le \ldots$. Aus $g_k \le_v F$ folgt außerdem

$$\int g_k\, dx \le \int F\, dx \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi erfüllt. Es folgt daher, dass die Folge (g_k) fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

(ii) Folgt unmittelbar aus (i), da

$$-\sup\{-f_0, -f_1, \dots\} = \inf\{f_0, f_1, \dots\}.$$

$\square$

Satz 5.2 (Satz von Lebesgue) *Es sei $f_0, f_1, \dots$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Außerdem gebe es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $|f_k| \leq g$ (*Majorante*) für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dx.$$

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} g_k &=_v \sup\{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots\}, \\ h_k &=_v \inf\{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Existenz von g_k und h_k folgt dabei aus Satz 5.1. Dann gilt

(a) $\pm g_k, h_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (nach Satz 5.1).

(b) $h_0 \leq_v h_1 \leq_v \dots,\ g_0 \geq_v g_1 \geq_v \dots$.

(c) $\lim_{k\to\infty} h_k =_v f$, $\lim_{k\to\infty}(-g_k) =_v -f$.
(*Beweis*: Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert, gibt es eine Nullmenge N, so dass für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

und somit auch

$$|h_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Entsprechend auch für $-g_k$ und $-f$.)

(d) $\int h_k\,dx \leq \int g_0\,dx$, $\int(-g_k)\,dx \leq \int(-h_0)dx$ für alle $k \in \mathbb{N}$
wegen $h_k \leq_v g_0$ und $-g_k \leq_v -h_0$.

Nach (a)–(d) sind für die Funktionenfolgen $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(-g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi erfüllt. Es folgt demnach $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int h_k\,dx, \qquad \int(-f)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int(-g_k)\,dx.$$

Nun gilt

$$h_k \leq_v f_k \leq_v g_k \Rightarrow \int h_k\,dx \leq \int f_k\,dx \leq \int g_k\,dx.$$

Also ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty}\int f_k\,dx = \int f\,dx.$$

□

Wir geben nun Anwendungen des Satzes von Lebesgue.

Satz 5.3 *Es sei $f_0, f_1, \ldots$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $|f| <_v g$, so gehört auch f zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Bemerkung 5.1 Es braucht aber i. A. nicht mehr $\int f\,dx = \lim_{k\to\infty}\int f_k\,dx$ zu gelten (Beispiel in den Hausaufgaben).

Beweis. Setze

$$f_k^* = \min\{g, \max(f_k, -g)\}.$$

Es wird von f_k also alles abgeschnitten, was oberhalb von g und unterhalb von $-g$ liegt:

$$f_k^*(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{falls } -g(x) \le f_k(x) \le g(x), \\ g(x) & \text{falls } f_k(x) > g(x), \\ -g(x) & \text{falls } f_k(x) < -g(x). \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt nun für alle x außerhalb einer Nullmenge N und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f_k^*(x)| \le |f(x) - f_k(x)| \quad (\text{da } -g \le_v f \le_v g).$$

Also gilt auch

$$\lim_{k\to\infty} f_k^* =_v f.$$

Nach Satz 3.7 gilt $f_k^* \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion gilt ferner $|f_k^*| \le g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Satz von Lebesgue liefert dann die Behauptung.
□

Wir kommen noch einmal auf die Integration von stetigen Funktionen zurück.

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ eine Zerlegung von Q. Außerdem sei für $k = 1, \ldots, r$

$$\inf\{f(x) \mid x \in Q_k\} \le \eta_k \le \sup\{f(x) \mid x \in Q_k\}.$$

Wegen der Stetigkeit von f auf Q gibt es ein $\xi_k \in \overline{Q}_k$ für das $f(\xi_k) = \eta_k$ ist. Eine Summe

$$S = \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k)v(Q_k)$$

nennt man eine *Riemannsche Summe* zu f und $\mathfrak{Z}$. Dann gilt

Satz 5.4 *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $(\mathfrak{Z}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen und S_m eine Riemannsche Summe zu $\mathfrak{Z}_m$, dann gilt*

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \int f\,dx,$$

d.h. die Riemannschen Summen konvergieren gegen das Integral von f.

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 4.4 definieren wir zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und einer Wahl von η_k eine Treppenfunktion

$$s(x) := \eta_k \quad \text{für } x \in Q_k.$$

Dann gilt $S = \int s\,dx$. Dann definiert die Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_m)$ eine Folge von Treppenfunktionen (s_m). Nach dem Beweis von Satz 4.4 konvergiert die Folge (s_m) fast überall gegen f.

Wegen der Stetigkeit von f auf kompaktem Definitionsbereich ist f beschränkt, also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| < M \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

also auch $|s_m| < M$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt nach dem Satz von Lebesgue

$$\int f\,dx = \lim_{m\to\infty} \int s_m\,dx = \lim_{m\to\infty} S_m.$$

□

Satz 5.5 (Lemma von Fatou) *Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen mit $f_k \geq_v 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, und es gelte $\int f_k\,dx \leq A$ für alle k. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int f\,dx \leq A.$$

Beweis. Es sei

$$h_k := \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\}.$$

Nach Satz 5.1 ist $h_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und hat eine beschränkte Integralfolge. Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert sie also fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\int g\,dx \leq A.$$

Es bleibt also zu zeigen: $g =_v \lim_{k\to\infty} h_k =_v f$. Wegen $\lim_{k\to\infty} f_k =_v f$ gibt es eine Nullmenge N, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ und $\varepsilon > 0$ ein k_0 existiert mit $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt auch

$$|f(x) - h_k(x)| < \varepsilon.$$

□

6 Parameterabhängige Integrale

Als Anwendung des Satzes von Lebesgue betrachten wir nun parameterabhängige Integrale. Ein parameterabhängiges Integral ist ein Integral von der Form

$$\int_a^b f(x,t)\,dx, \quad \text{z.B.} \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \ (t>0).$$

Allgemeiner betrachten wir: $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und eine Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}.$$

Satz 6.1 *Die Abbildung $f : A \times I \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ über A integrierbar.*

(ii) *Für jedes $x \in A$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig.*

(iii) *Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(A)$ mit*

$$|f(x,t)| \le g(x) \quad \textit{für alle } t \in I,\ x \in A.$$

Dann ist die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \int_A f(x,t)\,dx$$

stetig.

Beweis. Zum Beweis der Stetigkeit von F in $t_0 \in I$ ist zu zeigen: Für jede Folge $(t_k)_{k\ge1}$ aus I mit $t_k \ne t_0$ für alle $k \ge 1$ und $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} F(t_k) = F(t_0).$$

Es sei $(t_k)_{k\ge1}$ eine solche Folge. Wir betrachten die Folge der Funktionen

$$f_k : A \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = f(x,t_k), \quad k = 0,1,\ldots.$$

Dann gilt

(a) $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$, $k = 0,1,\ldots$ nach (i).

(b) Nach (ii) konvergiert die Folge (f_k) punktweise gegen die Funktion $f_0 : A \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = f(x,t_0)$.

(c) Nach (iii) gilt $|f_k| \le g$ für alle k.

Nach dem Satz von Lebesgue folgt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} F(t_k) &= \lim_{k\to\infty}\int_A f_k\,dx = \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k)\,dx\\ &= \int_A f_0\,dx = \int_A f(x,t_0)\,dx = F(t_0).\end{aligned}$$

□

Satz 6.2 (Differentiation unter dem Integralzeichen) *Es sei $I = (a,b)$ und $f : A \times (a,b) \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes $t \in (a,b)$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ über A integrierbar.*

(ii) *Für jedes $x \in A$ ist die Funktion f partiell nach t differenzierbar.*

(iii) *Es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(A)$ mit*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x) \quad \text{für alle } t \in (a,b),\ x \in A.$$

Dann ist die Funktion $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ für jedes feste $t_0 \in (a,b)$ integrierbar über A, die durch

$$F(t) = \int_A f(x,t)\,dx$$

definierte Funktion $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in (a,b) und bezüglich ihrer Ableitung gilt:

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt}\left[\int_q f(x,t)\,dx\right]_{t=t_0} = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,dx.$$

Beweis. Es sei $t_0 \in (a,b)$ und $(t_k)_{k\ge1}$ eine Folge aus (a,b) mit $t_k \neq t_0$ für alle $k = 1,2,\ldots$ und $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$. Wegen der Linearität des Integrals folgt dann

$$\frac{F(t_k)-F(t_0)}{t_k-t_0} = \int_A \frac{f(x,t_k)-f(x,t_0)}{t_k-t_0}\,dx.$$

Wir setzen

$$f_k(x) := \frac{f(x,t_k)-f(x,t_0)}{t_k-t_0}.$$

Dann ist f_k über A integrierbar und die Folge (f_k) konvergiert punktweise gegen die Funktion $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t}f(x,t_0)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes k ein τ_k zwischen t_0 und t_k, so dass

$$\frac{f(x,t_k)-f(x,t_0)}{t_k-t_0} = \frac{\partial}{\partial t} f(x,\tau_k).$$

Nach Voraussetzung folgt $|f_k| \le g$. Also folgen die Behauptungen aus dem Satz von Lebesgue: Die Funktion $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0)$ ist über A integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{k\to\infty} \frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dx \\ &= \int_A (\lim_{k\to\infty} f_k) \, dx = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) \, dx. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.1 Man zeige

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx = \arctan t + \frac{\pi}{2}.$$

7 Messbare Funktionen und Mengen

Wir untersuchen zunächst messbare Funktionen.

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *messbar*, wenn es eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die fast überall gegen f konvergiert.

Satz 7.1 *Jede integrierbare Funktion ist auch messbar.*

Beweis. Schreibe $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ als $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen $s_0, s_1, \ldots$ und $t_0, t_1, \ldots$ mit beschränkter Integralfolge, die fast überall gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Dann gilt

$$f =_v \lim_{k\to\infty} (s_k - t_k).$$

□

Bemerkung 7.1 Die Umkehrung von Satz 7.1 gilt i.A. nicht, siehe Hausübungen.

Aus Satz 5.3 folgt:

Satz 7.2 *Es sei f messbar und g integrierbar und $|f| \le_v g$. Dann ist f integrierbar.*

Korollar 7.1 *Es sei f messbar und $|f|$ integrierbar. Dann ist f integrierbar.*

Korollar 7.2 *Es sei f integrierbar, g messbar und beschränkt. Dann ist $f \cdot g$ integrierbar.*

Beweis. Da g beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|g| \leq M$. Also folgt $|f \cdot g| \leq |f|M$ und $|f|M \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 7.2. □

Satz 7.3 (i) *Die messbaren Funktionen bilden eine $\mathbb{R}$-Algebra, d.h. mit f und g sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und λf für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ messbar.*

(ii) *Mit f und g sind auch die Funktionen* $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+, f^- *und* $|f|$ *messbar.*

Beweis. Dies folgt aus den entsprechenden Sätzen für Treppenfunktionen durch Limesbildung. □

Wir betrachten nun messbare und integrierbare Mengen.

Definition Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar* (bzw. *messbar*), wenn die charakteristische Funktion 1_M integrierbar (bzw. messbar) ist.

Definition Ist M integrierbar, so heißt

$$v(M) := \int 1_M \, dx$$

das *Maß* von M.

Diese Definition ist mit der Definition des Volumens eines Quaders verträglich: Ist Q ein Quader, so ist 1_Q eine Treppenfunktion mit einem einzigen Konstanzquader Q und die Definition ergibt

$$v(Q) = 1 \cdot v(Q).$$

Satz 7.4 *Sind M, N messbar, so auch $M \cap N$, $M \cup N$ und $M \setminus N$.*

Beweis. Es gilt

$$1_{M \cap N} = 1_M \cdot 1_N, \quad 1_{M \cup N} = \max(1_M, 1_N), \quad 1_{M \setminus N} = 1_M(1 - 1_N).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 7.3. □

Satz 7.5 *Es sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die triviale Fortsetzung f_M messbar.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass es eine Folge von Treppenfunktionen $(s_k)_{k \geq 1}$ mit $\lim_{k \to \infty} s_k(x) = f_M(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.

Dazu teilen wir für jedes $k = 1, 2, \ldots$ den $\mathbb{R}^n$ in disjunkte Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{k}$ ein wie folgt: Jedes n-Tupel $(m_1, \ldots, m_n)$ ganzer Zahlen definiert einen Würfel

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{m_i}{k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{k} \right\}$$

der Kantenlänge $\frac{1}{k}$. Diese abzählbar unendlich vielen Würfel bilden für festes k ein Würfelgitter.

Nun definieren wir eine Treppenfunktion s_k: Die Konstanzquader $Q_j^{(k)}$ von s_k seien diejenigen Würfel, die in M enthalten sind und außerdem noch im Würfel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||_{\max} < k\}$ liegen (Letzteres, damit man nur endlich viele Konstanzquader hat). Für x aus einem solchen Konstanzquader $Q_j^{(k)}$ sei $s_k(x) = f_M(\xi)$, wobei ξ ein fest gewählter Punkt aus $Q_j^{(k)}$ ist.

Dann gilt für alle $x \in M$: $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f_M(x)$. Denn für jedes $x \in M$ gibt es ein k_0, so dass für jedes $k \geq k_0$ der Punkt x in einem der Konstanzquader $Q_j^{(k)}$ liegt. Wegen der Stetigkeit von f_M auf M ergibt sich dann $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f_M(x)$.

Für alle $x \notin M$ ist $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0 = f_M(x)$, da x in keinem $Q_j^{(k)}$ liegt. Damit konvergiert die Folge (s_k) gegen f_M. □

Korollar 7.3 *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen, so ist M messbar.*

Beweis. Ist M offen, so ist die Funktion f, die auf M konstant den Wert 1 hat, stetig in jedem Punkt aus M. Nach Satz 7.5 ist daher $1_M = f_M$ messbar.

Ist M abgeschlossen, so ist $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen und messbar. Damit ist auch $M = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus M)$ messbar. □

Satz 7.6 *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt, so ist M integrierbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Quader Q mit $M \subset Q$. Es gilt $M = M \cap Q$, also $1_M = 1_M \cdot 1_Q$. Nach Korollar 7.2 ist 1_M integrierbar. □

Korollar 7.4 *Jede offene oder abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist integrierbar.*

Satz 7.7 *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige beschränkte Funktion, so ist das Integral $\int_M f\,dx$ definiert.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

8 Der Satz von Fubini

Für die Berechnung von Integralen im $\mathbb{R}^n$ ist der Satz von Fubini sehr wichtig. Nach ihm darf unter bestimmten Voraussetzungen nämlich "variablenweise" integriert werden, womit die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf die von eindimensionalen Integralen zurückgeführt ist.

Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Die Koordinaten von $\mathbb{R}^p$ bezeichnen wir mit x, die von $\mathbb{R}^q$ mit y. Also sind (x, y) die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$.

Satz 8.1 (Satz von Fubini) *Es sei* $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion. Dann gilt:*

(i) *Für alle* x *außerhalb einer Nullmenge* $N_1 \subset \mathbb{R}^p$ *ist die Funktion* $f_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$, *über* $\mathbb{R}^q$ *integrierbar.*

(ii) *Die somit fast überall definierte Funktion* $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)dy = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$$

ist über $\mathbb{R}^p$ *integrierbar.*

(iii) *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Wegen der Symmetrie in x und y der Voraussetzungen erhält man die folgende

Vertauschungsformel

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Warnung Die Funktion f wird als integrierbar vorausgesetzt. I.A. gilt diese Formel nicht: siehe Hausübungen.

Nun zum Beweis des Satzes von Fubini. Wir geben zunächst das Beweisprogramm an. Wir werden zeigen:

1. Schritt: Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, dann gilt der Satz für die charakteristische Funktion 1_Q.

2. Schritt: Gilt der Satz für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so auch für $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Dann gilt der Satz von Fubini für Treppenfunktionen, die ja Linearkombinationen gewisser 1_Q sind.)

3. Schritt: Es sei $f_0 \leq_v f_1 \leq_v \dots$ eine fast überall monoton wachsende Folge aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge. Gilt der Satz für alle f_k, so gilt er auch für $f =_v \lim_{k\to\infty} f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. (Daher gilt der Satz für alle Funktionen aus $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$, für Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ folgt er dann aus Schritt 2.)

Nun der Beweis:

1. Schritt: Es sei $Q = Q_1 \times Q_2$, wobei $Q_1 \subset \mathbb{R}^p$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^q$. Dann gilt

$$(1_Q)_x(y) = \begin{cases} 1_{Q_2}(y) & \text{falls } x \in Q_1, \\ 0 & \text{falls } x \notin Q_1. \end{cases}$$

Folglich gilt

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^q} (1_Q)_x\, dy = \begin{cases} v(Q_2) & \text{falls } x \in Q_1, \\ 0 & \text{falls } x \notin Q_1, \end{cases}$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} 1_Q\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^p} F\,dx = v(Q_1)v(Q_2) = v(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_Q\,d(x,y).$$

2. Schritt: Dies folgt aus der Linearität des Integrals und ist eine kleine Übungsaufgabe.

Vor dem 3. Schritt müssen wir eine kleine Betrachtung über das Verhältnis von Nullmengen in $\mathbb{R}^{p+q}$ und Nullmengen in $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ anstellen. Zunächst brauchen wir eine andere Charakterisierung von Nullmengen.

Lemma 8.1 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es eine Folge von Quadern $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass jeder Punkt aus M für unendlich viele k in Q_k enthalten ist und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ konvergiert.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Es sei M eine Nullmenge. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl k eine Folge von Quadern $(Q_{ki})_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_{ki} \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} v(Q_{ki}) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Es gibt also abzählbar viele Quader Q_{ki}, so dass jeder Punkt von M für unendlich viele (k,i) in Q_{ki} enthalten ist und so dass $\sum_{k,i=0}^{\infty} v(Q_{ki}) \le 1$ konvergiert.

"$\Leftarrow$": Aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ folgt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein j_0 gibt, so dass $\sum_{j=j_0}^{\infty} v(Q_j) < \varepsilon$. Da jeder Punkt aus M für unendlich viele k in Q_k enthalten ist, gilt $M \subset \bigcup_{j=j_0}^{\infty} Q_j$, also ist M eine Nullmenge. □

Es sei $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ eine Nullmenge,

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x,y) \in E\} \subset \mathbb{R}^q$$

für $x \in \mathbb{R}^p$ der *Schnitt* von E mit $\{x\} \times \mathbb{R}^q$. Dann braucht E_x nicht wieder eine Nullmenge zu sein (warum?). Aber es gibt nicht so viele schlechte x:

Lemma 8.2 *Mit diesen Bezeichnungen gilt: E_x ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^q$ für alle x außerhalb einer Nullmenge in $\mathbb{R}^p$.*

Beweis. Da $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ eine Nullmenge ist, gibt es nach Lemma 8.1 eine Folge von Quadern $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass jeder Punkt (x,y) aus E für unendlich viele k in Q_k enthalten ist und $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k)$ konvergiert. Die Summe

$$h_m := \sum_{k=0}^{m} 1_{Q_k}$$

von charakteristischen Funktionen ist eine Treppenfunktion, für die der Satz von Fubini schon bewiesen ist.

Die Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge. Nun gilt nach Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_m \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} h_m(x,y) dy dx.$$

Die Funktion H_m mit

$$H_m(x) = \int_{\mathbb{R}^q} h_m(x,y) \, dy$$

ist nach dem Beweis von Schritt 1 ebenfalls eine Treppenfunktion. Die Folge (H_m) ist daher eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit beschränkter Integralfolge.

Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert die Folge $(H_m(x))$ daher für alle x außerhalb einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^p$.

Es sei nun $x \notin N$. Wir wollen zeigen, dass E_x eine Nullmenge in $\mathbb{R}^q$ ist: Wir schreiben $Q_k = Q_k^{(1)} \times Q_k^{(2)}$ mit $Q_k^{(1)} \subset \mathbb{R}^p$ und $Q_k^{(2)} \subset \mathbb{R}^q$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} 1_{Q_k}(x,y) \, dy = v(Q_k^{(2)}),$$

also

$$\sum_{k=0}^{m} v(Q_k^{(2)}) = \int_{\mathbb{R}^q} h_m(x,y) \, dy = H_m(x).$$

Die $Q_k^{(2)}$ bilden nun eine Überdeckung von E_x vom gewünschten Typ: Ist $y \in E_x$, so ist (x,y) für unendlich viele k in Q_k und damit y in $Q_k^{(2)}$ enthalten. Außerdem konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k^{(2)})$, da $(H_m(x))$ konvergiert. Nach Lemma 8.1 ist also E_x eine Nullmenge in $\mathbb{R}^q$. □

3. Schritt: Wir gehen also aus von einer Folge (f_k) von integrierbaren Funktionen mit $f_0 \leq_v f_1 \leq_v \dots$ und mit beschränkter Integralfolge. Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert diese Folge fast überall gegen eine integrierbare Funktion f. Außerdem erfüllen alle f_k:

(i) Für alle x außerhalb einer Nullmenge $N_1 \subset \mathbb{R}^p$ ist $(f_k)_x : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(ii) F_k mit $F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y) \, dy$ gehört zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$.

(iii) Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x,y) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y) \, dy \right) dx.$$

Nach diesen Voraussetzungen und dem Satz von Beppo Levi gilt also:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f\, d(x,y) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_k(x,y)\, d(x,y) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\, dy \right) dx = (*)\end{aligned}$$

Wir wollen nun das lim-Zeichen mit den Integralen vertauschen: Die Funktion $F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\, dy$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ integrierbar und (F_k) hat eine durch $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d(x,y)$ beschränkte Integralfolge. Gilt $F_k \leq_v F_{k+1}$? Die Menge

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \,|\, (f_k(x,y)) \textit{ nicht } \text{monoton wachsend}\}$$

ist eine Nullmenge. Nach Lemma 8.2 ist also

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q \,|\, (f_k(x,y)) \textit{ nicht } \text{monoton wachsend}\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^q$ für alle x außerhalb einer Nullmenge $N_2 \subset \mathbb{R}^p$. Für diese x gilt dann

$$F_k(x) \leq F_{k+1}(x) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nach Beppo Levi gilt dann:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} f_k(x,y)\, dy \right) dx.$$

Diesen Schluss wollen wir noch einmal wiederholen: Nach Lemma 8.2 ist

(a) die Menge aller x, für die

$$\{y \in \mathbb{R}^q \,|\, (f_k(x,y) \text{ nicht monoton wachsend}\}$$

keine Nullmenge ist, eine Nullmenge N_2,

(b) die Menge aller x, für die

$$\{y \in \mathbb{R}^q \,|\, (f_k(x,y) \text{ konvergiert nicht gegen } f(x,y)\}$$

keine Nullmenge ist, eine Nullmenge N_3.

Dann gilt für alle x außerhalb der Nullmenge $N_1 \cup N_2 \cup N_3$:

(α) $((f_k)_x)$ ist monoton wachsend,

(β) $(f_k)_x$ ist integrierbar für alle $k \in \mathbb{N}$,

(γ) die $(f_k)_x$ haben eine durch $\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy$ beschränkte Integralfolge.

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt dann:

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \lim_{k\to\infty} f_k(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Die Behauptungen (i) und (ii) des Satzes von Fubini haben wir gleich mitbewiesen.

Eine Folgerung aus dem Satz von Fubini ist das sogenannte Prinzip von Cavalieri (1598–1647).

Satz 8.2 (Prinzip von Cavalieri) *Gegeben seien zwei "Körper" $A, B \subset \mathbb{R}^3$, deren Volumen*

$$\begin{aligned} v(A) &= \int_{\mathbb{R}^3} 1_A dxdydz, \\ v(B) &= \int_{\mathbb{R}^3} 1_B dxdydz, \end{aligned}$$

wohlerklärt ist. Haben nun für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Schnittflächen $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in A\}$ und $B_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in B\}$ den gleichen Flächeninhalt, so haben die Körper A und B das gleiche Volumen.

Beweis.

$$v(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} 1_{A_z} dxdy \right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} 1_{B_z} dxdy \right) dz = v(B).$$

□

Beispiel 8.1 Alle Kegel gleicher Höhe über der gleichen Grundfläche haben das gleiche Volumen.

9 Der Transformationssatz

Wir hatten in Analysis I gesehen, dass für die Berechnung von Integralen die Substitutionsregel eine große Rolle spielte. Wir wollen nun eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel auf mehrdimensionale Integrale kennenlernen.

Zunächst formulieren wir die Substitutionsregel aus Analysis I etwas um. Die Substitutionsregel lautete: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Wir setzen zusätzlich voraus, dass φ bijektiv ist. Dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

Ist $\varphi' \geq 0$ auf $[\alpha,\beta]$, so ist $\varphi(\alpha) = a < \varphi(\beta) = b$ und wir können schreiben

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

Ist aber $\varphi' \leq 0$, so gilt $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$, also

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)\,dx &= -\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du.\end{aligned}$$

Beide Formeln können wir also wie folgt zusammenfassen:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du.$$

Der Transformationssatz verallgemeinert diese Formel.

Satz 9.1 (Transformationssatz für Integrale) *Es seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $h : U \to V$ sei bijektiv, h und h^{-1} seien stetig differenzierbar (d.h. h ist ein Diffeomorphismus).*

Dann ist $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn $f \circ h \cdot |\det h'|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(h(x))|\det h'(x)|\,dx.$$

Bevor wir mit dem Beweis des Transformationssatzes beginnen, wollen wir zunächst Anwendungen betrachten.

Beispiel 9.1 Transformation auf *Polarkoordinaten*:

$$\begin{aligned}x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi.\end{aligned}$$

Wir haben bereits in Analysis II gesehen, dass dadurch ein Diffeomorphismus h des Streifens

$$U = \{(r,\varphi) \,|\, r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

auf die Menge

$$V = \{(x_1,x_2) \,|\, x_2 = 0 \Rightarrow x_1 < 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,0) \,|\, x_1 \geq 0\}$$

definiert wird. Die Menge $N := \{(x_1,0) \,|\, x_1 \geq 0\}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

Man zeige

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi \right) dr.\end{aligned}$$

Aufgabe 9.1 Man berechne das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Beispiel 9.2 Wir berechnen das Volumen einer n-dimensionalen Vollkugel. Es sei $B_r^n(0)$ eine Kugel vom Radius r in $\mathbb{R}^n$ um den Nullpunkt. Man zeige

$$v(B_r^n(0)) = r^n c_n,$$

wobei $c_n = v(B_1^n(0))$. Man leite die Rekursionsformel

$$c_n = \frac{2\pi}{n} c_{n-2}$$

für $n \geq 2$ ab. Mit $c_0 = 1$ und $c_1 = 2$ (Länge des Intervalls $(-1, 1)$) gewinnt man daraus die geschlossenen Formeln:

$$c_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad c_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots 1}.$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{4\pi}{3}, \\ v(B_r^3(0)) &= \frac{4\pi}{3} r^3. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum Beweis des Transformationssatzes.

Wir werden ihn zunächst für lineare Transformationen h beweisen. Deshalb erinnern wir an einige Fakten aus der linearen Algebra.

In der linearen Algebra wurden die *Elementarmatrizen*

$$F_{kl} := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ (k \neq l) \\ \\ \leftarrow l\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$F_k(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Zeile } \ (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$$

betrachtet. Die Multiplikation einer $n \times n$-Matrix A mit F_{kl} von links bedeutet gerade die Addition der l-ten Zeile von A zur k-ten Zeile von A. Die Multiplikation von A mit $F_k(\alpha)$ von links bedeutet Multiplizieren der k-ten Zeile mit α. Die Multiplikation mit Elementarmatrizen entspricht also *elementaren Umformungen.* In der Vorlesung Lineare Algebra wurde der folgende Satz bewiesen:

Satz 9.2 *Jedes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Nach der folgenden Bemerkung genügt es, den Transformationssatz für eine Elementarmatrix zu beweisen, um ihn für jedes $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zu zeigen.

Bemerkung 9.1 Es seien $h_1 : U \to V$ und $h_2 : V \to W$ Diffeomorphismen. Gilt der Transformationssatz für h_1 und h_2, so gilt er auch für $h = h_2 \circ h_1$: Ist f nämlich über W integrierbar, so folgt dann $f \circ h_2$ und $f \circ h_2 \circ h_1$ integrierbar, also $f \circ h$ integrierbar. Entsprechend:

$$\begin{aligned}
&\int_U f(h_2 \circ h_1(x))|\det(h_2 \circ h_1)'(x)|dx \\
&= \int_U f(h_2(h_1(x)))|\det(h_2'(h_1(x))||\det h_1'(x)|dx \\
&= \int_V f(h_2(y))|\det h_2'(y)|dy \quad (y = h_1(x)) \\
&= \int_W f(z)\,dz \quad (z = h_2(y)).
\end{aligned}$$

Nun also der Transformationssatz für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$:

Satz 9.3 *Es sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn $f \circ A$ integrierbar ist und in diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dy = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A|\det A|dx.$$

Bemerkung 9.2 (a) Die Abbildung $x \mapsto Ax$ ist differenzierbar mit Ableitung A an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ein allgemeiner Satz mit U, V anstelle von $\mathbb{R}^n$ folgt aus diesem Satz mit Hilfe der trivialen Fortsetzung von f.

Beweis. Nach der obigen Bemerkung und Satz 9.2 brauchen wir den Beweis nur für die Elementarmatrizen F_{kl} und $F_k(\alpha)$ führen.

(1) Für $n = 1$ lautet der Satz: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

(i) f ist genau dann integrierbar, wenn $x \mapsto f(x + a)$ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\,dx.$$

(ii) f ist genau dann integrierbar, wenn $x \mapsto f(\lambda x)$ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy = |\lambda| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\,dx.$$

(i) und (ii) folgen daraus, dass Translationen und Streckungen Intervalle in Intervalle überführen und sind leicht zu beweisen.

(2) Zunächst zeigen wir: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f \circ A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, wobei A elementar.

Wegen der allgemeinen Limessätze genügt es, diese Behauptung für eine *Treppenfunktion* f bzw. $f \circ A$ zu beweisen.

Dies ist aber klar für $A = F_k(\alpha)$, da wegen

$$F_k(\alpha)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, \alpha x_k, \ldots, x_n)$$

Quader in Quader überführt werden.

Ist f Treppenfunktion, so ist jedoch $f \circ F_{kl}$ i.A. keine Treppenfunktion mehr. Wegen

$$F_{kl}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k + x_l, \ldots, x_n)$$

ist $f \circ F_{kl}$ konstant auf den Parallelotopen, zu denen sich die Konstanzquader von f verbiegen. Die Funktion $f \circ F_{kl}$ ist aber fast überall stetig (da die Ränder Nullmengen sind) und beschränkt und liegt daher in $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe des Satzes von Fubini führen wir nun die Transformationsformel auf den in (1) behandelten eindimensionalen Fall zurück:

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad & \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_k \cdots dy_n \\
= \quad & |\alpha| \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, \alpha x_k, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n} f \circ F_k(\alpha) |\det F_k(\alpha)| dx.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad & \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_k \cdots dy_n \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_k + x_l, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
= \quad & \int_{\mathbb{R}^n} f \circ F_{kl} |\det F_{kl}| dx.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 9.1 *Ist $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann ist $S \subset \mathbb{R}^n$ genau dann integrierbar, wenn $A(S)$ integrierbar ist. Im Fall der Integrierbarkeit ist*

$$v(A(S)) = |\det A| v(S).$$

Beweis. Dies folgt durch Anwendung von Satz 9.3 auf die charakteristische Funktion 1_S: 1_S ist genau dann integrierbar, wenn $1_{A(S)} = 1_S \circ A^{-1}$ integrierbar ist, und im Fall der Integrierbarkeit gilt

$$
\begin{aligned}
v(A(S)) &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A(S)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A(S)} \circ A |\det A| dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1_S |\det A| dx \\
&= |\det A| v(S).
\end{aligned}
$$

□

Für den Beweis des allgemeinen Transformationssatzes benötigen wir nun ein Lemma, das von J. Schwartz stammt. Dieses Lemma stammt aus der Arbeit: J. Schwartz: The formula for change in variables in a multiple integral. American Math. Monthly **61** (1954), 81–85. (Dieser Artikel ist im Übrigen ein Lehrstück über das Werden eines Satzes und seiner Beweise.) Dieses Lemma findet man auch im Buch von Königsberger.

Wir verwenden im Folgenden die *Maximumsnorm* $|| \ ||_{\max}$ auf dem $\mathbb{R}^n$. Zur Vereinfachung schreiben wir von nun an

$$||x|| := ||x||_{\max} := \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Wir betrachten nun einen allgemeinen Diffeomorphismus $h : U \to V$.

Lemma 9.1 *Es sei $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - p|| \le s\}$ ein abgeschlossener Würfel mit $C \subset U$. Seine Kantenlänge $2s$ sei > 0. Sein Volumen ist dann $v(C) = (2s)^n$ und es gilt die Abschätzung*

$$v(h(C)) \le \int_C |\det h'(x)| dx.$$

Angenommen, wir hätten den Transformationssatz schon bewiesen. Dann wüssten wir:

$$v(h(C)) = \int_V 1_{h(C)} dy = \int_U 1_C |\det h'(x)| dx = \int_C |\det h'(x)| dx,$$

denn $1_{h(C)} = 1_C \circ h^{-1}$. Daraus ergibt sich die folgende *Beweisidee*: Es ist ja "=" gleichbedeutend mit "$\leq$" und "$\geq$". Wir werden aus dem Lemma die Abschätzung

$$\int_V f dy \leq \int_U f \circ h |\det h'| dx$$

folgern. Indem wir in dieser allgemeinen Abschätzung den linken Integranden f durch $f \circ h|\det h'|$ und rechts h durch h^{-1} ersetzen, erhalten wir den Satz. Das Lemma ist also der entscheidende Teil des Beweises des Transformationssatzes.

Beweis von Lemma 9.1. Der Würfel C hat also den Mittelpunkt p. Ist $x \in C$, so gilt $||x-p|| \leq s$ und aus dem Schrankensatz (Analysis II, Satz 5.11) folgt

$$||h(x) - h(p)|| \leq \max_{y \in C} ||h'(y)|| s.$$

(Da C kompakt und h' stetig ist, existiert $\max_{y \in C} ||h'(y)||$.) Folglich liegt $h(C)$ in dem Würfel mit Mittelpunkt $h(p)$ und Kantenlänge

$$2s \max_{y \in C} ||h'(y)||.$$

Da C kompakt ist und h stetig auf C, ist auch $h(C)$ kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt. Daher ist $h(C)$ integrierbar und es gilt

$$v(h(C)) \leq \left(2s \max_{y \in C} ||h'(y)||\right)^n = \left(\max_{y \in C} ||h'(y)||\right)^n v(C).$$

Ersetzen wir h durch $A^{-1} \circ h$, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so ergibt sich

$$v(A^{-1}h(C)) \leq \left(\max_{y \in C} ||A^{-1}h'(y)||\right)^n v(C).$$

Nach Korollar 9.1 gilt:

$$v(A^{-1}h(C)) = |\det A^{-1}| v(h(C)).$$

Es folgt

$$v(h(C)) \leq |\det A| v(C) \left(\max_{y \in C} ||A^{-1}h'(y)||\right)^n.$$

Wir wollen nun das Integral, gegen das wir das Volumen von $h(C)$ abschätzen müssen, durch Riemannsche Summen approximieren. Deswegen unterteilen wir den Würfel C in kleinere Würfel $C_1, \ldots, C_M$ mit Mittelpunkten

$x_1, \ldots, x_M$: Die obige Abschätzung angewendet auf C_k mit $A = h'(x_k)$ ergibt dann

$$v(h(C_k)) \leq |\det h'(x_k)| v(C_k) \left(\max_{y \in C_k} ||h'(x_k)^{-1} h'(y)|| \right)^n .$$

Also ist

$$v(h(C)) \leq \sum_{k=1}^{M} |\det h'(x_k)| v(C_k) \left(\max_{y \in C_k} ||h'(x_k)^{-1} h'(y)|| \right)^n .$$

Da h' nach Voraussetzung stetig ist und C kompakt, ist die Abbildung

$$h' : C \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

gleichmäßig stetig. Daraus folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in C$ mit $||x - y|| < \delta$ gilt

$$||h'(x)h'(y)^{-1}||^n < 1 + \varepsilon.$$

($h'(x)h'(y)^{-1}$ konvergiert gegen die Einheitsmatrix, falls $||x - y|| \to 0$.)

Zerlegen wir nun C in kleine Würfel C_k, so dass die Kantenlänge der C_k kleiner als δ ist, so gilt

$$v(h(C)) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{M} |\det h'(x_k)| v(C_k).$$

Also ist auch für jedes $\varepsilon > 0$

$$v(h(C)) \leq (1 + \varepsilon) \int_C |\det h'(x)| dx,$$

da die Riemannschen Summen der stetigen Funktion $|\det h'|$ nach Satz 5.4 gegen deren Integral konvergieren. Also gilt

$$v(h(C)) \leq \int_C |\det h'| dx.$$

□

Korollar 9.2 *Ist Q ein kompakter nicht ausgearteter Quader in U, dann ist auch*

$$v(h(Q)) \leq \int_Q |\det h'| dx.$$

Beweis. Es gilt $Q = A(C)$ für eine lineare Abbildung A und einen Würfel C. Es gilt:

$$\begin{aligned} v(h \circ A(C)) &\leq \int_C |\det h'(Ax)||\det A|dx \quad \text{(nach Lemma 9.1)} \\ &= \int_Q |\det h'(y)|dy \quad \text{(nach Satz 9.3).} \end{aligned}$$

□

Korollar 9.3 *Es sei Q ein beliebiger Quader, dessen abgeschlossene Hülle $\bar{Q}$ in U liegt. Dann sind Q und $h(Q)$ integrierbar und es gilt*

$$v(h(Q)) \leq \int_Q |\det h'(x)|dx.$$

Beweis. Dies folgt daraus, dass $h(\bar{Q}) \setminus h(Q) = h(\bar{Q} \setminus Q)$ eine Nullmenge ist. Dies gilt nach dem folgenden Lemma. □

Lemma 9.2 *Ist Q ein ausgearteter Quader und $\bar{Q} \subset U$, dann ist $v(h(Q)) = 0$.*

Beweis. Da U offen und $\bar{Q}$ eine Nullmenge ist, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene nicht ausgeartete Quader $Q_1, \ldots, Q_r$, die alle in U liegen, mit

$$\bar{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{r} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{r} v(Q_k) < \varepsilon.$$

Nach Korollar 9.2 gilt dann:

$$v(h(Q)) \leq v(h(\bar{Q}) \leq \sum_{k=1}^{r} \int_{Q_k} |\det h'(x)|dx < K\varepsilon,$$

wobei $K > \max_{x \in \bar{Q}} |\ \det h'(x)|$. □

Wir wollen nun mit Hilfe von Lemma 9.1 die folgende Behauptung zeigen:

Behauptung Für integrierbares $f : V \to \mathbb{R}$ ist auch $f \circ h|\det h'|$ integrierbar und es ist

$$\int_V f dy \leq \int_U f \circ h|\det h'|dx.$$

Da $v(h(Q)) = \int_V 1_{h(Q)} dy$, haben wir die Behauptung offenbar schon für Funktionen f der Form $f = 1_{h(Q)}$ gezeigt; ebenso für Linearkombinationen solcher Funktionen mit *nicht negativen* Koeffizienten (bei negativen Koeffizienten dreht sich die Ungleichung um!).

Wir zeigen nun:

Lemma 9.3 *Es sei $f : V \to \mathbb{R}$ so beschaffen, dass $f \circ h$ eine Treppenfunktion ist, deren Konstanzquader samt abgeschlossenen Hüllen in U liegen. Dann ist $f \in \mathcal{L}^+(V)$ (d.h. $f_V \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$). Ist obendrein $f \geq 0$, so gilt*

$$\int_V f dy \leq \int_U f \circ h |\det h'| dx.$$

Beweis. Es genügt, die erste Behauptung für den Fall zu zeigen, dass $f \circ h = 1_Q$, Q offener Quader mit $\bar{Q} \subset U$.

Wir müssen eine Folge von Treppenfunktionen (s_k) finden, die gegen f konvergiert. Dazu schließen wir $h(Q)$ in einen Würfel der Kantenlänge l ein. Durch fortgesetzte Seitenhalbierung teilt man diesen in immer kleinere Würfel mit Kantenlänge $l \cdot 2^{-k}$ ein. Diese Würfel sind die Konstanzquader von s_k: $s_k = 1$ auf den Würfeln, die ganz in $h(Q)$ liegen, $s_k = 0$ sonst.

Genauso für $f \circ h = c1_Q$, $c \geq 0$. Für $c < 0$: $s_k = c$ auf den Würfeln, die mit $h(Q)$ nicht leeren Durchschnitt haben, $s_k = 0$ sonst.

Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 9.1, wie wir schon bemerkt haben. □

Nun beweisen wir den Transformationssatz für nicht negative Funktionen aus der Klasse $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$:

Satz 9.4 *Ist $f \geq 0$, so gilt: $f \in \mathcal{L}^+(V)$ genau dann, wenn $f \circ h |\det h'| \in \mathcal{L}^+(U)$. Ist beides der Fall, so gilt*

$$\int_V f dy = \int_U f \circ h |\det h'| dx.$$

Beweis. (a) Angenommen, $f \circ h |\det h'| \in \mathcal{L}^+(U)$. Dann gibt es monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen

$$\begin{aligned}
&(s_k), \qquad s_k \geq 0, \ \lim_{k\to\infty} s_k =_v f \circ h |\det h'|, \\
&(t_k), \qquad t_k \geq 0, \ \lim_{k\to\infty} t_k =_v |\det h'|^{-1} \ (\text{da } |\det h'|^{-1} \text{ stetig}), \\
&(u_k), \qquad u_k \geq 0, \ \lim_{k\to\infty} u_k =_v 1_U.
\end{aligned}$$

Dann ist $(s_k t_k u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen $f \circ h$ konvergiert.

Wir erklären nun auf V Funktionen $w_k(y)$ durch

$$s_k t_k u_k(x) = w_k(h(x)).$$

Dann gilt $\lim_{k\to\infty} w_k =_v f$, und nach Lemma 9.3 sind alle $w_k \in \mathcal{L}^+(V)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_V w_k(y) dy &\leq \int_U s_k t_k u_k(x) |\det h'(x)| dx \\
&\leq \int_U f \circ h(x) |\det h'(x)| dx = \text{const.}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.2 (Beppo Levi für $\mathcal{L}^+$) ist also $f(=_v \lim_{k\to\infty} w_k) \in \mathcal{L}^+(V)$ und es gilt

$$\int_V f dy \leq \int_U f \circ h |\det h'| dx.$$

(b) Die Umkehrung folgt aus dem *Symmetrieprinzip*: Wir benutzen, dass wir die erste Hälfte für eine *beliebige* Transformation h bewiesen haben. Statt h nehmen wir h^{-1} und vertauschen U und V!

Offenbar ist für $y \in V$

$$f(y) = f \circ h \circ h^{-1}(y) |\det h'(h^{-1}(y))| |\det(h^{-1})'(y)|.$$

Ist $f \in \mathcal{L}^+(V)$, so folgt nach (a) $f \circ h|\det h'| \in \mathcal{L}^+(V)$ und

$$\begin{aligned} &\int_U f \circ h(x) |\det h'(x)| dx \\ \leq &\int_V f \circ h \circ h^{-1} |\det h'(h^{-1}(y))| |\det(h^{-1})'(y)| dy \\ = &\int_V f(y) dy. \end{aligned}$$

□

Beweis des Transformationssatzes. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(V)$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $f \geq 0$ ist. (Sonst Beweis zunächst für f^+ und f^-. Dann folgt der Satz auch für $f = f^+ - f^-$.) Es sei also $f \geq 0$. Nach Lemma 4.1 können wir $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+(V)$ finden mit $f = g_1 - g_2$ und $g_2 \geq 0$. Da $f \geq 0$, muss dann auch $g_1 \geq 0$ gelten.

Damit ist die Behauptung auf Satz 9.4 zurückgeführt: Nach diesem Satz ist

$$f \circ h |\det h'| = (g_1 - g_2) \circ h |\det h'| = g_1 \circ h |\det h'| - g_2 \circ h |\det h'|$$

in $\mathcal{L}^1(V)$ und es gilt die Transformationsformel.

Die Umkehrung folgt wieder mit dem Symmetrieprinzip.

Damit ist der Transformationssatz vollständig bewiesen. □

Wir halten noch eine Anwendung unserer Sätze fest:

Beispiel 9.3 Ein *Parallelotop* P ist das Bild des Einheitswürfels

$$C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$$

unter einer linearen Abbildung $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Es wird dann von den Vektoren $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ ($e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basisvektoren), d.h. von den Spalten der Matrix A, aufgespannt. Nach Korollar 9.1 hat es das Volumen

$$v(P) = |\det A|.$$

10 Die Räume L^p

Wir geben nun eine Einführung in die Funktionalanalysis. Wir wollen die in der angewandten Mathematik wichtigen L^p-Räume einführen.

Die Menge

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ integrierbar}\}$$

ist ein Vektorraum. Die Menge

$$\mathcal{U}_1 := \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \,|\, f =_v 0\}$$

ist ein Unterraum von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. In der linearen Algebra haben Sie gelernt, dass man den *Quotientenvektorraum*

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{U}_1$$

bilden kann. In diesem Raum werden zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ als gleich angesehen, wenn ihre Differenz $f - g$ in $\mathcal{U}_1$ liegt, d.h. wenn f fast überall gleich g ist. Auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ erklären wir eine Norm $|| \; ||_1$ durch

$$||f + \mathcal{U}_1||_1 := ||f||_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx.$$

Damit wird $L^1(\mathbb{R}^n)$ zu einem normierten Vektorraum:

Satz 10.1 *Der Vektorraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Norm $|| \; ||_1$ ist ein normierter Vektorraum.*

Beweis. Wir müssen die Normeigenschaften (vgl. Analysis II) zeigen. Dazu repräsentieren wir die Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ (dies sind ja Äquivalenzklassen) durch Elemente $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Der Beweis ist dann einfach, wir beweisen als Beispiel nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||f + g||_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f + g| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g| dx \\ &= ||f||_1 + ||g||_1. \end{aligned}$$

□

Ist nun $p > 0$ eine reelle Zahl, so setzt man

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ messbar und } |f|^p \text{ integrierbar}\}.$$

Für $p = 1$ ist das nach Korollar 7.1 gerade unser altbekannter Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 10.2 *$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum.*

Beweis. Es seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f|+|g|)^p \\ &\leq (2\sup(|f|,|g|))^p \\ &\leq 2^p \sup(|f|^p, |g|^p). \end{aligned}$$

Da $|f+g|^p$ messbar ist (Beweis?) und nach Voraussetzung $|f|^p$ und $|g|^p$ und damit auch $2^p \sup(|f|^p, |g|^p)$ integrierbar sind, gilt auch $f+g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. □

Die Menge

$$\mathcal{U}_p := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \mid f =_v 0\}$$

ist wieder ein Unterraum von $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und wir betrachten

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{U}_p.$$

Wir wollen auch $L^p(\mathbb{R}^n)$ zu einem normierten Vektorraum machen. Wie müssen wir die Norm wählen? Wir probieren es mit

$$||f||_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Für $p = 2$ ist diese Norm analog zur euklidischen Norm gebildet.

Satz 10.3 *Für $p \geq 1$ ist $||\ ||_p$ eine Norm auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Nur die Dreiecksungleichung ist zu zeigen, alles andere ist evident. Zum Beweis der Dreicksungleichung für $p > 1$ benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 10.1 *Es seien $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bemerkung 10.1 Für $p = q = 2$ spezialisiert sich diese Ungleichung zu

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (a = \sqrt{\alpha},\ b = \sqrt{\beta}).$$

Dies ist die bekannte Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 10.4 (Höldersche Ungleichung) *Es sei* $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\int |f \cdot g| dx \leq \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei also $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Nach Lemma 10.1 gilt

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{||g||_q^q}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge. Die linke Seite ist sicher messbar, sogar integrierbar, weil die rechte Seite integrierbar ist. Integration liefert

$$\frac{1}{||f||_p ||g||_q} \int |f \cdot g| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Beweis von Satz 10.3. Es ist zu zeigen: Für $p > 1$, $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \quad (\textit{Minkowskische Ungleichung}).$$

Es gilt

$$|f + g|^p \leq |f + g|^{p-1}(|f| + |g|).$$

Alle Funktionen, die hier stehen, sind messbar.

Es sei $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $|f + g|^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, denn $(p-1)q = p$, also $(|f + g|)^{p-1})^q = |f + g|^p$ und $|f + g|^p$ ist integrierbar, da $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Also können wir die Höldersche Ungleichung anwenden:

$$\int |f + g|^p dx \leq \left(\int |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} ||f||_p + \left(\int |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} ||g||_p.$$

Ist $|f + g| = 0$, so ist die Behauptung klar. Andernfalls dividieren wir beide Seiten durch $\left(\int |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$. Es ergibt sich

$$\left(\int |f + g|^p dx \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt die Behauptung. □

Definition Ein *Banachraum* oder *vollständiger* normierter Vektorraum ist ein normierter Vektorraum X, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Eine *Cauchyfolge* ist eine Folge von Elementen $a_n \in X$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt $||a_n - a_m|| < \varepsilon$. Eine Folge (a_n) in X heißt *konvergent gegen* $a \in X$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > n_0$ gilt $||a_n - a|| < \varepsilon$.

In Analysis I und II wurde die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ bewiesen.

Satz 10.5 (Riesz-Fischer) *Für $p \geq 1$ sind die normierten Vektorräume $L^p(\mathbb{R}^n)$ vollständig.*

Beweis. Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ gegeben. Wir wählen eine Folge $m_1 < m_2 < \ldots$ von Indizes derart, dass

$$||f_n - f_{m_k}||_p < \frac{1}{2^k} \quad \text{für} n \geq m_k$$

gilt. Solche Indizes gibt es, da die Folge eine Cauchyfolge ist. (Erst m_1 wählen, dann $m_2 > m_1$, etc.) Betrachte nun die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}|.$$

Behauptung Diese Reihe konvergiert fast überall.

Beweis. Es genügt, die Behauptung auf beliebigen Quadern nachzuweisen. Wir multiplizieren daher alle Reihenglieder mit der charakteristischen Funktion 1_Q eines Quaders Q. Es gilt

$$|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| \cdot 1_Q \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

denn

$$|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1_Q \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\int_Q |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| dx \leq \frac{1}{2^k} \cdot \sqrt[q]{v(Q)}.$$

Daraus folgt, dass die Integrale der Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_{k+1}} - f_{m_k}| \cdot 1_Q$$

durch $\sqrt[q]{v(Q)}$ beschränkt sind. Nach Beppo Levi ist die Reihe also fast überall konvergent (d.h. die Partialsummenfolge ist fast überall konvergent). □

Nach Analysis I ist dann aber auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k}) \cdot 1_Q$$

fast überall konvergent. Die k-te Partialsumme ist aber gerade

$$(f_{m_{k+1}} - f_{m_1})1_Q.$$

Das bedeutet, dass die Folge f_{m_k} fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

Behauptung (i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\lim_{k\to\infty} ||f_k - f||_p = 0$.

Man beachte, dass hier zwei verschiedene Konvergenzbegriffe aufeinander treffen: Wir haben f als Grenzfunktion gefunden, gegen die die Folge (f_k) fast überall konvergiert. Wir müssen zeigen, das die Folge (f_k) auch bezüglich der L^p-Norm gegen f konvergiert. Das ist die Aussage (ii).

Zu (i): Da (f_{m_k}) als Cauchyfolge beschränkt ist, ist auch die Folge $(||f_{m_k}||_p^p)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also gibt es ein $A \in \mathbb{R}$ mit

$$\int |f_{m_k}|^p dx \leq A.$$

Außerdem konvergiert die Folge $(|f_{m_k}|^p)$ fast überall gegen $|f|^p$. Nach dem Lemma von Fatou gehört $|f|^p$ zu $L^1(\mathbb{R}^n)$, also $|f|$ und f zu $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Zu (ii): Für $k > r$, $\nu > m_r$ haben wir

$$||f_\nu - f_{m_k}||_p \leq ||f_\nu - f_{m_r}||_p + ||f_{m_r} - f_{m_k}||_p \leq 2^{-r+1}.$$

Die Folge $(|f_\nu - f_{m_k}|^p)$ konvergiert fast überall gegen $|f_\nu - f|^p$. Die zugehörigen Integrale erfüllen

$$(||f_\nu - f_{m_k}||_p)^p \leq (2^{-r+1})^p.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt also

$$\int |f_\nu - f|^p dx \leq (2^{-r+1})^p,$$

also $||f_\nu - f||_p \leq 2^{-r+1}$. Daraus folgt (ii). □

Ein Nebenresultat des Beweises ist:

Bemerkung 10.2 Ist $f_1, f_2, \ldots$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^n)$, so gibt es eine Teilfolge, die fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Wir führen nun noch eine leichte Verallgemeinerung der L^p-Räume ein. Es sei E eine messbare Menge. Definiere

$$L^p(E) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid f = f_E\}.$$

Offensichtlich ist $L^p(E)$ ein Unterraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ und erbt die Norm $|| \, ||_p$ von $L^p(\mathbb{R}^n)$. Man kann zeigen (Übung), dass $L^p(E)$ in der Topologie von $L^p(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen ist. Damit erhalten wir:

Korollar 10.1 *$L^p(E)$ ist für $p \geq 1$ ein vollständiger normierter Vektorraum.*

Weitere Definitionen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ messbar und} \\ \text{außerhalb einer Nullmenge beschränkt} \end{array} \right\}, \\ L^\infty(\mathbb{R}^n) &:= \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{U}_\infty \text{ wie oben.}\end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren wir:

$$||f||_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Nullmenge } N_c, \text{s.d. } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N_c : |f(x)| \leq c\}.$$

Damit wird auf $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Norm eingeführt. Auch in diesem Fall gilt die Höldersche Ungleichung, wobei man $q = \infty$ als "dualen" Exponenten zu $p = 1$ auffasst:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1.$$

Da die Norm $|| \; ||_\infty$ analog zur Supremumsnorm ist, gilt:

Satz 10.6 (Riesz-Fischer für $p = \infty$) *$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Norm $|| \; ||_\infty$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum.*

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall $p = 2$.

Dann ist auch der duale Exponent $q = 2$. Die Höldersche Ungleichung besagt also gerade, dass mit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ das Produkt $f \cdot g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt und man eine Bilinearform

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g \, dx$$

hat. Diese Bilinearform ist sogar ein Skalarprodukt, d.h. sie ist symmetrisch und positiv definit. Der Vektorraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist also ein euklidischer Vektorraum. Die Norm $|| \; ||_2$ ist gerade die Norm zu diesem Skalarprodukt:

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir wissen obendrein schon, dass dieser euklidische Vektorraum vollständig ist. Damit wird er zu einem Standardbeispiel für einen Hilbertraum.

Definition Ein euklidischer Vektorraum X heißt *Hilbertraum*, wenn er bezüglich der Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.

Es sollen nun Hilberträume studiert werden. Es sei X im Folgenden ein Hilbertraum.

Definition Ist I irgendeine Indexmenge, so heißt eine Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von Vektoren $\varphi_i \in X$ *orthonormal*, wenn $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$ gilt (d.h. $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$, $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ für $i \neq j$).

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, ein $f \in X$ möglichst gut durch Elemente eines Teilraums $S \subset X$, der von einer orthonormalen Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ aufgespannt wird, zu approximieren. Dazu betrachten wir

$$||f - \sum_{i\in J} \gamma_i \varphi_i||,$$

wobei J eine fest gegebene endliche Teilmenge von I ist.Wir suchen nun solche Koeffizienten γ_i, dass obiger Ausdruck minimiert wird.

Anschaulich ist, dass man die γ_i so zu wählen hat, dass $\sum_{i\in J} \gamma_i \varphi_i$ die Projektion von f auf den von den φ_j, $j \in J$, aufgespannten Teilraum S_J ist. Das ist gleichbedeutend mit

$$f - \sum_{i\in J} \gamma_i \varphi_i \text{ steht senkrecht auf } S_J.$$

Da die φ_j den Teilraum S_J aufspannen, ist dies äquivalent zu

$$\langle f - \sum_{i\in J} \gamma_i \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \text{ für alle } j \in J.$$

Da die Familie (φ_i) orthonormal ist, berechnet man aus dieser Gleichung die optimalen Koeffizienten $c_j = \gamma_j^{\text{opt}}$ zu

$$c_j := \langle f, \varphi_j \rangle \text{ für jedes } j \in J.$$

Definition Der Koeffizient $c_j = \langle f, \varphi_j \rangle$ heißt der *Fourierkoeffizient* von f bezüglich φ_j.

Wir wollen nun die Richtigkeit dieser anschaulichen Überlegung nachweisen. Dazu bemerken wir: In euklidischen Vektorräumen gilt der

Satz 10.7 (Satz von Pythagoras) *Ist $\langle a, b \rangle = 0$, so gilt*

$$||a + b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2.$$

Beweis. $\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle$. □

Satz 10.8 (Optimalität der Fourierkoeffizienten) *Ist $(\varphi_i)_{i\in I}$ eine orthonormale Familie in einem euklidischen Raum X, $f \in X$ und J eine endliche Teilmenge von I, so gilt für beliebige Koeffizienten γ_j*

$$||f - \sum_{j\in J} c_j \varphi_j|| \leq ||f - \sum_{j\in J} \gamma_j \varphi_j||.$$

Beweis. Setze

$$a = f - \sum_{j \in J} c_j \varphi_j, \quad b = \sum_{j \in J} (c_j - \gamma_j)\varphi_j.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} a + b &= f - \sum_{j \in J} \gamma_j \varphi_j, \\ \langle a, b \rangle &= \sum_{j \in J} [(c_j - \gamma_j)\langle f, \varphi_j \rangle - (c_j - \gamma_j)c_j] = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz des Pythagoras, da

$$\langle b, b \rangle = \sum_{j \in J} (c_j - \gamma_j)^2 = ||b||^2 \geq 0.$$

□

Satz 10.9 (Besselsche Ungleichung) *Unter den Voraussetzungen von Satz 10.8 gilt*

$$\sum_{j \in J} c_j^2 \leq ||f||^2.$$

Beweis. Der Beweis von Satz 10.8 liefert, wenn alle $\gamma_j = 0$ gesetzt werden:

$$||f||^2 = ||f - \sum_{j \in J} c_j \varphi_j||^2 + \sum_{j \in J} c_j^2.$$

□

In endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen X gilt in der Besselschen Ungleichung die Gleichheit, wenn die φ_j eine ON-Basis von X sind und $J = I$ gilt. Bis hierher brauchten wir nur euklidische Vektorräume.

Nun sei X wieder ein Hilbertraum.

Definition Ein Orthonormalsystem $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Vektoren in X heißt *vollständig* oder eine *Hilbertbasis*, wenn für jedes $f \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Linearkombination $\sum_{j \in J} \gamma_j \varphi_j$, $J \subset I$ endlich, existiert, so dass

$$||f - \sum_{j \in J} c_j \varphi_j|| < \varepsilon.$$

(Es spielt hier keine Rolle, ob man die optimalen Koeffizienten c_j oder die γ_j nimmt. Gibt es nämlich überhaupt eine solche gute Approximation, dann erfüllt die optimale die Abschätzung aufgrund von Satz 10.8 erst recht.)

Es sei nun I abzählbar, o.B.d.A. $I = \mathbb{N}$.

Satz 10.10 (Parsevalsche Vollständigkeitsrelation) *Ein Orthonormalsystem $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist vollständig genau dann, wenn für jedes $f \in X$ gilt:*

$$||f||^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2$$

(d.h. Gleichheit in der Besselschen Ungleichung).

Beweis. "$\Rightarrow$": Ist (φ_i) vollständig, so können wir zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden, so dass für $m > n_0$

$$||f||^2 - \sum_{i=0}^{m} c_i^2 = ||f - \sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i||^2 < \varepsilon^2.$$

Daraus folgt $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 = ||f||^2$.

"$\Leftarrow$": Es sei $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 = ||f||^2$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich also ein n_0 finden, so dass für $m > n_0$

$$||f - \sum_{i=0}^{m} c_i\varphi_i||^2 = ||f||^2 - \sum_{i=0}^{m} c_i^2 < \varepsilon^2.$$

□

Satz 10.11 *Ist $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum X, so gilt für jedes $f \in X$*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i$$

(Konvergenz im Sinne der Hilbertraumnorm).

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis des vorherigen Satzes. □

11 Fourierreihen

Wir betrachten nun Fourierreihen. Sie bilden eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie des Lebesgue-Integrals.

Wir betrachten das Intervall $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$. Nach §10 wissen wir, dass $L^2([-\pi, \pi])$ ein Hilbertraum ist, mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

und Norm

$$||f||_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem in diesem Raum bilden die trigonometrischen Funktionen.

Satz 11.1 *Die Funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx),$$

$m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in* $L^2([-\pi,\pi])$.

Beweis. Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \begin{array}{c} \sin nx \\ \cos mx \end{array} \right\} dx = 0,$$

also hat die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ die Norm 1 und ist zu allen anderen orthogonal. Für $m > 0$ und $n > 0$ ist

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Also gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Analog folgen die anderen Orthonormalitätsrelationen. Man verwendet also die Additionstheoreme und die Periodizität obiger Funktionen. Den Beweis der Vollständigkeit stellen wir noch aus. □

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ lauten:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \, dx,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \, dx,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Definition Die *Fourierreihe* zur Funktion f ist die Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Dies ist die "Fourierreihe" aus Satz 10.11 in klassischer Schreibweise.

In welchem Sinne und gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aus der allgemeinen Theorie wissen wir: In jedem Hilbertraum X konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i$, wenn $c_i = \langle f, \varphi_i\rangle$ ist und (φ_i) ein Orthonormalsystem ist. Vollständig braucht es nicht zu sein. Denn aus der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \leq ||f||^2$$

folgt, dass

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} c_i\varphi \right\|^2 = \sum_{i=m}^{n} c_i^2$$

beliebig klein gemacht werden kann, also die Partialsummen eine Cauchyfolge bilden.

Bemerkung 11.1 Es gilt

$$\langle f - \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i, \varphi_j\rangle = 0 \text{ für jedes } j,$$

denn: Die Gleichnung stimmt für beliebige Partialsummen der Reihe und für beliebiges festes $a \in X$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} l_a: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle x, a\rangle \end{array}$$

stetig, wie aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt:

$$|\langle x - y, a\rangle| \leq ||x - y|| \cdot ||a||.$$

Es ist ja a priori nicht klar, ob die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i$ gegen f konvergiert, aber dass der Fehler auf allen φ_j senkrecht steht. Halten wir fest:

Bemerkung 11.2 Die Fourierreihe konvergiert in $L^2([-\pi, \pi])$.

Wenn wir gezeigt haben, dass die trigonometrischen Funktionen vollständig sind, so folgt aus Satz 10.11:

Satz 11.2 *Für jedes $f \in L^2([-\pi, \pi])$ konvergiert die Fourierreihe gegen f (im Sinne der L^2-Norm).*

Bemerkung 11.3 Man nennt die Konvergenz in der L^2-Norm auch *Konvergenz im quadratischen Mittel*, denn man misst ja die Abweichung von f_n von f durch

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Das ist eine Art Gaußsche Fehlerquadratsumme.

Jetzt kommen wir zum Beweis der Vollständigkeit. Wir betrachten zunächst die Partialsummen der Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) dt.
\end{aligned}$$

Zur Rechnungsvereinfachung schreiben wir sin und cos durch die komplexe Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i \sin x \text{ für } x \in \mathbb{R}, \\
e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} \text{ für } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(e^{i\ \alpha} + e^{-i\alpha} \right).$$

Setzt man $\alpha = x - t$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\alpha}.
\end{aligned}$$

Man erhält also als n-te Partialsumme

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) dt.$$

Man beachte, dass trotz der komplexen Exponentialfunktion der Integrand reell ist.

Definition

$$D_n(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

heißt *Dirichlet-Kern* (weil er als fester Bestandteil in dem obigen Integral steht).

Satz 11.3 *Für jedes $f \in L^1([-\pi, \pi])$ gilt: Die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f an der Stelle x ist gleich*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt.$$

Beim Beweis haben wir bezüglich f nur die Existenz der Fourierkoeffizienten, also die Integrierbarkeit von f benötigt. Daher

Bemerkung 11.4 Alle Fourierkoeffizienten sind definierbar für $f \in L^1([-\pi, \pi])$.

Man beachte, dass gilt:

$$L^2([-\pi, \pi]) \subsetneq L^1([-\pi, \pi]).$$

Die Inklusion folgt aus der Hölderschen Ungleichung. Sie ist echt: für $r > -1$ gilt: $|x|^r \in L^1$, aber $|x|^{-1/2} \notin L^2$.

Wir halten noch fest:

Satz 11.4 (Besselsche Ungleichung für die Fourierreihe) *Für $f \in L^2([-\pi, \pi])$ lautet die Besselsche Ungleichung:*

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Wir führen nun einen neuen Begriff ein.

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* (mit der Periode 2π), wenn für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Bemerkung 11.5 Ein $f \in L^1([-\pi, \pi])$ lässt sich periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Allerdings braucht die Fortsetzung nicht in L^1 zu liegen. Es gilt aber für die periodisch fortgesetzte Funktion:

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ wohldefiniert für } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Ist obendrein $b - a = 2\pi$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \text{ (Beweis: Übung).}$$

Definition Für $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ heißt die Funktion

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t)\, dt$$

die *Faltung* von f und g. ($x - t$ braucht nicht im Intervall zu liegen, aber dann fasse man g als die periodische Fortsetzung auf.)

Warum existiert das Integral? Wegen $f, g \in L^2([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$ ist $(u,v) \mapsto f(u)\cdot g(v)$ eine integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Also existiert das Integral

$$\int_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} f(u)\cdot g(v)\,d(u,v).$$

Die Transformation $t = u$, $x - t = v$, führt dieses Integral über in

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dxdt.$$

Nach Fubini ist also $f * g(x)$ für fast alle x wohldefiniert und $f * g \in L^1([-\pi,\pi])$.

Satz 11.5 *Sind $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$, so ist $f * g = g * f$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt \\ &= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \text{(Substitution } \tau = x-t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)f(x-\tau)\,d\tau \quad \text{(obige Bemerkung)} \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

□

Satz 11.3 kann nun so formuliert werden:

Satz 11.6 *Für jedes $f \in L^1([-\pi,\pi])$ gilt: Die n-te Partialsumme s_n der Fourierreihe von f wird gegeben durch*

$$s_n(x) = f * D_n(x), \text{ wobei } D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Definition

$$K_n = \frac{1}{n}(D_0 + \ldots + D_{n-1})$$

heißt der *Fejer-Kern.*

Diese Kerne lassen sich berechnen:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2\pi}e^{-inx}\frac{1-e^{ix(2n+1)}}{1-e^{ix}} \quad \text{(geom. Reihe)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{-ix(n+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} D_m(x) \\
&= \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1} e^{-imx}\frac{e^{i(2m+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{e^{ix}-1}\sum_{m=0}^{n-1}\left(e^{i(m+1)x}-e^{-imx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{e^{ix}-1}\left[e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}-\frac{e^{-inx}-1}{e^{-ix}-1}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)^2}\left[e^{inx}-1+e^{-inx}-1\right] \\
&= \frac{1}{2\pi n}\frac{\left(e^{i\frac{n}{2}x}-e^{-i\frac{n}{2}x}\right)^2}{\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Definition Eine Folge von Funktionen $\delta_n \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi])$ heißt *Dirac-Folge*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(δ1) Für alle n ist $\delta_n \geq 0$.

(δ2) $\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t)\,dt = 1$.

(δ3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\rho > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$

$$\int_{-\pi}^{-\rho} \delta_n(t)\,dt + \int_{\rho}^{\pi} \delta_n(t)\,dt < \varepsilon.$$

Bemerkung 11.6 Eine Dirac-Folge stellt eine mathematische Version der in der Physik oft benutzten Diracschen „δ-Funktion“ dar. (Dies ist keine Funktion im eigentlichen Sinn, sondern nur eine Distribution.)

Satz 11.7 *Die Folge (K_n) der Fejer-Kerne bildet eine Dirac-Folge.*

Beweis.

(δ1) klar, da Quadrat einer reellen Funktion.

Zu ($\delta 2$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = 1.$$

Zu ($\delta 3$): Wegen der Symmetrie von K_n genügt die Betrachtung von

$$\int_{\rho}^{\pi} K_n(t)\,dt = \int_{\rho}^{\pi} \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

Nun ist

$$|K_n(t)| \le \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\sin^2\frac{\rho}{2}} \text{ für } t \ge \rho > 0.$$

Daraus folgt für genügend große n:

$$0 \le \int_{\rho}^{\pi} K_n(t)\,dt \le \pi\frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\sin^2\frac{\rho}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Betrachten wir nun das arithmetische Mittel der ersten n Partialsummen der Fourierreihe von f:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)).$$

Auch dies ist ein trigonometrisches Polynom, d.h. ein Polynom in $\sin x$ und $\cos x$ bzw. eine Linearkombination des Orthonormalsystems, von dem wir ausgegangen sind. Es gilt

$$\sigma_n = f * K_n.$$

Satz 11.8 (Approximation durch trigonometrische Polynome) *Es sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom h, für das gilt:*

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

Beweis. Betrachte $\sigma_n = f * K_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_n(t)\,dt \qquad (\text{nach } (\delta 2))\\ &= \int_{-\pi}^{\rho} \ldots + \int_{-\rho}^{\pi} \ldots + \int_{-\rho}^{\rho} (f(x-t) - f(x))K_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ist nun M eine Schranke für $|f|$, so ist

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \le 4M\int_{-\pi}^{-\rho} K_n(t)\,dt + \int_{-\rho}^{\rho} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)\,dt.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig stetig ist, ist auch die periodische Fortsetzung von f gleichmäßig stetig. Deswegen gibt es $\rho > 0$, so dass für jedes t mit $|t| < \rho$ und jedes x gilt:

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nach ($\delta 3$) können wir zu den so bestimmten ε und ρ ein N finden, so dass für $n > N$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{-\rho} K_n(t)\, dt + \int_{\rho}^{\pi} K_n(t)\, dt < \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon.$$

Wir haben also bewiesen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein trigonometrische Polynom (nämlich σ_n), so dass

$$\max_{x \in [-\pi,\pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \text{const.}\varepsilon,$$

wobei die Konstante nur von f abhängt. □

Korollar 11.1 (Satz von Fejer) *Die Folge (σ_n) konvergiert gleichmäßig gegen f.*

Bemerkung 11.7 Ist $\max_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x) - h(x)| < \varepsilon$, so ist

$$||f - h||_2 < \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

Also folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auch die Konvergenz in der L^2-Norm.

Wir können nun den Beweis von Satz 11.1 vervollständigen.

Beweis von Satz 11.1. Es ist noch zu zeigen: Zu jedem $f \in L^2([-\pi, \pi])$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein trigonometrisches Polynom h mit

$$||f - h||_2 < \varepsilon.$$

Dies zeigen wir in drei Schritten: Wir zeigen:

(1) Zu jedem $f \in L^2([-\pi, \pi])$ gibt es eine Treppenfunktion t mit Träger in $[-\pi, \pi]$ und $||f - t||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

(2) Zu t gibt es eine stetige Funktion g mit $||t - g||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

(3) Zu g gibt es ein trigonometrisches Polynom h mit $||g - h||_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

Die Aussage (3) folgt aus Satz 11.8 und der obigen Bemerkung.

Zu (2): Es genügt, dies für $t = 1_I$, $I \subset [-\pi, \pi]$ Intervall, zu zeigen, da Treppenfunktionen endliche Linearkombinationen solcher Funktionen sind. Übung!

Zu (1): Wir nehmen zuerst an, dass f beschränkt ist, etwa $|f| \leq M$. Da f messbar ist, gibt es eine Folge (s_k) von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert. Wir können annehmen, dass jede Funktion s_k ebenfalls durch M beschränkt ist. Insbesondere ist dann

$$(f - s_k)^2 \leq 4M^2.$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist dann

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f - s_k)^2 \, dx = 0,$$

also auch

$$\lim_{k\to\infty} ||f - s_k||_2 = 0.$$

Ist nun $f \in L^2([-\pi, \pi])$ beliebig, so schneiden wir f ab:

$$f_k := \inf(k, \sup(f, -k)) \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $((f - f_k)^2)$ eine monoton fallende Folge, die fast überall gegen 0 konvergiert. Alle Integrale sind ≥ 0, also lässt sich der Satz von Beppo Levi anwenden:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_k)^2 \, dx = 0.$$

Also gilt auch

$$\lim_{k\to\infty} ||f - f_k||_2 = 0.$$

□

Nach der allgemeinen Theorie aus §10 haben wir damit auch bewiesen.

Satz 11.9 (Parsevalsche Vollständigkeitsrelation für Fourierreihe) *Für $f \in L^2([-\pi, \pi])$ gilt*

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx,$$

d.h. in Satz 11.4 gilt die Gleichheit.

Konvergiert nun eigentlich die Partialsummenfolge der Fourierreihe einer Funktion f punktweise gegen f? Das ist eine i.A. komplizierte Frage.

Warnung Es gibt Beispiele stetiger Funktionen, deren Fourierreihen *nicht* gegen die Funktion punktweise konvergieren.

Man beachte, dass der Satz von Fejer etwas über die arithmetischen Mittel der Partialsummen aussagt.

12 Differentialformen

Es sollen nun die Integralsätze behandelt werden, insbesondere der Satz von Stokes. Der Satz von Stokes kann als ein höherdimensionales Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung betrachtet werden. Die Schwierigkeit liegt in der Formulierung dieses Satzes. Die eleganteste Formulierung ist mit Hilfe des Differentialformenkalküls möglich. Dieser Kalkül soll nun eingeführt werden.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei

$$C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ beliebig oft differenzierbar}\}.$$

Wir betrachten nun Symbole

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n,$$

mit denen wie folgt gerechnet werden darf

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \text{ für } i, j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Auf diese Weise gewinnen wir eine „Algebra“ über dem Ring $C^\infty(U)$. Sie entsteht aus $C^\infty(U)$ durch „Adjunktion“ der Symbole dx_i unter Verwendung der Relationen (1). Dies soll nun präzisiert werden.

Wir betrachten zunächst Ausdrücke der Form

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n,$$

wobei $a_i \in C^\infty(U)$, also die Koeffizienten Funktionen sind. Wir betrachten zwei solche Ausdrücke als gleich, wenn alle Koeffizientenfunktionen a_i übereinstimmen. Einen solchen Ausdruck nennen wir eine *Differentialform vom Grad* 1. Wir setzen

$$\Omega^1(U) := \{\text{Differentialformen vom Grad 1}\}.$$

Funktionen betrachten wir als *Differentialformen vom Grad* 0, d.h. wir setzen

$$\Omega^0(U) := C^\infty(U).$$

Nun konstruieren wir $\Omega^2(U)$. Dabei sollen Ausdrücke in den dx_i vorkommen, die homogen vom Grad 2 in den dx_i sind:

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

$a_{ij} \in C^\infty(U)$, ist eine *Differentialform vom Grad* 2.

$$\Omega^2(U) := \{\text{Differentialformen vom Grad } 2\}.$$

Man gibt sich also eine Differentialform zweiten Grades, indem man sich die Koeffizientenfunktionen a_{ij} gibt. Die $dx_i \wedge dx_j$ mit $i < j$ bilden also eine Basis von $\Omega^2(U)$, dem sogenannten „freien von den $dx_i \wedge dx_j$ $(i < j)$ erzeugten $C^\infty(U)$-Modul".

Für beliebige $p \geq 1$ nehmen wir als Basis von $\Omega^p(u)$ die Menge der

$$\binom{n}{p} \text{ „\textit{Monome}" } dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \text{ mit } i_1 < i_2 < \ldots < i_p.$$

(Als Basis von $\Omega^0(U)$ hat man die konstante Funktion 1. Basis von $\Omega^1(U)$: $dx_1, \ldots, dx_n$. Also hat man auch in den Fällen $p = 0, 1$ eine Basis von $\Omega^p(U)$ der Mächtigkeit $\binom{n}{p}$).

Für $p \geq 1$ sieht eine *Differentialform vom Grad p*, kurz eine *p-Form*, dann wie folgt aus:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Eine solche p-Form gibt man sich wieder durch Angabe der Koeffizienten $a_{i_1 \ldots i_p} \in C^\infty(U)$. In der Sprache der linearen Algebra heißt das, dass $\Omega^p(U)$ der freie $C^\infty(U)$-Modul ist, der frei von den $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ erzeugt wird.

Wie sieht nun eine n-Form aus? Offenbar so:

$$\omega = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei a ein wohlbestimmtes Element von $C^\infty(U)$ ist.

Wir erklären nun eine Multiplikation

$$\Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U) :$$

Sind $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$, etwa

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \\ \beta &= \sum_{j_1 < \ldots < j_q} a_{j_1 \ldots j_q} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}, \end{aligned}$$

so ist ihr Produkt unter Berücksichtigung der Rechenregeln (1) auf absolut naheliegende Weise zu bilden. (Distributivgesetz und Assoziativgesetz setzen wir stets voraus.) Also soll man $\alpha \wedge \beta$ nur ausdistribuieren:

$$\alpha \wedge \beta = \sum a_{i_1 \ldots i_p} b_{j_1 \ldots j_q} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

Dabei erstreckt sich die Summe über alle $i_1 < \ldots < i_p$ und $j_1 < \ldots < j_q$. Hat man die dx_k vermöge der Rechenregeln (1) in ihre gewöhnliche Reihenfolge gebracht und zusammengefasst, so hat dieses Produkt wieder die Form

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i_1 < \ldots < i_{p+q}} c_{i_1 \ldots i_{p+q}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p+q}}.$$

Satz 12.1 *Gegeben seien n 1-Formen:*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} dx_1 + \ldots + a_{1n} dx_n, \\ \vdots \;&\;\vdots\;\; \vdots \\ \alpha_n &= a_{n1} dx_1 + \ldots + a_{nn} dx_n. \end{aligned}$$

Dann hat das Produkt dieser Formen die Gestalt

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = a dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $a = \det(a_{ij})$.

Beweis. Beim Ausdistribuieren erhält man im Prinzip n^n Terme, die meistens verschwinden, nämlich wenn in einem der Dachprodukte ein dx_i doppelt vorkommt. Es bleiben daher nur

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n},$$

wobei zu summieren ist über alle Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$, d.h.

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(n)}.$$

Hierbei ist $\mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Die Symbole $dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(n)}$ sind bis aufs Vorzeichen alle gleich. Bringt man sie in die richtige Reihenfolge, so erhält man gerade das Vorzeichen $\operatorname{sign}(\sigma)$ (siehe Lineare Algebra). Also ist

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Der Koeffizient in der Klammer ist aber bekanntlich gerade $\det(a_{ij})$. □

Notation Wir werden im Folgenden die Dächer $\wedge$ auch oft weglassen.

Wir betrachten nun den wichtigen Spezialfall $\mathbb{R}^3$, U sei also offen in $\mathbb{R}^3$. Dann haben die Differentialformen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Omega^0(U) :&\quad a, \\ \Omega^1(U) :&\quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3, \\ \Omega^2(U) :&\quad b_1 dx_2 dx_3 + b_2 dx_3 dx_1 + b_3 dx_1 dx_2, \\ \Omega^3(U) :&\quad b dx_1 dx_2 dx_3, \\ \Omega^k(U) =&\{0\} \text{ für } k > 3. \end{aligned}$$

Die 1-Formen nennen die Physiker auch *Vektorfelder*, man wird sehen, dass sie sich längs Wegen integrieren lassen. Man beachte, dass die Indizes der 2-Formen durch zyklische Vertauschung ineinander übergehen. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies die übliche Normalform.

Als interesssante Produkte erhält man bloß: 1-Form $\wedge$ 1-Form und 1-Form $\wedge$ 2-Form, sonst wird der Grad zu groß. Betrachten wir zunächst den Fall 1-Form $\wedge$ 2-Form:

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3, \\
\beta &= b_1dx_2dx_3 + b_2dx_3dx_1 + b_3dx_1dx_2, \\
\alpha \wedge \beta &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)dx_1dx_2dx_3 \\
&= \beta \wedge \alpha.
\end{aligned}$$

Das ist etwas überraschend, da die Kommutativität des Produktes nicht verlangt ist, sogar i.A. nicht gegeben ist. Es gilt vielmehr

Satz 12.2 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$, so ist*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Beweis. Wegen der Distributivität genügt es, das für Monome

$$\alpha = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \quad \beta = dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$$

einzusehen. Um also aus

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$$

das Monom

$$dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

entstehen zu lassen, muss man erst dx_{j_1} mit den p Symbolen dx_{i_k} vertauschen (p Vorzeichenwechsel), dann dx_{j_2} (weitere p Vorzeichenwechsel), etc. Das resultierende Vorzeichen ist also

$$((-1)^p)^q = (-1)^{pq}.$$

□

Korollar 12.1 *Ist p ungerade und $\alpha \in \Omega^p(U)$, so ist*

$$\alpha \wedge \alpha = 0.$$

Man vergleiche dies mit der Diskriminante: Vertauscht man in einem Produkt von n 1-Formen $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ zwei verschiedene α_i, so erhält man ein Vorzeichen -1 (Beweis Übung!). Dem entspricht in der Theorie der Determinanten, dass die Determinante bei Zeilen- und Spaltenvertauschungen ihr Vorzeichen wechselt.

Multiplizieren wir nun zwei 1-Formen $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \\ \beta &= b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 \\ \Rightarrow \alpha \wedge \beta &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) dx_2 dx_3 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dx_3 dx_1 \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Wegen $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ kann man im $\mathbb{R}^3$ sowohl 1-Formen als auch 2-Formen als *Vektorfelder*, nämlich als Abbildungen $U \to \mathbb{R}^3$, auffassen. Das Produkt zweier 1-Formen entspricht dem *Kreuzprodukt*:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also: Das Produkt einer 1-Form im $\mathbb{R}^3$ mit einer 2-Form entspricht dem euklidischen Skalarprodukt, das Produkt zweier 1-Formen dem Kreuzprodukt. Wir erinnern daran, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ derjenige Vektor ist, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, die Länge

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

hat und durch die Rechtsschraubenregel bestimmt ist: Dreht man $\vec{a}$ in $\vec{b}$, so gibt $\vec{a} \times \vec{b}$ die Richtung an, in der sich eine Rechtsschraube bewegt. Insbesondere entsprechen den Gleichungen

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

die Gleichungen

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha = (\alpha \wedge \beta) \wedge \beta = 0.$$

Wir wollen nun Differentialformen differenzieren.

Sei dazu $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. (Erst jetzt wird es überhaupt wichtig, dass die Koeffizienten der Differentialformen Funktionen sind.) Wir setzen

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

(Hier sieht man auch, warum es bequem ist, $f \in C^\infty(U)$ zu nehmen: die partiellen Ableitungen sind wieder in $C^\infty(U)$, sonst müsste man andauernd überlegen, ob die entsprechende Ableitung überhaupt noch existiert.)

Bemerkung 12.1 Man kann ja auch die i-te Komponente von $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ als Funktion $x_i : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$, auffassen. Deren Ableitung dx_i ist aber gerade

$$dx_i = 0dx_1 + \ldots + 0dx_{i-1} + 1dx_i + 0dx_{i+1} + \ldots + 0dx_n.$$

Also ist

$$dx_i = dx_i.$$

Die beiden Symbole dx_i in dieser Gleichung haben unterschiedliche Bedeutungen und die Gleichung zeigt, dass beide Bedeutungen verträglich sind.

Definition Für $\omega \in \Omega^p(U)$,

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

ist die *(äußere) Ableitung* $d\omega \in \Omega^{p+1}(U)$ definiert durch

$$d\omega := \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(a_{i_1\ldots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Beispiel 12.1 Im $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
&d(a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3)\\
&= da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 + da_3 \wedge dx_3\\
&= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_2\\
&\quad + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}dx_3\right) \wedge dx_3\\
&= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3dx_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

Fasst man nun wieder 1-Formen und 2-Formen als Vektorfelder in $U \subset \mathbb{R}^3$ auf, so entsteht aus dem Vektorfeld $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ durch Differenzieren ein neues Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \vec{a} := \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right),$$

das *Rotation von* $\vec{a}$ genannt wird.

Bemerkung 12.2 Die Abbildung $d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ ist $\mathbb{R}$-linear (aber nicht $C^\infty(U)$-linear!).

Satz 12.3 (Produktregel) *Ist* $U \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$, *dann ist*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

Beweis. (a) Zunächst für $p = q = 0$, also für Funktionen:

Zu zeigen: $d(f \wedge g) = df \wedge g + f \wedge dg$. (Man beachte $f \wedge g = f \cdot g$.)

$$\begin{aligned} d(f \wedge g) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f \cdot g}{\partial x_i} dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \cdot g + f \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= df \wedge g + f \wedge dg. \end{aligned}$$

(b) Nun für beliebige p, q. Da d ein $\mathbb{R}$-linearer Operator ist, genügt es, die Formel für den Fall zu beweisen, dass

$$\alpha = a dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \text{ und } \beta = b dx_{j_1} \dots dx_{j_q}.$$

Dann gilt

$$\alpha \wedge \beta = ab dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q},$$

also

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= (da \cdot b + adb) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q} \\ &= da dx_{i_1} \dots dx_{i_p} b dx_{j_1} \dots dx_{j_q} \\ &\quad + (-1)^p a dx_{i_1} \dots dx_{i_p} db dx_{j_1} \dots dx_{j_q}, \end{aligned}$$

denn im ersten Fall vertauscht man eine 0-Form mit einer p-Form, im zweiten Fall eine 1-Form mit einer p-Form. □

Satz 12.4 *Für jedes p und jedes $\alpha \in \Omega^p(U)$ ist*

$$d(d\alpha) = 0.$$

Beweis. (a) Zunächst für $p = 0$, also für $f \in \Omega^0(U)$.

$$\begin{aligned} ddf &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \right) dx_i \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \sum_{i=j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j = 0. \end{aligned}$$

(b) Nun für beliebiges p. Aufgrund der $\mathbb{R}$-Linearität von d genügt es, $dd\alpha = 0$ für ein Monom
$$\alpha = a dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$
zu zeigen:
$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(da dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) \\ &= dda \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} - da \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \\ &= 0, \end{aligned}$$
wie iteriertes Anwenden der Produktregel ergibt. □

Definition Eine p-Form α heißt *geschlossen*, wenn $d\alpha = 0$. Eine p-Form α heißt *exakt*, wenn es ein $\beta \in \Omega^{p-1}(U)$ gibt, so dass $d\beta = \alpha$. (Die $(p-1)$-Form β ist also so etwas wie eine „Stammfunktion“.)

Korollar 12.2 *Ist α exakt, so ist α geschlossen.*

Beweis. α exakt $\Rightarrow \alpha = d\beta \Rightarrow d\alpha = d(d\beta) = 0$. □

Bemerkung 12.3 Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,
$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
ist geschlossen, aber nicht exakt (Übungsaufgabe).

Die Menge
$$Z^p(U) = \{\alpha \in \Omega^p(U) \mid d\alpha = 0\},$$
also die Menge der geschlossenen p-Formen, ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Obendrein ist
$$Z^p(U) = \mathrm{Kern}\,(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)),$$
wobei mit Kern der Kern der linearen Abbildung gemeint ist. Die Menge
$$\begin{aligned} B^p(U) &:= \{\alpha \in \Omega^p(U) \mid \exists \beta \in \Omega^{p-1}(U) \text{ so dass } d\beta = \alpha\} \\ &= \mathrm{Bild}\,(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)) \end{aligned}$$
ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Damit dies auch für $p = 0$ definiert ist, setzen wir $\Omega^p(U) = 0$ für $p < 0$.)

Die Abkürzungen Z und B stammen aus der algebraischen Topologie. Dort nennt man gewisse Objekte, die keinen Rand haben – $\partial\sigma = 0$ –, Zyklen und gewisse andere, die selbst Rand sind – $\sigma = \partial\tau$ –, eben Ränder (boundaries). Unsere Z^p und B^p haben etwas mit zu Zyklen und Rändern dualen Objekten zu tun, mit Kozyklen und Korändern.

Die Vektorräume, die wir eingeführt haben, sind i.A. unendlich dimensionale Vektorräume. Aus Satz 12.4 folgt:

$$B^p(U) \subset Z^p(U).$$

Damit ist $B^p(U)$ ein Untervektorraum von $Z^p(U)$ und wir können den Quotientenvektorraum

$$H^p(U;\mathbb{R}) = Z^p(U)/B^p(U)$$

betrachten. Dieser Vektorraum heißt die *p-te Kohomologiegruppe* von U (mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$). Interessant ist dabei, dass selbst wenn $Z^p(U)$ und $B^p(U)$ unendlich dimensionale Vektorräume sind, der Vektorraum $H^p(U;\mathbb{R})$ durchaus endlich dimensional sein kann. Offenbar ist $H^p(U;\mathbb{R}) \neq 0$ genau dann, wenn es in U eine geschlossene, aber nicht exakte p-Form gibt.

Beispiel 12.2 (a) Es gilt

$$H^0(U;\mathbb{R}) = Z^0(U)/\{0\} = \{f \in \Omega^0(U) \mid df = 0\}.$$

Nun gilt aber

$$df = 0 \Leftrightarrow \text{ alle } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ verschwinden in } U.$$

Es sei nun U wegzusammenhängend, d.h. zu je zwei Punkten $x, y \in U$ gibt es einen Weg, also eine C^∞-Abbildung $\gamma : [0,1] \to U$, so dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Es sei $f \in \Omega^0(U)$ mit $df = 0$. Dann ist $f \circ \gamma$ längs allen Wegen γ in U konstant, denn es gilt $(f \circ \gamma)' = 0$. Also ist f auf U konstant. Ist U wegzusammenhängend, so gilt also

$$H^0(U;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

(b) Nach der obigen Bemerkung gilt $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\};\mathbb{R}) \neq 0$. Tatsächlich kann man zeigen

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\};\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Soweit unser kurzer Ausflug in die algebraische Topologie.

Liften von Formen

Wir wollen nun Differentialformen auf verschiedenen Mengen miteinander vergleichen und zwar im folgenden Sinne:

Gegeben seien offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^∞-differenzierbare Abbildung

$$h : U \to V.$$

Hierzu wollen wir für jedes $p \geq 0$ eine lineare Abbildung

$$h^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$$

konstruieren, die mit dem $\wedge$-Produkt und dem Differentialoperator d verträglich ist. (Eigentlich müssten wir , wie auch bei d, an h^* eine Index p schrieben, da zu verschiedenen p verschiedene h^* gehören, aber wir wollen die Notation nicht unnötig überfrachten.)

Beginnen wir also mit $p = 0$:

$$\begin{array}{rlcl} h^*: & \Omega^0(V) = C^\infty(V) & \longrightarrow & \Omega^0(U) = c^\infty(U) \\ & a & \longmapsto & h^*(a) = a \circ h) \end{array} .$$

Da h^* mit Produkten verträglich sein soll, wollen wir nun erklären, was

$$h^*(dy_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

bedeuten soll.

Notation $x = (x_1, \dots, x_m)$ Punkte in U, $y = (y_1, \dots, y_n)$ Punkte in V, $h_1, \dots, h_n$ Komponentenfunktionen von h.

Wir setzen nun

$$h^*(dy_i) := \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Betrachten wir einmal die Gleichung

$$h^*(dy_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j = dy_i,$$

also $h^*(dy_i) = dy_i)$. Wie ist das zu verstehen? Links ist dy_i die 1-Form, rechts y_i die i-te Koordinatenfunktion und dy_i ihr Differential. Die Variable y_i ist dort also als Funktion aufzufassen. Nun die allgemeine Definition:

Definition Für eine p-Form

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} dy_{i_1} \dots dy_{i_p} \in \Omega^p(V)$$

setzen wir

$$\begin{aligned} h^*(\alpha) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_p} h^*(a_{i_1 \dots i_p}) h^*(dy_{i_1}) \dots h^*(dy_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} (a_{i_1 \dots i_p} \circ h) dy_{i_1} \dots dy_{i_p}, \end{aligned}$$

wobei nun die y_i als Koordinatenfunktionen aufzufassen sind.

Satz 12.5 (i) $h^*(\alpha \wedge \beta) = h^*\alpha \wedge h^*\beta$.

(ii) $d(h^*\alpha) = h^*(d\alpha)$.

Beweis. (i) ist klar nach Definition.

Zu (ii): Zunächst $p = 0$, $\alpha = a \in \Omega^0(V)$:

$$\begin{aligned} d(h^*a) &= d(a \circ h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(a \circ h)(x)dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial y_i}(h(x))\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)dx_j \quad \text{(Kettenregel)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h^*\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right) h^*(dy_i) \\ &= h^*\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial y_i}dy_i\right) = h^*(da). \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p} dy_{i_1}\ldots dy_{i_p} \\ \Rightarrow\quad h^*(\alpha) &= \sum_{i_1<\ldots<i_p} (a_{i_1\ldots i_p}\circ h)h^*(dy_{i_1})\ldots h^*(dy_{i_p}) \\ \Rightarrow\quad dh^*\alpha &= \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(a_{i_1\ldots i_p}\circ h)dy_{i_1}\ldots dy_{i_p}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $y_{i_1},\ldots y_{i_p}$ als Funktionen aufgefasst und $dd = 0$ verwendet. Damit folgt:

$$dh^*\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} h^*(da_{i_1\ldots i_p})h^*(dy_{i_1})\ldots h^*(dy_{i_p}) = h^*(d\alpha).$$

□

Beispiel 12.3 $m = n$, Liften einer n-Form $ady_1 \ldots dy_n$:

$$\begin{aligned} h^*(ady_1\ldots dy_n) &= a\circ h\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_1}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_n}{\partial x_j}dx_j\right) \\ &= a\circ h \det h' dx_1\ldots dx_n. \end{aligned}$$

Integration von Formen

Definition Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine n-Form $ady_1 \ldots dy_n$ heißt *über V integrierbar*, wenn a über V integrierbar ist, und das *Integral* von $ady_1 \ldots dy_n$ über V ist dann definiert durch

$$\int_V ady_1\ldots dy_n := \int_V ad(y_1,\ldots,dy_n).$$

Auf der rechten Seite steht dabei das Lebesgue-Integral.

Bemerkung 12.4 Den Transformationssatz kann man damit so formulieren: Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $h : U \to V$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Zusätzlich gelte $\det h' > 0$ (d.h. h ist „orientierungserhaltend"). Dann gilt: $\omega \in \Omega^n(V)$ ist genau dann integrierbar, wenn $h^*\omega \in \Omega^n(U)$ integrierbar ist. Im Falle der Integrierbarkeit ist

$$\int_{h(U)} \omega = \int_U h^*(\omega).$$

Es sollen nun allgemeiner p-Formen über p-dimensionalen Mengen integriert werden.

Anschaulich wird man sicherlich das Bild $h(U)$ einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^p$ unter einer injektiven differenzierbaren Abbildung $h : U \to \mathbb{R}^n$ $(n > p)$ für eine p-dimensionale Menge im $\mathbb{R}^n$ halten. Wir nehmen also an: $h(U) \subset V \subset \mathbb{R}^n$, V offen, ω eine p-Form in V. Dann wollen wir definieren

$$\int_{h(U)} \omega := \int_U h^*(\omega),$$

sofern das zweite Integral existiert. Wir verwenden also die Transformationsformel zur Definition.

Allgemeiner definieren wir:

Definition Eine *p-dimensionale singuläre Menge* ist eine C^∞-Abbildung $h : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen.

Warnung Die Abbildung h gibt die Parameterdarstellung der p-dimensionalen singulären „Menge" an, sie gehört mit dazu!

Beispiel 12.4 Die obere Hemisphäre (hier ist h injektiv), aber auch Flächen mit Selbstdurchdringungen oder sogar Punkte (h nicht injektiv).

Definition Ist $h : U \to \mathbb{R}^m$ eine p-dimensionale singuläre Menge mit $h(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$, V offen, ω eine p-Form auf V und existiert $\int_u h^*\omega$, so setzen wir

$$\int_{h(U)} \omega := \int_U h^*\omega.$$

Warnung Diese Schreibweise ist gefährlich! Sie suggeriert die falsche Vorstellung, dass man das Integral über die Bildmenge bildet. Wesentlicher Bestandteil des Integrals $\int_{h(U)} \omega$ ist aber die Parameterdarstellung $h : U \to \mathbb{R}^m$.

Konkret bedeutet das: Bezeichnen wir mit $(u_1, \ldots, u_p)$ die Koordinaten von U, so lässt sich $h^*\omega$ schreiben als

$$f(u_1, \ldots, u_p)du_1 \ldots du_p$$

und $\int_U h^*\omega$ ist das Lebesgue-Integral von f über U, falls dieses existiert.

Ist nun $A \subset U$ kompakt, so definieren wir

$$\int_{h(A)} \omega := \int_A h^*\omega.$$

Wir zeigen nun, dass die so erklärten Integrale nicht von der verwendeten Parameterdarstellung h abhängen. Dazu zunächst:

Satz 12.6 (Funktorialität des Liftens) *Gegeben seien C^*-Abbildungen $g : U \to V$, $h : V \to W$, $U \subset \mathbb{R}^l$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für die Abbildungen $h^* : \Omega^p(W) \to \Omega^p(V)$, $g^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$:*

$$g^* \circ h^* = (h \circ g)^*.$$

Beweis. (a) Für $a \in \Omega^0(W)$:

$$(h \circ g)^* a = a \circ h \circ g = (a \circ h) \circ g = g^*(h^* a).$$

(b) Für dz_j: (Wir bezeichnen die Koordinaten von W mit $(z_1, \ldots, z_m)$.)

$$(h \circ g)^* dz_j = d((h \circ g)^* z_j) = d(z_j \circ h \circ g) = g^* d(z_j \circ h) = g^* h^* dz_j.$$

Dabei haben wir Satz 12.5 angewandt. □

Satz 12.7 (Parameterwechsel) *Es seien $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ offen und $g : \widetilde{U} \to U$ ein* Parameterwechsel*, d.h. eine bijektive, in beiden Richtungen C^∞-differenzierbare Abbildung. Außerdem wird vorausgesetzt:*

$$\det g'(\widetilde{u}) > 0 \text{ für alle } \widetilde{u} \in \widetilde{U}.$$

Dann gilt: $h^*\omega$ ist genau dann integrierbar, wenn $(h \circ g)^*\omega$ integrierbar ist, und im Falle der Integrierbarkeit gilt:

$$\int_U h^*\omega = \int_{\widetilde{U}} (h \circ g)^*\omega.$$

Beweis. Dies ist wieder der Transformationssatz! Nach Satz 12.6 gilt

$$(h \circ g)^*\omega = g^* h^*\omega.$$

Ist

$$h^*\omega = f(u_1, \ldots, u_p)du_1 \ldots du_p,$$

so ist nach obigem Beispiel

$$g^* h^*\omega = f \circ g \det g'(\widetilde{u}) d\widetilde{u}_1 \ldots d\widetilde{u}_p$$

und die Behauptung folgt aus dem Transformationssatz. □

13 Der Satz von Stokes

Wir beginnen jetzt mit der Diskussion des Satzes von Stokes.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $h : U \to \mathbb{R}^m$ eine p-dimensionale Menge, $A \subset U$ kompakt und $c = h(A)$. Der Rand von c sei ∂c. Zum Beispiel sei c ein Rechteck mit Rand ∂c. Dann besagt der

Satz von Stokes

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega,$$

wobei ω eine $(p-1)$-Form ist.

Man beachte

$$\begin{aligned} \dim c &= \operatorname{Grad} d\omega = p, \\ \dim \partial c &= \operatorname{Grad} \omega = p-1, \end{aligned}$$

oder: links wird eine p-Form über eine p-dimensionale Menge, rechts eine $(p-1)$-Form über eine $(p-1)$-dimensionale Menge integriert. Die Zuordnung

$$(q\text{-Form } \alpha, q\text{-dim. sing. Menge } \sigma) \mapsto \int_\sigma \alpha =: \langle \alpha, \sigma \rangle$$

ist ein Beispiel für eine „Paarung“. In dieser Notation lautet der Satz von Stokes

$$\langle d\omega, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle,$$

und die Interpretation dieser Gleichung ist, dass die topologische Randbildung ∂c und die analytische Randbildung $d\omega$ einander entsprechen.

Wir werden nun verschiedene Formen des Satzes von Stokes betrachten. Zunächst wollen wir den Satz von Stokes für ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ beweisen.

Satz 13.1 (Satz von Stokes für Rechteck im $\mathbb{R}^2$) *Es sei $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$, ω eine 1-Form auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $R \subset V$. Dann gilt*

$$\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega.$$

Beweis. Wir parametrisieren den Rand von R durch

$$\begin{aligned} \gamma_2^0 &: t \mapsto (t, a_2), \\ \gamma_1^1 &: t \mapsto (b_1, t), \\ \gamma_2^1 &: t \mapsto (a_1 + b_1 - t, b_2), \\ \gamma_1^0 &: t \mapsto (a_1, a_2 + b_2 - t). \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\omega = f(x_1, x_2) dx_1 + g(x_1, x_2) dx_2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, a_2) dx_1 + \int_{a_1}^{b_1} g(x_1, a_2) dx_2 \\
&\quad + \int_{a_2}^{b_2} f(b_1, x_2) dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} g(b_1, x_2) dx_2 \\
&\quad + \int_{b_1}^{a_1} f(x_1, b_2) dx_1 + \int_{b_1}^{a_1} g(x_1, b_2) dx_2 \\
&\quad + \int_{b_2}^{a_2} f(a_1, x_2) dx_1 + \int_{b_2}^{a_2} g(a_1, x_2) dx_2 \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, a_2) dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} g(b_1, x_2) dx_2 \\
&\quad - \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, b_2) dx_1 - \int_{a_2}^{b_2} g(a_1, x_2) dx_2 \\
&= -\int_{a_1}^{b_1} (f(x_1, b_2) - f(x_1, a_2)) dx_1 \\
&\quad + \int_{a_2}^{b_2} (g(b_1, x_2) - g(a_1, x_2)) dx_2.
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \omega &= -\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_R \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \text{ (nach Fubini)} \\
&= \int_R d\omega.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen diesen Satz nun auf den Fall eines n-dimensionalen Quaders

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Dazu benötigen wir den Begriff der

Orientierung

Man sagt, eine Basis $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eines n-dimensionalen Vektorraums X definiert eine *Orientierung* von X. Dabei ist die Reihenfolge der Basisvektoren entscheidend: Ein n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ von Basisvektoren heißt auch *geordnete* Basis von X.

Je zwei Basen definieren dieselbe Orientierung, wenn der zugehörige Basiswechsel positive Determinante hat.

Beispiel 13.1 Die geordneten Basen (e_1, e_2) und (e_2, e_1) liefern verschiedene Orientierungen des $\mathbb{R}^2$, denn der Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Determinante -1.

Genauer

Definition Es sei X ein n-dimensionaler Vektorraum. Zwei geordnete Basen heißen *äquivalent*, wenn der Basiswechsel positive Determinante hat. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen des Vektorraums X. Eine *Orientierung* von X ist eine Äquivalenzklasse von geordneten Basen.

Jeder Vektorraum X von endlicher Dimension n hat also genau zwei Orientierungen, da die Basiswechsel entweder positive oder negative Determinante haben.

Die *Standardorientierung* des $\mathbb{R}^n$ ist diejenige, die durch die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(in dieser Reihenfolge) gegeben wird.

Man kann auch von Orientierung von affinen Räumen, Quadern, usw. sprechen. Eine *Orientierung eines affinen Raumes* ist eine Orientierung des zugrundeliegenden Vektorraumes. Eine *Orientierung eines k-dimensionalen Quaders Q im $\mathbb{R}^n$*, $k \leq n$, ist eine Orientierung des k-dimensionalen affinen Raumes, in dem Q liegt.

Wie orientiert man nun den Rand des Quaders? Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Der Rand von Q ist die Vereinigung der Randstücke

$$\begin{aligned} Q_i^0 &= [a_1, b_1] \times \ldots \times \{a_i\} \times \ldots \times [a_n, b_n], \\ Q_i^1 &= [a_1, b_1] \times \ldots \times \{b_i\} \times \ldots \times [a_n, b_n]. \end{aligned}$$

Dies sind Teilmengen eines affinen Raums: Als Parameter nehmen wir $x_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$. ($\hat{x}_i$ bedeutet: x_i wird weggelassen.) Der zum affinen Raum gehörige Vektorraum hat also die Basis

$$e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n.$$

Nun soll eine Orientierung $\underline{\text{or}}$ in Q_i^0 (Q_i^1) so gewählt werden, dass

$$(\text{Richtung nach außen}, \underline{\text{or}})$$

mit der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Für das Randstück Q_i^0 heißt das das Folgende. Die Richtung nach außen wird durch den Vektor $-e_i$ gegeben. dann ist

$$(-e_i, (-1)^i(e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n))$$

die Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ (ein Faktor -1 vor einer Orientierung bedeutet die entgegengesetzte Orientierung). Denn die Determinante des Basiswechsels

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto (-e_i, e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$$

ist gerade $(-1) \cdot (-1)^{i-1} = (-1)^i$.

Wir erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned} \underline{\text{or}}(Q_i^0) &= (-1)^i(e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n), \\ \underline{\text{or}}(Q_i^0) &= (-1)^{i-1}(e_1, e_2, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Unter dem *orientierten Rand* des Quaders Q verstehen wir die formale Linearkombination

$$\partial Q = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (Q_i^0 - Q_i^1).$$

Eine solche formale Linearkombination nennt man auch eine *Kette*. Der Koeffizient von Q_i^k gibt jeweils an, ob Q_i^k mit seiner Standardorientierung oder der anderen zu versehen ist.

Das Integral über eine solche Kette definieren wir als

$$\int_{\partial Q} \omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\int_{Q_i^0} \omega - \int_{Q_i^1} \omega \right).$$

Damit können wir nun formulieren:

Satz 13.2 (Satz von Stokes für Quader im $\mathbb{R}^n$) *Es sei Q ein Quader in einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$, ω eine $(n-1)$-Form in V. Dann gilt:*

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega.$$

Beweis. Wegen der Additivität des Integrals genügt es, den Satz für ein Monom zu beweisen. Es sei etwa

$$\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Nun müssen wir das Integral dieser $(n-1)$-Form über den orientierten Rand von Q berechnen. Wenn $j \neq i$, dann gilt

$$\int_{Q_j^0} \omega = 0 = \int_{Q_j^1} \omega,$$

da

$$\int_{Q_j^0} \omega = \int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times\widehat{[a_j,b_j]}\times\ldots\times[a_n,b_n]} h_j^*\omega,$$

wobei $h_j : (x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, a_j, \ldots, x_n)$ und $d(h_j)_j = 0$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial Q} \omega \\
&= (-1)^i \left[\int_{a_1}^{b_1} \cdots \widehat{\int_{a_i}^{b_i}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \right. \\
&\qquad \left. - \int_{a_1}^{b_1} \cdots \widehat{\int_{a_i}^{b_i}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \right].
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) = \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_i.$$

Damit folgt

$$\int_{\partial Q} \omega = (-1)^{i-1} \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}
d\omega &= df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Insbesondere sieht man an dem Beweis, dass der Satz von Stokes eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist (und sich für $n = 1$ auf diesen reduziert). Dieser lässt sich auch so schreiben:

$$\int_{[a,b]} df = \int_a^b df = f(b) - f(a) = \int_{\partial[a,b]} f,$$

wobei $\partial[a,b] = b - a$. Nullformen, also Funktionen, lassen sich ja nur über 0-dimensionale Mengen, also Punkte, integrieren. Integrieren heißt hierbei, an den betreffenden Punkten auswerten.

Wir wollen den Satz von Stokes nun auf „krummlinige" Quader ausdehnen. Dazu sei gegeben: Ein Quader Q in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine C^∞-differenzierbare Abbildung

$$h : U \to V \subset \mathbb{R}^m,$$

wobei $V \subset \mathbb{R}^m$ ebenfalls offen ist.

Definition Die Abbildung

$$h|_Q : Q \to V$$

nennen wir einen *n-dimensionalen singulären Quader* im $\mathbb{R}^m$. (Dabei kommt es wieder ganz entscheidend auf die Parametrisierung h an.)

Den orientierten Rand von $h(Q)$ definieren wir durch

$$\partial h(Q) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [h(Q_i^0) - h(Q_i^1)],$$

wobei alle Mengen mit der von h induzierten Parameterdarstellung versehen sind.

Es sei ω eine $(n-1)$-Form in V. Dann definieren wir wie oben

$$\int_{\partial h(Q)} \omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[\int_{h(Q_i^0)} \omega - \int_{h(Q_i^0)} \omega \right]$$

und die Integrale auf der rechten Seite sind wie in §12 durch Zurückholen der Form ω definiert.

Dann gilt:

Satz 13.3 (Satz von Stokes für singuläre Quader) *Es sei $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und ω eine $(n-1)$-Form in V. Es sei $h : Q \to V$ ein n-dimensionaler singulärer Quader in V. Dann gilt*

$$\int_{h(Q)} d\omega = \int_{\partial h(Q)} \omega.$$

Beweis. Hier zeigt sich nun der Vorteil des Differentialformenkalküls. Ohne ihn wäre der Satz nur schwer zu beweisen. Mit Hilfe des Differentialformenkalküls und des Satzes von Stokes für Quader ist der Beweis ganz einfach:

$$\begin{aligned}\int_{h(Q)} d\omega &= \int_Q h^* d\omega \quad \text{(Definition)}\\ &= \int_Q dh^*\omega \quad \text{(Satz 12.5(ii))}\\ &= \int_{\partial Q} h^*\omega \quad \text{(Satz 13.2)}\\ &= \int_{\partial h(Q)} \omega \quad \text{(Definition).}\end{aligned}$$

□

Der entscheidende Fortschritt besteht nun darin, dass es auf die Form des singulären Quaders gar nicht mehr ankommt. Für alle differenzierbaren Bilder des Quaders (z.B. Kreis, Kugel) gilt der Satz ebenfalls. Lästig ist nur, nach der passenden Parametrisierung zu suchen.

Die klassische Form des Satzes von Stokes

Wir wollen nun die klassische Form des Satzes von Stokes herleiten. Die ursprüngliche Form des Satzes von Stokes bezieht sich auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ ($n = 2$, $m = 3$).

Es sei also $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

eine 1-Form in V. Außerdem sei ein singuläres Rechteck F mit Rand ∂F gegeben.

Der Satz von Stokes besagt dann

$$\int_{\partial F} \omega = \int_F d\omega.$$

Die Randstücke von ∂F parametrisieren wir durch Wege der Form

$$t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) =: x(t).$$

Dann ist also

$$\int_{\partial F} \omega = \sum \int_{t_0}^{t_1} [a_1(x(t))\dot{x}_1(t) + a_2(x(t))\dot{x}_2(t) + a_3(x(t))\dot{x}_3(t)]dt,$$

wobei sich die Summe über die Randstücke erstreckt und

$$\dot{x}_i(t) := \frac{dx_i}{dt}(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

ist. Der Vektor

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

ist ein Tangentialvektor des Randes ∂F. Stellt man sich – wie in der Physik üblich – unter dt einen „infinitesimal“ (also ziemlich) kleinen Skalar vor, so ist

$$d\vec{s} := \dot{x} dt$$

ein ganz kleiner Tangentialvektor. Man nennt $d\vec{s}$ das *vektorielle Linienelement*. Stellt man sich unter der 1-Form ω noch das Vektorfeld

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

vor, so können wir die in der Physik übliche Schreibweise identifizieren als

$$\int_{\partial F} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial F} \omega,$$

wobei $\vec{a} \cdot d\vec{s}$ das Skalarprodukt aus dem Vektorfeld $\vec{a}$ und dem Tangentialvektor $d\vec{s}$ bedeutet, also

„Tangentialkomponente von $\vec{a}$ $\times$ Linienelement des Randes“.

Wie bezeichnet man in der Physik nun $\int_F d\omega$? Nun

$$\begin{aligned} d\omega \quad = \quad & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \\ & + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 dx_1 \\ & + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

die Koeffizienten dieser 2-Form sind gerade die Komponenten des Vektorfeldes $\operatorname{rot} \vec{a}$ (siehe oben).

Es sei nun eine 2-Form

$$\alpha = b_1 dx_2 dx_3 + b_2 dx_3 dx_1 + b_3 dx_1 dx_2$$

gegeben, etwa $\alpha = d\omega$. Dazu haben wir wieder das Vektorfeld

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren F durch eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} h: & R & \longrightarrow & F \\ & (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nach Definition ist

$$\int_F \alpha = \int_R h^*\alpha,$$

$$\begin{aligned} h^*\alpha \quad = \quad & \Bigg[b_1(h(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \\ & + b_2(h(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{vmatrix} \\ & + b_3(h(u,v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} \Bigg] dudv. \end{aligned}$$

Die Determinanten bilden aber gerade die Komponenten des Kreuzproduktes der beiden Tangentialvektoren der Fläche

$$\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix},$$

welches senkrecht auf der Fläche steht. Unter du und dv stellt man sich in der Physik wieder ganz kleine Skalare vor und man nennt

$$(\vec{t}_1 \times \vec{t}_2) dudv =: d\vec{S}$$

das *vektorielle Flächenelement*. Anschaulich stellt man sich in der Physik den Vektor $d\vec{S}$ als ein ganz kleines Stück der Fläche vor, so klein, dass die Flächenkrümmung ganz unerheblich ist.

Zusammenfassend können wir also identifizieren

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_F d\omega.$$

Der Satz von Stokes in klassisch-physikalischer Schreibweise lautet also:

$$\boxed{\int_{\partial F} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}}$$

Es muss aber betont werden, dass die Einführung des Skalarproduktes in die beiden Integrale und damit die Einführung der Metrik des $\mathbb{R}^n$ unsachgemäß ist, da wir in der Herleitung des Satzes von Stokes die Metrik des $\mathbb{R}^n$ nirgends gebraucht haben.

Der Gaußsche Integralsatz

Aus dem Satz von Stokes für differenzierbare Bilder von 3-dimensionalen Quadern im $\mathbb{R}^3$ erhält man den klassischen Gaußschen Integralsatz ($n = m = 3$).

Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und

$$\omega = a_1 dx_2 dx_3 + a_2 dx_3 dx_1 + a_3 dx_1 dx_2$$

eine 2-Form in U. Außerdem sei ein singulärer Quader M mit Rand ∂M gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 dx_3 dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \operatorname{div} \vec{a}\, dV, \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{div} \vec{a}$ die *Divergenz*

$$\operatorname{div} \vec{a} := \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

des Vektorfeldes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

das sogenannte *Volumenelement* bezeichnet.

Aus dem Satz von Stokes folgt damit in der oben eingeführten Schreibweise der

Satz 13.4 (Gaußscher Integralsatz)

$$\boxed{\int_M \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \int_{\partial M} \vec{a} \cdot d\vec{S}}$$

14 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Uns interessiert der Satz von Stokes nicht nur für ein – möglicherweise krummes – Rechteck, sondern auch auf Kugeln und ihren Rändern oder ähnlichen Objekten. Es sei

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

die 2-Sphäre. Dann ist $S^2 = \partial B^3$, wobei

$$B^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

die abgeschlossene Vollkugel vom Radius 1 ist. Ist uns also eine 2-Form ω gegeben, die in einer Umgebung von B^3 definiert ist, so möchten wir gerne die in der Gleichung

$$\int_{\partial B^3} \omega = \int_{B^3} d\omega$$

auftretenden Terme definieren und die behauptete Gleichung, den Satz von Stokes für die Vollkugel B^3, verstehen und beweisen.

Dieses Problem wollen wir gleich in einem allgemeinen Zusammenhang betrachten. Die 2-Sphäre ist ein typisches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit. Mit diesem Begriff wollen wir uns nun beschäftigen.

Definition Eine nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale (differenzierbare) Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$*, $k \leq n$, wenn gilt: Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und einen C^∞-Diffeomorphismus $h : U \to V$ auf eine offene Teilmenge V eines $\mathbb{R}^n$, deren Punkte mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnet werden. Ferner sei h so beschaffen, dass

$$\begin{aligned} h(U \cap M) &= \{y \in V \,|\, y_{k+1} = y_{k+2} = \ldots = y_n = 0\} \\ &= V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \end{aligned}$$

(Hier ist mit 0 die 0 aus $\mathbb{R}^{n-k}$ gemeint.)

Kurz gesagt: M sieht lokal in geeigneten Koordinaten wie eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}^k$ aus. Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ werden auch *Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$* genannt und sind Spezialfälle von abstrakten Mannigfaltigkeiten, die lokal ebenfalls wie offene Teilmengen eines $\mathbb{R}^k$ aussehen, aber nicht in einen $\mathbb{R}^n$ eingebettet sein müssen.

Beispiel 14.1 Die 2-Sphäre S^2 ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$: Es sei $a = (a_1, a_2, a_3) \in S^2$ mit $a_3 > 0$, U eine Umgebung von a mit $U \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 > 0\}$ und $h : U \to V := h(U)$ die Abbildung

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) =: (y_1, y_2, y_3).$$

Nach dem lokalen Umkehrsatz ist diese Abbildung lokal ein C^∞-Diffeomorphismus und

$$h(U \cap M) \subset \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_3 = 0\}.$$

Andererseits ist $U \cap M$ das Nullstellengebilde $y_3^{-1}(0)$ der Funktion $y_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Dieses Beispiel wollen wir nun verallgemeinern.

Satz 14.1 *Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^∞-differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft: Für alle $p \in \mathbb{R}^n$, für die $g(p) = 0$ ist, habe $g'(p)$ maximalen Rang, d.h. den Rang $n-k$.*

Dann ist $g^{-1}(0)$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-k} & = & g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) \\ y_{n-k+1} & = & x_{n-k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & x_n. \end{array}$$

Diese Abbildung hat die Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-k}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{n-k}} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{n-k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

O.B.d.A. sei die Determinante des oberen linken Kästchens von Null verschieden (sonst ändern wir die Reihenfolge der g_i und/oder der Koordinaten). Die Behauptung folgt dann aus dem lokalen Umkehrsatz. □

Wieder erhalten wir eine Mannigfaltigkeit durch Nullsetzen von $n-k$ Funktionen (bei S^2 waren es $3-2$, die letzte, hier die ersten $n-k$).

Aufgabe 14.1 Was ist das Analogon in der linearen Algebra? Was passiert also bei linearem g?

Eine weitere Verallgemeinerung:

Satz 14.2 *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und zu jedem $p \in M$ gebe es eine Umgebung U von p und eine differenzierbare Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $M \cap U = g^{-1}(0)$ und so dass für alle $x \in M \cap U$ der Rang von $g'(x)$ gleich $n-k$ ist.*

Dann ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Genau wie oben. □

Dieser Satz besagt also, dass man nur auf Umgebungen U von Punkten Funktionen finden muss, deren Nullstellengebilde gerade $M \cap U$ ist, um nachzuweisen, dass es sich bei M um eine Mannigfaltigkeit handelt, also nur lokal.

Ein anderer Aspekt: Lokal wird die Mannigfaltigkeit durch Nullsetzen von $n-k$ Koordinaten beschrieben, die übrigen k Kordinaten sind also noch frei. Dies liefert uns eine *lokale Parameterdarstellung* der Mannigfaltigkeit: Setzt man

$$\psi(y_1, \dots, y_k) := h^{-1}(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0),$$

so hat man auf M die Koordinaten

$$x_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k)$$

und jeder Punkt $x \in M$ wird lokal durch die Koordinaten y_i eindeutig bestimmt.

Es sei nun M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$. Wie wir die Erdoberfläche durch Karten beschreiben können, so kann man auch M durch Karten beschreiben:

Definition Eine Teilmenge von M heißt *offen in M*, wenn sie der Durchschnitt von M mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Man erinnere sich an die Definition der Mannigfaltigkeit: Dort bildet h eine offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit M auf eine offene Teilmenge des gleichfalls k-dimensionalen $\mathbb{R}^k$ ab. Das ist genau die zu betrachtende Situation:

Definition Eine *Karte* von M ist eine offene Teilmenge U von M zusammen mit einer Abbildung $\varphi : U \to V$, wobei V eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ ist, und es gelte: φ sei bijektiv, in beiden Richtungen stetig und $\varphi^{-1} : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ sei C^∞-differenzierbar und $(\varphi^{-1})'$ habe in V Maximalrang, d.h. den Rang k.

Die Teilmenge U von M heißt auch *Kartengebiet*.

Nach Definition der Mannigfaltigkeit lässt sich M ganz mit Karten überdecken.

Definition Ein System von Karten $\{(U_i, \varphi_i, V_i)_{i\in I}\}$ (I irgendeine Indexmenge), für das

$$\bigcup_{i\in I} U_i = M$$

gilt, heißt *Atlas* von M.

Beispiel 14.2 Wir betrachten $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Die Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= S^n \setminus \{N\}, \quad N = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{(Nordpol)} \\ U_2 &= S^n \setminus \{S\}, \quad S = (0, \dots, 0, -1) \quad \text{(Südpol)} \end{aligned}$$

sind offen in S^n (wieso?). Die Kartenabbildungen werden durch die *stereographischen Projektionen* gegeben (Skizze!).

Studieren wir jetzt die Situation, dass sich zwei Kartengebiete U_1, U_2 überlappen: Dann definiert $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ eine bijektive Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Die zugehörige Umkehrabbildung ist $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$. Abbildungen dieses Typs heißen *Kartenwechsel*.

Satz 14.3 *Es sei (U, φ, V) eine Karte von M und $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i)_{i\in I}\}$ ein Atlas von M. Dann sind alle Kartenwechsel von der Karte (U, φ, V) zu den Karten des Atlas $\mathfrak{A}$ C^∞-differenzierbar.*

Beweis. Es sei $x \in \varphi(U \cap U_j)$. Wir zeigen, dass $\varphi_j \circ \varphi^{-1}$ in x differenzierbar ist.

Dazu betrachte die Abbildung

$$h: \begin{array}{ccc} \varphi_j(U \cap U_j) \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (u, v) & \longmapsto & \varphi_j^{-1}(u) + (0, v) \end{array}.$$

Da φ_j^{-1} differenzierbar ist, ist auch h differenzierbar. Da $(\varphi_j^{-1})'(\varphi_j \circ \varphi^{-1}(x))$ Maximalrang k hat, können wir nach eventueller Koordinatenvertauschung annehmen, dass $h'((\varphi_j \circ \varphi^{-1}(x), 0))$ Maximalrang n hat, also invertierbar ist. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist h in einer Umgebung von $(\varphi_j \circ \varphi^{-1}(x), 0)$ ein Diffeomorphismus. Nun gilt

$$h((\varphi_j \circ \varphi^{-1}(x), 0)) = \varphi^{-1}(x).$$

Daraus folgt, dass $\varphi_j \circ \varphi^{-1}$ die ersten k Komponentenfunktionen von $h^{-1} \circ \varphi^{-1}$ sind. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_j \circ \varphi^{-1}$ in x differenzierbar ist. □

Beispiel 14.3 Der $\mathbb{R}^n$ selbst ist eine Mannigfaltigkeit: Sie hat die Dimension n und kann durch genau eine Karte beschrieben werden, z.B. die Identität. Aber auch z.B.

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + e^{-x_1}) =: (u_1, u_2)$$

ist eine Karte des $\mathbb{R}^2$, die offensichtlich nicht linear ist. Sie hat die Umkehrabbildung

$$(u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2 - e^{-u_1}).$$

Allgemeiner ist jeder C^∞-Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^n$ auf sich eine Karte.

Nun wollen wir differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten erklären. Sie werden kartenweise definiert:

Definition Es seien M und N Mannigfaltigkeiten der Dimension k bzw. l. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *differenzierbar in* $x \in M$, wenn es Karten (U, φ, V) von M um x und (U', ψ, V') von N um $f(x)$ gibt, so dass die auf einer Umgebung von $\varphi(x)$ erklärte Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V'$$

in $\varphi(x)$ differenzierbar ist (im alten Sinne).

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *differenzierbar*, wenn f an jeder Stelle $x \in M$ differenzierbar ist.

Bemerkung 14.1 Man beachte, dass es auf die Wahl der Karten *nicht* ankommt: Da alle Kartenwechsel differenzierbar sind, können (U, φ, V) und (U', ψ, V') durch beliebige andere Karten ersetzt werden; haben zwei Karten die verlangte Eigenschaft, so auch alle anderen Karten um x bzw. $f(x)$.

Wir wollen nun den Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit erklären.

Definition Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an M im Punkt $a \in M$*, wenn es eine C^∞-differenzierbare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$, gibt mit

$$\alpha(0) = a \text{ und } \dot{\alpha}(0) = v.$$

Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an M in a heißt der *Tangentialkegel* von M in a. Er wird mit T_aM bezeichnet. Falls T_aM ein Vektorraum ist, so nennt man T_aM den *Tangentialraum* von M in a.

Satz 14.4 *Ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, so ist für jeden Punkt $a \in M$ die Menge T_aM ein k-dimensionaler Vektorraum.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass für eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ und einen Punkt $a \in V$ gilt:

$$T_aV = \mathbb{R}^k.$$

Die Inklusion $T_aV \subset \mathbb{R}^k$ ist klar. Zum Beweis der anderen Inklusion sei $v \in \mathbb{R}^k$. Dann ist v Tangentialvektor der Kurve

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & V \\ & t & \longmapsto & a + tv \end{array}$$

an der Stelle $t = 0$.

(b) Der allgemeine Fall ergibt sich mit Hilfe einer Karte (U, φ, V) von M um a: Jeder Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ wird durch φ eine Kurve $\widetilde{\alpha} := \varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ zugeordnet. Für jede Kurve $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ gilt $\beta = \widetilde{\alpha}$ für $\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta$. Es gilt

$$\dot{\alpha}(0) = (\varphi^{-1})'(\varphi(a))\dot{\widetilde{\alpha}}(0).$$

Damit folgt aus (a)

$$T_aM = T_aU = (\varphi^{-1})'(\varphi(a))(\mathbb{R}^k).$$

$\square$

Beispiel 14.4 Wir bestimmen den Tangentialraum an die n-Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

in $a \in S^n$: Die n-Sphäre ist die Nullstellenmenge von $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1$. Für $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^n$ gilt $g \circ \alpha = 0$, also

$$\langle \operatorname{grad} g(a), \dot{\alpha}(0) \rangle = \langle 2a, \dot{\alpha}(0) \rangle = 0.$$

Damit gilt

$$T_aS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \langle a, v \rangle = 0\}.$$

15 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir wollen nun die Integration über Mannigfaltigkeiten definieren.

Zunächst einige Bemerkungen über die Berechnung von Volumina und Flächeninhalten. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ist U offen in $\mathbb{R}^n$, so hatten wir erklärt:

$$v_n(U) = \int_U dx.$$

Für eine orthogonale Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt $\det A = \pm 1$. Für solche Abbildungen gilt

$$v_n(A(U)) = v_n(U),$$

da nach dem Transformationssatz

$$\int_{A(U)} dy = \int_U |\det A| \, dx.$$

Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Diese Vektoren spannen ein Parallelotop im $\mathbb{R}^n$ auf, nämlich

$$P = \operatorname{spat}(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \;\middle|\; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\}.$$

Nach §9 ist das Volumen von P gleich

$$v_n(P) = |\det(a_1, \dots, a_n)|,$$

wobei $(a_1, \dots, a_n)$ die $n \times n$-Matrix mit den a_i als Spaltenvektoren ist.

Mit Hilfe des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ können wir das Volumen von P auch folgendermaßen ausdrücken. Es gilt

$$v_n(P)^2 = \det(\langle a_i, a_j \rangle),$$

denn die Matrix $(\langle a_i, a_j \rangle)$ aus den Skalarprodukten ist das Matrizenprodukt

$$(\langle a_i, a_j \rangle) = (a_1, \dots, a_n)^T (a_1, \dots, a_n).$$

Die Determinante dieser Matrix nennt man auch *Gramsche Determinante*. Außerdem wissen wir, dass zwei Parallelotope, die durch eine orthogonale Transformation auseinanderhervorgehen, dasselbe Volumen haben (§9).

Diese Bemerkungen können wir nun verallgemeinern: Es sei X ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Nach Wahl einer Orthonormalbasis in X lässt sich eine Isometrie, also ein Skalarprodukte respektierender linearer Isomorphismus $h : X \to \mathbb{R}^n$ einfach dadurch angeben, dass man die gewählte Orthonormalbasis auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ abbildet.

Definition Ist $U \subset X$ eine offene oder abgeschlossene beschränkte Menge, so setzen wir

$$v(U) := v(h(U)).$$

Bemerkung 15.1 Das Volumen $v(U)$ ist unabhängig von der gewählten Isometrie $h : X \to \mathbb{R}^n$, denn ist $\widetilde{h} : X \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Isometrie, so ist $\widetilde{h} \circ h^{-1}$ eine orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}^n$.

Sind nun $a_1, \dots, a_n \in X$ Vektoren, so spannen diese wieder ein Parallelotop $P = \operatorname{spat}(a_1, \dots, a_n)$ auf und es gilt

$$v_n(P)^2 = \det(\langle a_i, a_j \rangle),$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Skalarprodukt in X ist. Das folgt aus unseren obigen Bemerkungen.

Man beachte, dass die Volumina „koordinatenfrei" oder „invariant" erklärt sind. Man braucht nur das Skalarprodukt, nicht eine spezielle ON-Basis von X.

Wir wollen auf die Betrachtung von niederdimensionalen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ hinaus. Zunächst der lineare Fall:

Es sei $Y \subset X$ ein k-dimensionaler Unterraum. Dann erbt Y das Skalarprodukt von X und ist selbst ein euklidischer Vektorraum. Also ist auch in Y ein Volumen erklärt.

Beispiel 15.1 Gegeben seien $a_1, \dots, a_k \in Y$. Dann gilt

$$v_k(\mathrm{spat}(a_1, \dots, a_k)) = [\det(\langle a_i, a_j \rangle)]^{1/2}.$$

(Man beachte, dass $(\langle a_i, a_j \rangle)$ eine $k \times k$-Matrix ist und das Volumen in Y zu verstehen ist!)

Warnung Man muss zwischen dem k-dimensionalen und dem n-dimensionalen Volumen unterscheiden: im $\mathbb{R}^3$ gilt beispielsweise

$$v_2(\mathrm{spat}(e_1, e_2)) = 1 \text{ aber } v_3(\mathrm{spat}(e_1, e_2)) = 0!$$

Es sei nun M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Wir wollen nun das Integral über M erklären. Dazu betrachten wir zunächst einmal eine Karte (U, φ, V) von M um den Punkt $a \in M$. Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : V \to U$ ist dann eine C^∞-differenzierbare Abbildung und $(\varphi^{-1})'$ hat in V Maximalrang. Bezeichnen wir mit $u_1, \dots, u_k$ die Koordinaten von V, so bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_1}(\varphi(a)), \dots, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_k}(\varphi(a))$$

eine Basis des Tangentialraums T_aM von M in a.

Definition Wir definieren das *k-dimensionale Volumen* von U bezüglich der Karte (U, φ, V) durch:

$$v_k(U) := \int_V \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j} \right\rangle\right)} du_1 \dots du_k.$$

Ist nun $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so können wir definieren: f heißt *über U integrierbar bezüglich der Karte* (U, φ, V), wenn die Funktion

$$(f \circ \varphi^{-1}) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j} \right\rangle\right)}$$

über V integrierbar ist und dann heiße

$$\int_U f := \int_V (f \circ \varphi^{-1}) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j} \right\rangle\right)} du_1 \dots du_k$$

das *Integral von f über U bezüglich der Karte* (U, φ, V).

Lemma 15.1 *Es seien (U, φ, V), $(U, \widetilde{\varphi}, \widetilde{V})$ zwei Karten von M mit demselben Kartengebiet U. Dann gilt: Ist f bezüglich (U, φ, V) über U integrierbar, so auch bezüglich $(U, \widetilde{\varphi}, \widetilde{V})$, und die Integrale von f bezüglich der beiden Karten sind gleich.*

Beweis. Nach Satz 14.3 ist der Kartenwechsel $h := \varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ ein Diffeomorphismus. Es gilt $\widetilde{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ h$. Wir bezeichnen die Koordinaten von $\widetilde{V}$ mit $(\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_k)$. Wir erinnern an die Matrixidentität

$$\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i}, \frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_j} \right\rangle\right) = \left(\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i}\right)^T \left(\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_j}\right).$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(h(\widetilde{u})) \frac{\partial h_j}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u})$$

oder

$$\left(\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i}\right) = \left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(h(\widetilde{u}))\right) \cdot h'(\widetilde{u}).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u})\right)^T \left(\frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u})\right) \\ = \quad & (h'(\widetilde{u}))^T \left[\left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}(h(\widetilde{u}))\right)^T \left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(h(\widetilde{u}))\right)\right] h'(\widetilde{u}). \end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz erhält man also

$$\begin{aligned} &\int_U f \\ = \quad & \int_{\widetilde{V}} f(\widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{u})) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}), \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \right\rangle\right)} d\widetilde{u} \\ = \quad & \int_{\widetilde{V}} f(\varphi^{-1}(h(\widetilde{u}))) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_i}(\widetilde{u}), \frac{\partial \varphi^{-1} \circ h}{\partial \widetilde{u}_j}(\widetilde{u}) \right\rangle\right)} d\widetilde{u} \\ = \quad & \int_{\widetilde{V}} f(\varphi^{-1}(h(\widetilde{u}))) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}(h(\widetilde{u})), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(h(\widetilde{u})) \right\rangle\right)} |\det h'(\widetilde{u})| d\widetilde{u} \\ = \quad & \int_V f(\varphi^{-1}(u)) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}(u)), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(u)) \right\rangle\right)} du. \end{aligned}$$

Dabei existiert das erste Integral genau dann, wenn das letzte Integral existiert. □

Aufgrund dieses Lemmas ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar über* U, U Kartengebiet, wenn sie bezüglich einer (und damit jeder) Karte (U, φ, V) integrierbar ist. Der von der Wahl der Karte unabhängige Wert

$$\int_U f := \int_V f(\varphi^{-1}(u)) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}(u)), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(u)) \right\rangle\right)} du$$

heißt das *Integral von f über U*. Ist die Funktion 1 über U integrierbar, so heißt

$$v_k(U) := \int_U 1 = \int_V \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right)}du$$

das *k-dimensionale Volumen (die Oberfläche)* von U.

Für „ebene“ Kartengebiete ist die Definition identisch mit der alten Definition: Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ die Inklusionsabbildung, so gilt

$$\left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial u_i}(u)\right) = (\delta_{ij}),$$

also

$$\sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial u_i}(u)), \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial u_j}(u))\right\rangle\right)} = 1.$$

Für das folgende Beispiel benötigen wir einen Hilfssatz aus der linearen Algebra.

Satz 15.1 *Es sei $k \le n$ und es seien A, B zwei $n \times k$-Matrizen. Für $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ bezeichne $A_{i_1 \ldots i_k}$ die Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ der Matrix A besteht. Dann gilt*

$$\det A^T B = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \det A_{i_1 \ldots i_k} \det B_{i_1 \ldots i_k}.$$

Bemerkung 15.2 Dies ist für $k = n$ der Determinantenmultiplikationssatz.

Beweis von Satz 15.1. Man hält A fest und verifiziert die folgenden Aussagen:

(a) Die Formel gilt für $B = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

(b) Gilt die Formel für $B = (b_1, \ldots, b_k)$, so auch für $B' = (b_1, \ldots, \lambda b_i, \ldots, b_k)$.

(c) Gilt die Formel für $B' = (b_1, \ldots, b_i', \ldots, b_k)$ und $B'' = (b_1, \ldots, b_i'', \ldots, b_k)$, so auch für $B = (b_1, \ldots, b_i' + b_i'', \ldots, b_k)$.

(a) ist offensichtlich, (b) und (c) folgen aus den Linearitätseigenschaften der Determinante. Aus (a)–(c) ergibt sich, dass die Formel für eine beliebige Matrix B gilt. □

Korollar 15.1 *Es sei A eine $n \times k$-Matrix ($k \le n$). Dann gilt*

$$\det A^T A = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} (\det A_{i_1 \ldots i_k})^2.$$

Korollar 15.2 *Gegeben seien k Vektoren $a_1, \dots, a_k$ im $\mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\det(\langle a_i, a_j \rangle) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} D_i^2.$$

Dabei durchläuft D_i die Determinanten aller $k \times k$-Untermatrizen der Matrix $(a_1, \dots, a_k)$. (Davon gibt es gerade $\binom{n}{k}$.)

Beispiel 15.2 ($k = 2$, $n = 3$) Sind

$$a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\begin{aligned} \det(\langle a_i, a_j \rangle) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 \\ &= \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum x_i y_i \right)^2 \\ &= ||a_1||^2 \cdot ||a_2||^2 - \langle a_1, a_2 \rangle^2 \\ &= ||a_1 \times a_2||^2. \end{aligned}$$

Aus Korollar 15.2 folgt für die Gramsche Determinante

$$\left[\det \left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j} \right\rangle \right) \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} D_i^2 \right]^{1/2},$$

wobei D_i die Determinanten der $k \times k$-Untermatrizen der Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_k} \right)$$

sind.

Beispiel 15.3 (Graph einer Funktion) Wir betrachten den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ ($k = n$, $n \mapsto n + 1$)

$$\Gamma_f = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x)\}.$$

Was ist seine Oberfläche?

Als Karte (U, φ, V) wählen wir die Projektion

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \subset \Gamma_f & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \\ & (x, z) & \longmapsto & x \end{array}.$$

Die Umkehrabbildung ist

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & V & \longrightarrow & U \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)) \end{array}.$$

Es gilt

$$\left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_n}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (n+1 \text{ Zeilen}).$$

Aus Korollar 15.2 folgt

$$v_n(U)=\int_V\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right]^{1/2}dx_1\ldots dx_n.$$

Als Spezialfall erhält man die aus Analysis II bekannte Formel

$$\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

für die Bogenlänge eines Graphen einer Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Beispiel 15.4 (Niveaufläche) Wir betrachten eine Niveaufläche einer differenzierbaren Funktion $g:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$:

$$S=\{(x_1,\dots,x_n)\in U\,|\,g(x_1,\dots,x_n)=c\}.$$

Ist

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\neq 0 \text{ für alle } x\in U,$$

so lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen – zumindest lokal – eine Funktion $f:V\to\mathbb{R}$, $V\subset\mathbb{R}^{n-1}$ geeignet, finden, so dass für $(x_1,\dots,x_{n-1})\in V$ gilt

$$g(x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1}))=c.$$

Nun gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1}))=\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$$

für $i=1,\dots,n-1$. Also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}} \quad \text{für } i=1,\dots,n-1.$$

Auf S gilt lokal

$$x_n = f(x_1, \dots , x_{n-1}),$$

d.h. S ist lokal der Graph der Funktion f. Nach Beispiel 15.3 gilt für die Oberfläche einer geeigneten Teilmenge $U' \subset S$

$$v_{n-1}(U') = \int_{V'} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_n}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Um Integrale von Funktionen über beliebige Mannigfaltigkeiten zu erklären, braucht man Partitionen (=Zerlegungen) der Eins.

Betrachten wir zunächst die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{für } t > 0. \end{cases} \end{array}$$

Diese Funktion ist C^∞-differenzierbar.

Mit Hilfe dieser Funktion lassen sich neue Funktionen, die ebenfalls C^∞-differenzierbar sind, konstruieren, die für unsere Zwecke besonders gute Eigenschaften haben ($[a, b] \subset \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rccl} \psi_{[a,b]}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t-a)f(b-t) \end{array}.$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \psi_{[a,b]}(t) & > & 0 & \text{für } a < t < b, \\ \psi_{[a,b]}(t) & = & 0 & \text{außerhalb des Intervalls } [a, b]. \end{array}$$

Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Träger* von g als

$$\mathrm{Tr}(g) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Tr}(\psi_{[a,b]}) = [a, b].$$

Dies verallgemeinern wir nun auf einen Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir setzen

$$\psi_Q(t_1, \dots , t_n) := \psi_{[a_1,b_1]}(t_1) \cdot \ldots \cdot \psi_{[a_n,b_n]}(t_n).$$

Für Punkte $(t_1, \dots , t_n)$ im Innern des Quaders, also aus

$$\overset{\circ}{Q} = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n),$$

ist $\psi_Q(t_1, \ldots, t_n) > 0$, ansonsten gilt $\psi_Q(t_1, \ldots, t_n) = 0$. Das hat zur Folge:

$$\mathrm{Tr}(\psi_Q) = Q.$$

Man beachte: Obwohl $\psi_Q \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ist $\psi_Q^{-1}(0)$, also das Äußere des offenen Quaders, mit Ecken versehen!

Nun brauchen wir einen kleinen Einschub über kompakte Ausschöpfungen.

Satz 15.2 *Jede Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine kompakte Ausschöpfung. Darunter versteht man eine Folge $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von M mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(i) $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ *($\mathring{K}_{i+1}$ ist das Innere von K_{i+1} in M).*

(ii) $\bigcup_{i=0}^\infty K_i = M$.

Beweis. Betrachte die abzählbar vielen offenen Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ mit rationalen Eckpunkten und mit der Eigenschaft, dass $\overline{Q}_i \cap M$ kompakt ist. Setze

$$V_i := Q_i \cap M, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Wir setzen dann

$$K_0 := \overline{V}_0$$

und bestimmen rekursiv eine Folge von Indizes $0 = n_0 < n_1 < \ldots$ derart, dass jeweils

$$K_i := \bigcup_{k=0}^{n_i} \overline{V}_k \subset \bigcup_{k=0}^{n_{i+1}} V_k$$

gilt. Die Folge (K_i) bildet dann eine kompakte Ausschöpfung. □

Wir erinnern an die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft* einer kompakten Menge: $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung von K gibt.

Aus Satz 15.2 folgt nun, dass für Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ eine abgeschwächte Überdeckungseigenschaft gilt:

Korollar 15.3 *Aus jeder offenen Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ kann man abzählbar viele Mengen auswählen, die ebenfalls M überdecken. Insbesondere besitzt jede Mannigfaltigkeit einen abzählbaren Atlas.*

Beweis. Jede Menge K_i einer kompakten Ausschöpfung von M wird nach Heine-Borel bereits durch endlich viele Mengen der Überdeckung überdeckt, M also durch abzählbar viele. □

Definition Eine *Partition der Eins* auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $(\rho_i)_{i\in I}$ von C^∞-differenzierbaren Funktionen $\rho_i : M \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Familie (ρ_i) ist *lokal-endlich*, d.h. zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von x, auf der alle außer endlich vielen der ρ_i verschwinden.

(ii) $\sum \rho_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Ist $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von M, so heißt die Partition der Eins (ρ_i) *dieser Überdeckung untergeordnet*, wenn zusätzlich gilt:

(iii) Für jedes $i \in I$ ist der Träger $\operatorname{Tr}\rho_i$ in einer der Mengen U_j enthalten.

Satz 15.3 (Existenz einer Partition der Eins) *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete Partition der Eins.*

Beweis. Es sei (K_i) eine kompakte Ausschöpfung von M. Wir konstruieren dann zunächst zu jedem $i \in \mathbb{N}$ endlich viele C^∞-differenzierbare Funktionen $\psi_{i,0}, \dots, \psi_{i,r_i} : M \to [0,\infty)$, so dass gilt:

(a) Der Träger jeder dieser Funktionen liegt in einem U_j *und* in $\overset{\circ}{K}_{i+1} \setminus K_{i-2}$. (Dabei seien $K_{-2} = K_{-1} := \emptyset$.)

(b) In jedem Punkt $p \in K_i \setminus \overset{\circ}{K}_{i-1}$ hat wenigstens eine dieser Funktionen einen positiven Wert.

Zur Konstruktion dieser Funktionen: O.B.d.A. sei $\mathcal{U} = (U_j)$ eine Überdeckung durch Kartengebiete. (Sonst betrachte man eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$.) Es sei $\{(U_j, \varphi_j, V_j)\}$ der entsprechende Atlas.

Es sei $p \in K_i \setminus \overset{\circ}{K}_{i-1}$, $p \in U_j$. Wähle einen offenen Quader $\overset{\circ}{Q}_p \subset V_j$ mit $\varphi_j(p) \in \overset{\circ}{Q}_p$, so dass seine abgeschlossene Hülle $Q_p := \overline{\overset{\circ}{Q}_p}$ ganz in $\varphi_j(U_j \cap (\overset{\circ}{K}_{i+1} \setminus K_{i-2}))$ liegt. Die Urbilder $\varphi_j^{-1}(\overset{\circ}{Q}_p)$ der offenen Quader überdecken die kompakte Menge $K_i \setminus \overset{\circ}{K}_{i-1}$ ganz, also gibt es nach Heine-Borel endlich viele der $\varphi_j^{-1}(\overset{\circ}{Q}_p)$, etwa mit $\varphi_j^{-1}(\overset{\circ}{Q}_m)$, $m = 0, \dots, r_i$, bezeichnet, die ebenfalls $K_i \setminus \overset{\circ}{K}_{i-1}$ ganz überdecken. Setze

$$\psi_{i,m} := \psi_{Q_m} \circ \varphi_j.$$

Die Funktionen $\psi_{i,m}$, $m = 0, \dots, r_i$, erfüllen (a) und (b).

Die Gesamtheit der Funktionen $\psi_{i,m}$, $i \in \mathbb{N}$, $m = 0, \dots, r_i$, ist offensichtlich lokal-endlich. Somit konvergiert die Reihe

$$\psi := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{r_i} \psi_{i,m}$$

und liefert eine C^∞-differenzierbare, überall positive Funktion auf M. Die Funktionen

$$\rho_{i,m} := \frac{\psi_{i,m}}{\psi}$$

schließlich bilden eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins. □

Wir wollen nun Integrale über beliebige Mannigfaltigkeiten erklären. Zunächst eine Verallgemeinerung der Integration über ein Kartengebiet:

Definition Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, deren Träger in einem Kartengebiet $U \subset M$ liegt, heißt *integrierbar über* M, wenn die Einschränkung f über U integrierbar ist, und dann setzen wir

$$\int_M f := \int_U f.$$

Bemerkung 15.3 Diese Definition hängt nicht von der Wahl des Kartengebiets ab: Ist U' ein weiteres Kartengebiet mit $\mathrm{Tr}(f) \subset U'$, so gilt

$$\int_U f = \int_{U \cap U'} f = \int_{U'} f.$$

Lemma 15.2 (Partitionslemma) *Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Träger in einem Kartengebiet enthalten ist. Ferner sei $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Partition der Eins auf M, so dass gilt:*

(i) *Jede Funktion $f\rho_i$ ist integrierbar über M.*

(ii) $\sum_{i=0}^\infty \int_M |f|\rho_i < \infty$.

Dann ist f über M integrierbar und es gilt

$$\int_M f = \sum_{i=0}^\infty \int_M f\rho_i.$$

Umgekehrt: Ist f über M integrierbar, so erfüllt f für jede Partition der Eins die Bedingungen (i) *und* (ii).

Beweis. (a) Wir betrachten zunächst den Fall: $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist M ein Kartengebiet.

Die Funktion f erfülle (i) und (ii). Dann konvergiert die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{i=0}^\infty |f|\rho_i$ punktweise und monoton wachsend gegen $|f|$. Die zugehörige Integralfolge ist nach (ii) beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi ist also $|f|$ integrierbar. Weiter gilt

$$\left| \sum_{i=0}^k f\rho_i \right| \le |f| \quad \text{für alle } k.$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist also $f = \sum_{i=0}^{\infty} f\rho_i$ integrierbar und es gilt

$$\int_M f\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_M f\rho_i\,dx.$$

Es sei umgekehrt f integrierbar und (ρ_i) eine beliebige Partition der Eins. Da ρ_i beschränkt und messbar ist, ist nach Korollar 7.2 auch $f\rho_i$ integrierbar. Also ist (i) erfüllt. Aus

$$\sum_{i=0}^{k} \int_M |f|\rho_i\,dx \leq \int_M |f|\,dx$$

folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i\,dx \leq \int_M |f|\,dx < \infty,$$

also (ii).

(b) Allgemeiner Fall: O.E. sei ganz M ein Kartengebiet, $\varphi : M \to V \subset \mathbb{R}^k$ eine Karte. Setze

$$\eta_i := \rho_i \circ \varphi^{-1}, \quad F := (f \circ \varphi^{-1})\sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial y_i}, \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial y_j}\right\rangle\right)}.$$

Dann ist (η_i) eine Partition der Eins auf V und es gilt

$$f\rho_i \text{ integrierbar über } M \Leftrightarrow F\eta_i \text{ integrierbar über } V,$$

$$\int_M f\rho_i = \int_V F\eta_i\,dy, \quad \int_M f = \int_V F\,dy.$$

Damit kann man den Fall (b) auf den Fall (a) zurückführen. □

Definition Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar über* M, wenn es eine einem Atlas von M untergeordnete Partition der Eins $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass gilt:

(i) Jede Funktion $f\rho_i$ ist integrierbar über M.

(ii) $\sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i < \infty$.

Das *Integral von f über M* definieren wir durch

$$\int_M f := \sum_{i=0}^{\infty} \int_M f\rho_i.$$

Satz 15.4 *Sind die obigen Bedingungen (i) und (ii) für eine Partition (ρ_i) erfüllt, so auch für jede andere, einem Atlas untergeordnete Partition der Eins. Ebenso hängt das Integral von f nicht von der Wahl der Partition der Eins ab.*

Beweis. Es sei (η_j) eine weitere, einem Atlas untergeordnete Partition der Eins. Dann ist zu zeigen:

(i') Jede Funktion $f\eta_j$ ist integrierbar.

(ii') $\sum_{j=0}^{\infty} \int_M |f|\eta_j \leq \infty$.

(iii) $\sum_{j=0}^{\infty} \int_M f\eta_j = \sum_{i=0}^{\infty} \int_M f\rho_i$.

Zu (i'): Wende auf $f\eta_j$ das Partitionslemma mit (ρ_i) an: Da $f\rho_i$ integrierbar ist, folgt, dass auch $f\eta_j\rho_i$ integrierbar ist. Aus (ii) folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f\eta_j|\rho_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i < \infty.$$

Aus dem Partitionslemma folgt damit, dass $f\eta_j$ integrierbar ist und

$$\int_M f\eta_j = \sum_{i=0}^{\infty} \int_M f\eta_j\rho_i,$$

ebenso für $|f|$ anstelle von f.

Zu (ii'): Wende nun auf $f\rho_i$ das Partitionslemma mit (η_j) an: Es ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_M f\rho_i\eta_j = \int_M f\rho_i,$$

ebenso für $|f|$ anstelle von f. Aus (ii) folgt nun

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i\eta_j = \sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i < \infty.$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_M |f|\eta_j = \sum_{i=0}^{\infty} \int_M |f|\rho_i,$$

ebenso für f anstelle von $|f|$. Daraus folgt (ii') und (iii). □

16 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten und Anwendungen

Wir wollen nun den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Zunächst müssen wir uns noch einmal mit Orientierungen beschäftigen.

Definition Es sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Eine *Orientierung von* M ist dadurch gegeben, dass man für jeden Punkt $p \in M$ eine Orientierung des Tangentialraums T_pM, also eine geordnete Basis, angibt, so dass die folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist: Es gibt einen Atlas von M, so dass mittels der Karten die Orientierungen der T_pM einer fest gewählten Orientierung des $\mathbb{R}^k$ entsprechen.

Anders formuliert lautet die Verträglichkeitsbedingung: Für jede Karte (U, φ, V) des Atlas gilt: Ist $(e_1, \dots, e_k)$ die fest gewählte Orientierung des $\mathbb{R}^k$, so ist für jedes $p \in U$

$$((\varphi^{-1})'(\varphi(p))e_1, \dots, (\varphi^{-1})'(\varphi(p))e_k)$$

die Orientierung von T_pM.

Einen solchen Atlas nennt man einen *orientierten Atlas*. Ein Atlas ist genau dann orientiert, wenn sämtliche Kartenwechsel orientierungserhaltend sind, d.h. die Funktionaldeterminante positiv ist.

Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.

Eine Orientierung von M ist die Wahl einer Orientierung von $\mathbb{R}^k$ und eines orientierten Atlas von M. Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung von M.

Das klassische Beispiel einer nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband.

Wir wollen nun besondere kompakte Mengen in Mannigfaltigkeiten betrachten, nämlich solche, die einen glatten Rand haben.

Definition Eine *kompakte Mannigfaltigkeit B mit Rand* in einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ ist eine kompakte Teilmenge B in M mit der Eigenschaft: Zu jedem $p \in B$ gibt es eine Karte (U, φ, V) von M mit $p \in U$, so dass entweder

(a) $U \subset B$

oder

(b) $\varphi(U \cap B) = \{y \in V \mid y_1 \leq 0\}$ und $\varphi(p)$ hat als erste Koordinate 0.

Bemerkung 16.1 Es können nicht beide Möglichkeiten gleichzeitig eintreten. (Warum?)

Definition Diejenigen Punkte von B, für die die Alternative (b) zutrifft, heißen *Randpunkte* von B, alle anderen Punkte heißen *innere Punkte* von B. Der *Rand ∂B von B* ist die Menge der Randpunkte von B.

Der Rand ∂B von B ist wieder eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, nämlich eine $(k-1)$-dimensionale: Aus jeder Karte (U, φ, V) um einen Randpunkt $p \in \partial B$ mit der Eigenschaft (b) lässt sich leicht eine Karte des Randes ∂B um p gewinnen: $U \cap \partial B$ ist offen in ∂B, und

$$\varphi|_{U \cap \partial B} : U \cap \partial B \to \{y \in V \mid y_1 = 0\} = V \cap \mathbb{R}^{k-1}$$

ist eine Karte von ∂B um p.

Alle Punkte von B – aufgefasst als Punkte von M – haben einen wohldefinierten Tangentialraum. Ein Randpunkt $p \in \partial B$ hat als Punkt der $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ∂B einen $(k-1)$-dimensionalen Tangentialraum $T_p(\partial B)$, der ein Unterraum des k-dimensionalen Tangentialraums $T_p(M)$ ist.

Wenn M orientiert ist, ist es B auch. Ist M eine orientierbare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, dann ist auch der Rand ∂B orientierbar. Ist M orientiert, so erhält man eine kanonische Orientierung von ∂B mit Hilfe der Orientierung von M wie folgt:

Es sei $p \in \partial B$ und (U, φ, V) eine Karte um p mit Eigenschaft (b), die die gegebene Orientierung von M bestimmt. Wir nehmen an, dass die Orientierung von M und die Karte (U, φ, V) so gewählt sind, dass V die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^k$ hat. Dann betrachten wir die Einschränkungsabbildung

$$\widetilde{\varphi} = \varphi|_{U \cap \partial B} : \begin{array}{ccc} U \cap \partial B & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k-1} \\ x & \longmapsto & (y_2, \ldots, y_k) \end{array} .$$

Als Orientierung von ∂B in p wählen wir die hierdurch bestimmte Orientierung, wobei die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^{k-1}$ genommen wird.

Diese Orientierung $\underline{\text{or}}$ des Randes ∂B hat folgende Eigenschaft:

$$(\text{Richtung nach außen}, \underline{\text{or}}) = \text{gegebene Orientierung von } M \text{ in } p.$$

Genauso hatten wir in §13 das Rechteck (bzw. den Quader) und seinen Rand orientiert. Man muss nun noch kontrollieren, dass diese Definition unabhängig von der gewählten Karte ist und die Orientierungen in den verschiedenen Randpunkten miteinander verträglich sind. Dies folgt daraus, dass die Kartenwechsel orientierungserhaltende Diffeomorphismen sind (Details als Übung).

Wir wollen nun Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten erklären. Es sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ mit einem Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i)_{i \in I}\}$.

Definition Eine *p-Form auf M* ist ein System $\{\omega^{(i)} \mid i \in I\}$ mit

$$\omega^{(i)} \in \Omega^p(V_i) \quad \text{für jedes } i,$$

das der folgenden Bedingung genügt: Für jedes $(i,j) \in I \times I$ und jeden Kartenwechsel

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \to \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$$

gilt

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \omega^{(i)} = \omega^{(j)}$$

(wobei mit $\omega^{(i)}$ und $\omega^{(j)}$ hier die Einschränkungen von $\omega^{(i)}$ und $\omega^{(j)}$ auf $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ bzw. $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ gemeint sind).

Es sei

$$\Omega^p(M) := \{p\text{-Formen auf } M\}.$$

Notation Wir bezeichnen die p-Form $\omega^{(i)}$ im Folgenden auch mit $(\varphi_i^{-1})^*\omega$.

Die Form $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ ist definiert als das System der $d\omega^{(i)} \in \Omega^{p+1}(V_i)$. Dies definiert eine $(p+1)$-Form auf M, denn

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* d\omega^{(i)} = d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \omega^{(i)} = d\omega^{(j)}.$$

Wir wollen nun Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten integrieren.

Es sei M eine orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^k(M)$. Es sei B eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand in M. Unser Ziel ist es, $\int_M \omega$ und $\int_B \omega$ zu definieren.

Alle Karten, die wir betrachten, seien aus einem orientierten Atlas von M, der die gegebene Orientierung liefert.

Angenommen, die Form ω sei bezüglich einer Karte (U, φ, V) gegeben als

$$(\varphi^{-1})^*\omega = a dy_1 \dots dy_k.$$

Ist $p \in U$, so sagen wir $\omega = 0$ *im Punkt* p, wenn $a(\varphi(p)) = 0$ gilt. Man beachte, dass diese Bedingung unabhängig von der gewählten Karte ist. (Warum?)

Der *Träger von* ω ist die Menge

$$\mathrm{Tr}(\omega) := \overline{\{p \in M \,|\, \omega \neq 0 \text{ in } p\}}.$$

Zunächst setzen wir voraus, dass ω einen kompakten Träger hat, der ganz in einem Kartengebiet U liegt.

Definition Ist (U, φ, V) die genannte Karte, so setzen wir

$$\int_M \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(\mathrm{Tr}(\omega))} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(\mathrm{Tr}(\omega))} a dy_1 \dots dy_k.$$

Dieses Integral existiert auf jeden Fall. Wir müssen zeigen, dass es unabhängig von der Kartenwahl ist. Es sei dazu $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{V})$ eine weitere Karte, für die $\mathrm{Tr}(\omega) \subset \widetilde{U}$ ist. Zu zeigen ist also:

$$\int_{\varphi(\mathrm{Tr}(\omega))} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\widetilde{\varphi}(\mathrm{Tr}(\omega))} (\widetilde{\varphi}^{-1})^* \omega.$$

Das ist aber gerade Satz 12.7 (Verhalten des Integrals unter Parameterwechsel), der dortige Parameterwechsel g ist gerade der Kartenwechsel. Da wir vorausgesetzt haben, dass beide Karten aus einem orientierten Atlas stammen, ist der Kartenwechsel orientierungserhaltend, d.h. hat eine positive Funktionaldeterminante. Dies wurde in Satz 12.7 vorausgesetzt.

Analog setzt man:

Definition

$$\int_B \omega := \int_{\varphi(B \cap \mathrm{Tr}(\omega))} (\varphi^{-1})^* \omega$$

für eine Karte (U, φ, V) wie oben.

Die Wohldefiniertheit ist wie oben einzusehen.

Im allgemeinen Fall benutzen wir nun zur Definition von $\int_B \omega$ wie in §15 Partitionen der Eins.

Es sei $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i)_{i \in I}\}$ ein orientierter Atlas von M, der die gegebene Orientierung bestimmt. Es sei $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine der Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Partition der Eins, die nach Satz 15.3 existiert. Wir können zusätzlich annehmen, dass jedes ρ_j einen kompakten Träger hat.

Dann ist $\rho_j \omega$ eine wohldefinierte k-Form auf M mit kompaktem Träger, der ganz in einem Kartengebiet liegt, so dass der vorher behandelte Fall zutrifft. Wir definieren also:

Definition

$$\int_B \omega := \sum_{j=0}^{\infty} \int_B \rho_j \omega.$$

(Dabei ist die rechte Seite wie oben erklärt.)

Wie in Satz 15.4 zeigt man, dass diese Definition unabhängig von der gewählten, der Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ untergeordneten Partition der Eins ist.

Wir haben nun die notwendigen Begriffe bereitgestellt, um den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten zu formulieren.

Satz 16.1 (Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten) *Es sei M eine k-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, $B \subset M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂B. Schließlich sei $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ eine $(k-1)$-Form auf M.*

Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega.$$

Beweis. (a) Wir nehmen zunächst an, dass der Träger $\mathrm{Tr}(\omega)$ von ω ganz im Kartengebiet U einer Karte (U, φ, V) und obendrein im Bild unter φ^{-1} eines offenen Quaders $\overset{\circ}{Q} \subset \mathbb{R}^k$ liegt.

Dann gilt

$$\int_{\partial B} \omega = 0 \quad (\text{da } \omega = 0 \text{ auf } \partial B).$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}
\int_B d\omega &= \int_V (\varphi^{-1})^* d\omega \quad (\text{nach Definition}) \\
&= \int_Q (\varphi^{-1})^* d\omega \quad (\text{da } \mathrm{Tr}((\varphi^{-1})^* d\omega) \subset Q) \\
&= \int_Q d(\varphi^{-1})^* \omega \quad (\text{nach Definition}) \\
&= \int_{\partial Q} (\varphi^{-1})^* \omega \quad (\text{Satz von Stokes für Quader, Satz 13.2}) \\
&= 0 \qquad\qquad (\text{da } (\varphi^{-1})^* \omega = 0 \text{ auf } \partial Q).
\end{aligned}$$

(b) Nun nehmen wir an, dass der Träger $\mathrm{Tr}(\omega)$ von ω ganz im Kartengebiet U einer Karte (U, φ, V) liegt, das die folgende Eigenschaft hat: $\varphi(U \cap B) = \{y \in V \,|\, y_1 \leq 0\}$ und $B \cap \mathrm{Tr}(\omega)$ liege im Bild unter φ^{-1} des Quaders

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^k \,|\, a_1 < y_1 \leq 0,\ a_i < y_i < b_i \text{ sonst}\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_B d\omega &= \int_Q (\varphi^{-1})^* d\omega \quad (\text{Definition und } \mathrm{Tr}(\omega) \cap B \subset \varphi^{-1}(Q)) \\
&= \int_Q d(\varphi^{-1})^* \omega \quad (\text{nach Definition}) \\
&= \int_{\partial Q} (\varphi^{-1})^* \omega \quad (\text{Satz von Stokes für Quader, Satz 13.2}) \\
&= \int_{\partial B} \omega.
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall kann nun mit Hilfe einer Partition der Eins auf diese beiden Fälle zurückgeführt werden. Details zur Übung. □

Wir wollen nun Anwendungen dieses Satzes betrachten.

Zunächst definieren wir in Anlehnung an §15 eine Volumenform für eine orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

Es sei M eine orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ mit einem orientierten Atlas. Dann erklären wir die *Volumenform* σ kartenweise wie folgt: Es sei (U, φ, V) eine Karte aus dem gegebenen orientierten Atlas und $y_1, \ldots, y_k$ die Koordinaten von V. Dann ist σ die k-Form, die in der Karte (U, φ, V) die Gestalt

$$\left[\det\left(\left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y_i}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y_j} \right\rangle\right)\right]^{1/2} dy_1 \ldots dy_k$$

hat. Die Verträglichkeitsbedingung folgt aus dem Beweis von Lemma 15.1.

Als Beispiel soll nun die Volumenform der S^{n-1} berechnet werden. Es gilt

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Dies ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Das folgt daraus, dass

$$S^{n-1} = \partial B^n,$$

wobei $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel ist. Diese ist offenbar eine orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^n$. Damit erhält S^{n-1} eine wohldefinierte Orientierung als Rand von B^n.

Es sei

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Dann ist

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 1\}.$$

Die Volumenform σ der S^{n-1} ist demnach wohlerklärt und hat nach Beispiel 15.4 (Volumen einer Niveaufläche) den Wert

$$\begin{aligned} \sigma &= (-1)^{i-1} \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{1}{x_i} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \end{aligned}$$

in der Karte mit $x_i \neq 0$.

Die Volumenform σ kann auch als Einschränkung (d.h. mit der Inklusion zurückgeholten Form) der auf der Menge

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq 0\}$$

definierten Form

$$(-1)^{i-1} \frac{1}{x_i} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

verstanden werden.

Außerdem ist σ die Einschränkung der folgenden auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierten $(n-1)$-Form:

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n.$$

Denn es gilt ja für $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$

$$\alpha|_{S^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma = \sigma.$$

(Man beachte aber, dass

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$$

keine kartenweise Darstellung von σ ist, sondern nur eine laxe Schreibweise für $\sigma = \alpha|_{S^{n-1}}$.)

Nun können wir die Oberfläche der n-dimensionalen Kugel, also das $(n-1)$-dimensionale Volumen der S^{n-1} berechnen.

Nach Stokes ist

$$v_{n-1}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \sigma = \int_{S^{n-1}} \alpha = \int_{B^n} d\alpha,$$

aber

$$d\alpha = n dx_1 \dots dx_n,$$

also gilt

$$v_{n-1}(S^{n-1}) = n \cdot v_n(B^n),$$

also z.B. $v_2(B^2) = \pi$, $v_1(S^1) = 2\pi$.

Allgemeiner folgt mit unseren Rechnungen aus §9: Ist $B_r^n(0)$ die Kugel um 0 vom Radius r und $S_r^{n-1} = \partial B_r^n(0)$, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(v_n(B_r^n(0))) &= \frac{\partial}{\partial r}(r^n v_n(B^n)) \\ &= n r^{n-1} v_n(B^n) \\ &= r^{n-1} v_n(S^{n-1}) \\ &= v_{n-1}(S_r^{n-1}). \end{aligned}$$

Das bedeutet: Man erhält die Oberfläche der Kugel aus dem Kugelvolumen durch Differentiation nach r.

Die Darstellung der folgenden Anwendungen ist durch die Vorlesung

- Infinitesimalrechnung III. Eine Vorlesung aus dem Wintersemester 1979/80 an der Universität Bonn von F. Hirzebruch, Mitschrift von A. Küster.

beeinflusst.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{|x|} \end{array}.$$

Dies ist eine C^∞-Abbildung, die die vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen auf den Punkt der Sphäre abbildet, in dem sie der Strahl durchstößt.

Zieht man die Volumenform σ auf S^{n-1} mittels π nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zurück, so erhält man (Rechnung als Übung)

$$\omega := \pi^*\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x_i}{\left(\sum x_j^2\right)^{n/2}} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n.$$

(Ist $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion, so ist $\pi \circ \iota = \mathrm{id}$ also ist die Einschränkung von ω auf S^{n-1} wieder die Volumenform σ.)

Satz 16.2 *Auf S^{n-1} gilt $d\omega = 0$, d.h. ω ist geschlossen. Aber ω ist dort nicht exakt.*

Beweis. (a) Es gilt

$$d\omega = \pi^* d\sigma = 0,$$

da $d\sigma$ eine n-Form auf der $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^{n-1}, also 0, ist.

(b) Angenommen, ω wäre exakt. Dann gäbe es ein $\beta \in \Omega^{n-2}(S^{n-1})$ mit $d\beta = \omega$, und es wäre

$$v_{n-1}(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \omega = \int_{\partial S^{n-1}} \beta = 0,$$

da $\partial S^{n-1} = \emptyset$. Widerspruch! □

Es sei nun ω_0 die auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erklärte $(n-1)$-Form

$$\omega_0 = \frac{1}{v_{n-1}(S^{n-1})} \omega.$$

Bemerkung 16.2 Für jedes $r > 0$ ist

$$\int_{S_r^{n-1}} \omega_0 = 1.$$

(Beweis als Übung, Hinweis: Transformationssatz!)

Mit Hilfe dieser Differentialform lassen sich Umlaufszahlen definieren für C^∞-differenzierbare Bilder der Sphäre. Die Umlaufszahl misst, wie oft sich das Bild um den Nullpunkt windet.

Definition Ist $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine C^∞-Abbildung, so heißt

$$\operatorname{Uml}(f,0) := \int_{S^{n-1}} f^*\omega_0$$

die *Umlaufszahl von f um* 0.

Bemerkung 16.3 Man kann zeigen, dass die Umlaufszahl stets eine ganze Zahl ist. Der Beweis ist allerdings ziemlich schwierig. Deswegen werden wir diese Tatsache weder beweisen noch benutzen.

Beispiel 16.1 Wir betrachten den Fall $n = 2$. Dann ist

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Das Volumenelement (Linienelement) der 1-Sphäre S^1 ist $d\varphi$, wobei φ der Winkel zur x_1-Achse ist. Die Funktion

$$\varphi(x_1, x_2) := \arctan\frac{x_2}{x_1}$$

ist auf der Teilmenge $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ wohlerklärt. Es gilt auf $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \neq 0\}$:

$$d\varphi = d\arctan\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2 + x_2^2} = \omega.$$

(Man beachte, dass dies nicht etwa bedeutet, dass ω exakt ist im Widerspruch zu Satz 16.2. Denn die Funktion φ ist nicht auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert.)

Es sei nun $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞-Abbildung. Dann gilt

$$\operatorname{Uml}(f,0) = \int_{S^1} f^*\omega_0 = \int_{S^1} \frac{1}{2\pi} df^*\varphi = \int_{S^1} \frac{1}{2\pi} d(\varphi \circ f).$$

Dies macht zumindest im Fall $n = 2$ plausibel, dass die Umlaufszahl eine ganze Zahl ist: es werden hier Winkelelemente aufsummiert und anschließend durch 2π geteilt.

In der Funktionentheorie werden wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Man setzt $z = x_1 + ix_2$ und betrachtet die folgende 1-Form in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{dx_1 + idx_2}{x_1 + ix_2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{(dx_1 + idx_2)(x_1 - ix_2)}{(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{1}{2\pi i}\frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Eine komplexe 1-Form kann man einfach als ein Paar reeller 1-Formen auffassen: Real- und Imaginärteil der 1-Form. Mit $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z} &= \omega_0 + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}d\ln r^2 \\ &= \omega_0 + \frac{1}{2\pi i}d\ln r. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist der Imaginärteil exakt. Integrieren geschieht auch nach Real- und Imaginärteil getrennt. Also gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} f^*\frac{dz}{z} = \int_{S^1} f^*\omega_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} f^* d\ln r = \mathrm{Uml}(f,0),$$

denn nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{S^1} df^* \ln r = \int_{\partial S^1} f^* \ln r = 0,$$

da $\partial S^1 = \emptyset$.

Die Umlaufszahl spielt nun in dem folgenden Satz eine Rolle:

Satz 16.3 (Nullstellensatz) *Es sei U eine offene Umgebung der Kugel B^n und $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Abbildung. Die Einschränkung $g|_{S^{n-1}}$ habe keine Nullstelle. (Dann ist $\mathrm{Uml}(g|_{S^{n-1}}, 0)$ wohldefiniert.) Ist $\mathrm{Uml}(g|_{S^{n-1}}, 0) \neq 0$, so hat g im Innern von B^n eine Nullstelle.*

Beweis. Angenommen, g hätte keine Nullstelle im Innern von B^n. Dann hätten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Uml}(g|_{S^{n-1}}, 0) &= \int_{S^{n-1}} (g|_{S^{n-1}})^*\omega_0 \\ &= \int_{B^n} dg^*\omega_0 \quad \text{(Satz von Stokes)} \\ &= \int_{B^n} g^* d\omega_0 \\ &= 0 \qquad (\text{da } d\omega_0 = 0 \text{ nach Satz 16.2}). \end{aligned}$$

□

Es ist plausibel, dass sich die Umlaufszahl nicht ändert, wenn man f ein wenig abändert. Sie ändert sich erst dann und dann gleich um eine ganze Zahl, wenn man das Bild von f über den Nullpunkt schiebt. Das wollen wir nun präzisieren.

Ist I das Intervall $[0, 1]$, so ist $S^{n-1} \times I$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand in der etwas größeren Mannigfaltigkeit $S^{n-1} \times J \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $J \supset [0, 1]$ ein offenes Intervall ist, das $[0, 1]$ enthält. Deswegen ist die Differenzierbarkeit von Abbildungen auf $S^{n-1} \times I$ wohlerklärt, nämlich mit Hilfe von Karten der größeren Mannigfaltigkeit $S^{n-1} \times J$.

Satz 16.4 *Es sei* $F : S^{n-1} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *eine* C^∞*-differenzierbare Abbildung mit* $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ *für alle* $x \in S^{n-1}$. *(Die Abbildung* F *heißt dann auch* C^∞-Homotopie *zwischen* f *und* g.*)*

Dann ist $\mathrm{Uml}(f,0) = \mathrm{Uml}(g,0)$.

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} \iota_0 \quad &: \quad S^{n-1} \to S^{n-1} \times I, \quad x \mapsto (x,0), \\ \iota_1 \quad &: \quad S^{n-1} \to S^{n-1} \times I, \quad x \mapsto (x,1). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathrm{Uml}(g,0) - \mathrm{Uml}(f,0) = \int_{S^{n-1}} g^*\omega_0 - \int_{S^{n-1}} f^*\omega_0 = \int_{\partial(S^{n-1}\times I)} F^*\omega_0.$$

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial(S^{n-1}\times I)} F^*\omega_0 = \int_{S^{n-1}\times I} dF^*\omega_0 = \int_{S^{n-1}\times I} F^* d\omega_0 = 0,$$

da $d\omega_0 = 0$. □

Satz 16.5 (Satz von Poincaré-Bohl) *Es seien* $f, g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ C^∞*-differenzierbar. Liegt für jedes* $x \in S^{n-1}$ *der Punkt 0 nicht auf der Verbindungsstrecke*

$$\{tf(x) + (1-t)g(x) \,|\, t \in I\},$$

dann ist $\mathrm{Uml}(f,0) = \mathrm{Uml}(g,0)$.

Beweis. Man setzt $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 16.4. □

Satz 16.6 (Satz von Rouché) *Es seien* $f, g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ C^∞*-differenzierbar. Außerdem sei für* $x \in S^{n-1}$

$$|f(x) - g(x)| < |f(x) - 0|.$$

Dann ist $\mathrm{Uml}(f,0) = \mathrm{Uml}(g,0)$.

Beweis. Wegen $|f(x) - g(x)| < |f(x) - 0|$ für alle $x \in S^{n-1}$ folgt, dass 0 nicht auf der Verbindungsstrecke von $f(x)$ und $g(x)$ liegt. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Poincaré-Bohl. □

Es ist offensichtlich, dass alle diese Sätze Analoga haben, wenn man S^{n-1} durch S_r^{n-1} ersetzt. Zum Beispiel:

Satz 16.7 (Nullstellensatz für beliebigen Radius) *Es sei U eine offene Umgebung der Kugel $B_r^n(0)$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Abbildung. Die Einschränkung $f|_{S_r^{n-1}}$ habe keine Nullstelle. Ist $\mathrm{Uml}(f|_{S_r^{n-1}}, 0) \neq 0$, so hat f im Innern von $B_r^n(0)$ mindestens eine Nullstelle.*

Satz 16.8 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to z^n$. Dann gilt*

$$\mathrm{Uml}(f|_{S_r^1}, 0) = n.$$

Beweis. Es gilt nach obigem Beispiel

$$\begin{aligned}\mathrm{Uml}(f|_{S_r^1}, 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r^1} f|_{S_r^1}^* \left(\frac{dz}{z}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r^1} \frac{dz^n}{z^n}\\ &= \frac{n}{2\pi i}\int_{S_r^1} \frac{dz}{z} = n.\end{aligned}$$

□

Wir beweisen jetzt den Fundamentalsatz der Algebra, zu dem C. F. Gauß 7 Beweise geliefert hat.

Satz 16.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Gegeben sei ein Polynom $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ vom Grad $n > 0$. Dann gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $g(z) = 0$.*

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den Satz von Rouché.

Wir setzen $f(z) = z^n$. Dann gilt

$$|f(z) - g(z)| = |a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n|.$$

Es sei nun $r \in \mathbb{R}$ mit

$$r > 1 \text{ und } r > \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Auf dem Kreis S_r^1 vom Radius r ist

$$|f(z) - g(z)| \leq |z|^{n-1}(|a_1| + \ldots + |a_n|) < |z|^n = |z^n|.$$

Nach dem Satz von Rouché ist also

$$\mathrm{Uml}(g|_{S_r^1}, 0) = \mathrm{Uml}(f|_{S_r^1}, 0).$$

Nach Satz 16.8 gilt

$$\mathrm{Uml}(f|_{S_r^1}, 0) = n \neq 0.$$

Aus dem Nullstellensatz (Satz 16.7) folgt, dass es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ gibt, so dass $g(z) = 0$. □