Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 10. April 2003

1. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 17. April 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 1 *(je 5 Punkte)*

Man berechne:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx$, $(a, b > 0)$; b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Man zeige die Existenz von $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \lim_{X\to\infty} \int_0^X \frac{\sin t}{t}\, dt.$

Bemerkung: Der Wert des Integrals ist $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Für die Normen $\|x\|_p, (1 \le p \le \infty)$, im $\mathbb{R}^n$ beweise man die Ungleichungskette

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

und skizziere für $n = 2$ die *Einheitskugeln* $B_p(0, 1) := \{x : \|x\|_p \le 1\}$ mit $p = 1, 2, \infty$.

Aufgabe 4 *(je 5 Punkte)*

Sei l_∞ der Vektorraum der reellen und beschränkten Folgen. Für $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_\infty$ sei

$$\|x\|_1 := \sup\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \|x\|_2 := \sup\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right| : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}.$$

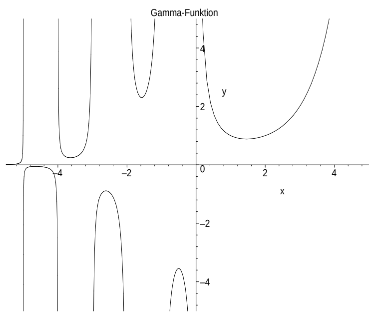
Man zeige:

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind Normen auf l_∞.

b) Für alle $x \in l_\infty$ gilt $\|x\|_2 \le \|x\|_1$. Es gibt aber kein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\|x\|_1 \le \beta\,\|x\|_2$ für alle $x \in l_\infty$.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)* Γ-*Funktion* *(*)*

Man zeige, dass für alle $x > 0$ das Integral $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ existiert und $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ gilt. Schliesslich berechne man $\Gamma(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~koeditz/Analysis2/Ana2_03.htm

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 17. April 2003

2. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 24. April 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 6 *(je 5 Punkte)*

Sei $l_2 := \left\{ (x_n) : (x_n) \text{ Folge in } \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \text{ konvergent} \right\}$. Man zeige:

a) Durch $\|x\| := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$ wird eine Norm auf l_2 definiert.

b) Die Einheitskugel $B = \{x \in l_2 : \|x\| \leq 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht jede Folge in B enthält eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 7 *(2,3 und 5 Punkte)*

Man zeige, dass für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gilt:

a) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.

b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so ist auch $A \cup B$ abgeschlossen.

c) Ist I eine beliebige Indexmenge und ist $A_i \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen für jedes $i \in I$, so ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Man zeige: $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

Aufgabe 9 *(10 Punkte)*

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{T}_d$ die zugehörige Topologie. Man zeige, dass durch $\delta(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ebenfalls eine Metrik auf X mit $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_d$ definiert ist. Gilt für $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) := |x - y|$, der Satz von Heine-Borel in $(\mathbb{R}, \delta)$?

Aufgabe 10 *(10 Punkte)* *Satz von* Baire *Knacki*

Sei (A_k) eine Folge abgeschlossener Mengen im $\mathbb{R}^n$ derart, daß ihre Vereinigung A eine offene Kugel enthält. Man zeige: Dann enthält auch mindestens ein A_k eine offene Kugel.
Hinweis: Angenommen, alle A_k° sind leer. Dann gibt es eine Folge abgeschlossener Kugeln $K_k \subset A$ mit $K_{k+1} \subset K_k$ und $K_k \cap A_k = \emptyset$. Da der Durchschnitt aller K_k nicht leer ist (Satz von Cantor) ergibt sich daraus ein Widerspruch.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 24. April 2003

3. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 8. Mai 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 11 *(3, 4, 3 Punkte)*
Für folgende Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ skizziere man (sorgfältig!) einige Niveaumengen und die Graphen:

a) $f(x,y) := x^2 - y^2$; b) $g(x,y) := \sqrt{|x| \cdot |y|}$; c) $h(x,y) := |x| + |y|$.

Aufgabe 12 *(4, 3, 3 Punkte)*
Betrachtet sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := (y^2 + x)(y^2 + 2x)$.

a) Man zeige, dass die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt im Nullpunkt ein relatives Minimum hat.
b) Man skizziere die Niveaumenge $N_f(0) = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ und untersuche das Vorzeichenverhalten von f.
c) Besitzt f im Nullpunkt ein relatives Minimum?

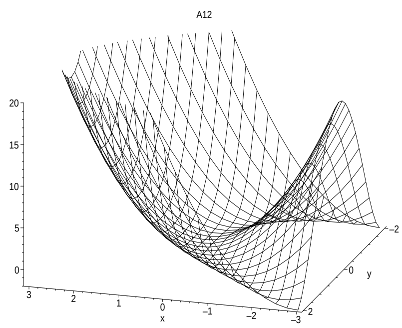
Aufgabe 13 *(je 5 Punkte)*

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$. Man zeige: f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch $(0,0)$ ist stetig, f ist jedoch im Nullpunkt unstetig.
b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Man zeige, daß die Funktion f im Nullpunkt einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 14 *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige: Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}^{n*} := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ wegzusammenhängend.
b) Man zeige: Zu jeder stetigen Funktion $f : S^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, gibt es ein Paar antipodaler Punkte $x, -x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Aufgabe 15 *(10 Punkte)* *Knacki*
Man zeige: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, so gibt es eine stetige Funktion $f_{A,B} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f_{A,B}(\bar{A}) = \{0\}$, $f_{A,B}(\bar{B}) = \{1\}$ und $f_{A,B}(\mathbb{R}^n \setminus (\bar{A} \cup \bar{B})) = (0,1)$.



Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 8. Mai 2003

4. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 15. Mai 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 16 *(je 5 Punkte)*

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt bekanntlich die Form $f(x) = A \cdot x$ mit einer quadratischen Matrix $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,n}}$. Nach Wahl einer Norm im $\mathbb{R}^n$ definiert man als *Matrixnorm* die Norm der zug. linearen Abbildung: $\|A\| := \|f\|$. Man zeige:

a) Wählt man im $\mathbb{R}^n$ die Maximumnorm $\|x\| := \|x\|_\infty$, so erhält man als zug. Matrixnorm die Zeilensummennorm $\|A\| = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$.
Wählt man im $\mathbb{R}^n$ die Betragssummennorm $\|x\| := \|x\|_1$, so erhält man als Matrixnorm die Spaltensummennorm $\|A\| = \max_{k=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$.

b) Wählt man im $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm $\|x\| := \|x\|_2$, so erhält man für die zug. Matrixnorm $\|A\| \le \left(\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2\right)^{1/2}$. Man gebe eine Matrix A an, für die die strenge Ungleichung gilt.

Aufgabe 17 *(10 Punkte)*

Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Man zeige: f ist genau dann stetig, wenn $\|f\|$ existiert, d.h. wenn $(\|f\| :=) \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$ existiert.

Aufgabe 18 *(1, 3, 3, 3 Punkte)* *Kegelschnitte*

Die *Kegelschnitte* lassen sich in Polarkoordinaten in einheitlicher Weise durch die Formel

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \quad , \quad (\varepsilon \ge 0, p > 0)$$

darstellen. Man zeige (und berechne e, a, b):

a) Für $\varepsilon = 0$ erhält man einen Kreis vom Radius p.

b) Für $0 < \varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse mit der Darstellung $\dfrac{(x+e)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

c) Für $\varepsilon = 1$ erhält man eine Parabel mit der Darstellung $y^2 + 2p\,(x - \dfrac{1}{2}\,p) = 0$.

d) Für $\varepsilon > 1$ erhält man eine Hyperbel mit der Darstellung $\dfrac{(x-e)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufgabe 19 *(je 5 Punkte)*

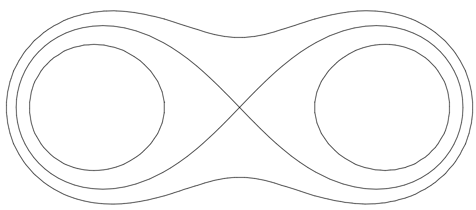
a) Die Einheitskreisscheibe rolle ohne Schlupf auf der x-Achse. Ein fest mit dem Kreis verbundener Punkt mit Abstand $a > 0$ vom Zentrum beschreibt dabei eine *Trochoide* (für $a = 1$: *Zykloide*). Man finde eine Parameterdarstellung und skizziere einige dieser Kurven.

   Anfangslagen: Kreis $K_0 = \{(x, y) : \|(x, y-1)\| \leq 1\}$; Punkt $(0, 1-a)$. Für $a = 1$ berechne man die Länge des Zykloidenbogens zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(2\pi, 0)$.

b) Sind $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2, P_1 \neq P_2$, gegeben, so heißt die Menge der Punkte deren Abstandsprodukt von P_1, P_2 konstant ist eine *Cassini*sche Kurve. Liegt $\frac{P_1+P_2}{2}$ auf dieser Kurve, so heißt sie eine *Lemniskate*. Zu $P_{1,2} = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ zeige man, daß die zug. Lemniskate in Polarkoordinaten in der rechten Halbebene durch $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, gegeben ist.

Aufgabe 20 *(10 Punkte)* *Heisenberg-Relation* *Knacki*

Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $S, T : V \to V$ stetige lineare Abbildungen.
Man zeige: $ST - TS \neq \text{id}$. $(ST(x) := (S \circ T)(x)), T^0 := \text{id})$
Hinweis: Aus $ST - TS = $id folgt leicht $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)\,T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgere man $\|T^m\| = 0$ für große m und somit $T^m = 0$ und induktiv $T^k = 0$, $k = 1, \cdots, m$.



*Cassini*sche Kurven

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 15. Mai 2003

5. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 22. Mai 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 21 *(je 5 Punkte)*

Man berechne die Länge des Bogens
a) der Parabel $y = ax^2,\ x \in [0, \xi]$. b) der *Neilschen* Parabel $f(t) = (t^2, t^3),\ t \in [0, \tau]$.

Aufgabe 22 *(je 5 Punkte)*

a) Für $c > 0$ wird durch $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{(c+i)t}$, eine *logarithmische Spirale* in der komplexen Ebene definiert. Man berechne die Bogenlänge der auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ eingeschränkten Kurve, und untersuche $a \to -\infty$. Man zeige ferner, dass die log. Spirale jede Gerade durch 0 unter dem gleichen Winkel α schneidet und $\tan\alpha = \frac{1}{c}$ gilt.

b) In Polarkoordinaten wird durch $r = \frac{1}{\varphi}, \varphi > 0$, eine *hyperbolische Spirale* definiert. Sei $l(\Phi)$ die Länge der auf $[1, \Phi]$ eingeschränkten Spirale. Existiert der Grenzwert $\lim_{\Phi\to\infty} l(\Phi)$?

Aufgabe 23 *(10 Punkte)* *Evolvente des Kreises*

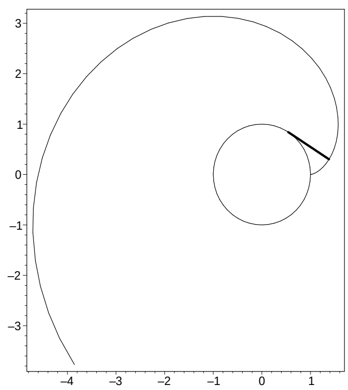
Der Endpunkt eines fest gespannten, vom Einheitskreis abgewickelten Fadens beschreibt eine *Evolvente* des Einheitskreises. Anfangslage des Endpunktes sei der Punkt $(1, 0)$, Endlage sei der Punkt $(1, -2\pi)$; es werde gegen den Uhrzeigersinn abgewickelt. Man ermittle eine Parameterdarstellung $\gamma(t)$ dieses Evolventenbogens und berechne die Länge.

Aufgabe 24 *(10 Punkte)*

Sei $A = (a_{ik})$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^t Ax$ die zugehörige quadratische Form. Zu $a \in \mathbb{R}^n$ ermittle man die Ableitung $f'(a)$ von f im Punkte a.

Aufgabe 25 *(10 Punkte)* *Knacki*

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, E eine Einteilung von $[a, b]$ und $\lambda(E)$ die Länge des zug. Streckenzuges (Skript S.31). Die Kurve γ heißt *rektifizierbar*, falls $\sup\{\lambda(E) : E \text{ ist Einteilung von } [a, b]\} < \infty$. Man überprüfe $\gamma_k : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_k(t) := \left(t, t^k \cos\frac{\pi}{t}\right)$, $t > 0$ und $\gamma_k(0) := (0, 0)$ für $k = 0, 1, 2$ auf Rektifizierbarkeit.



Evolvente des Einheitskreises

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 22. Mai 2003

6. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 5. Juni 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 26 *(10 Punkte)*

Für $a, b > 0$ sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y) := \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$. Man ermittle die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt (x_0, y_0, z_0) und zeige, dass diese Ebene den Graphen von f in zwei Geraden schneidet.

Aufgabe 27 *(5 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0,0) := 0$ und $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ (vgl. HA 13) gegeben. Man zeige: f besitzt im Nullpunkt in jede Richtung Richtungsableitungen.

Aufgabe 28 *(5 Punkte)*

Ein Wanderer steht im Punkt $(0,0,0)$ auf der durch $z = f(x,y) := \sin xy$ definierten Fläche. Er möchte auf direktem Wege (über der Geraden $y = x$) den Punkt $(1, 1, \sin 1)$ erreichen, kann jedoch maximal Steigungen von $45°$ bewältigen. Wird er sein Ziel erreichen?

Aufgabe 29 *(je 5 Punkte)* *Zylinder- und Kugelkoordinaten*

Man berechne Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante und Bildbereich für folgende Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, z) := (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)$;

b) $g : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(r, \varphi, \vartheta) := (r \cos\varphi \sin\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\vartheta)$.

Aufgabe 30 *(je 5 Punkte)*

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge, d.h. zu je zwei Punkte Punkten in D liegt auch die Verbindungsstrecke in D. Ferner sei $f : D \to \mathbb{R}^n, f = (f_1, \cdots, f_n)$, differenzierbar und für je n Punkte $x_1, \cdots, x_n \in D$ gelte

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0 \,.$$

a) Man zeige, dass f auf D umkehrbar ist.

b) Für $f := (x^2 - y^2, 2xy)$ ermittle man mit obiger Bedingung einen möglichst großen Definitionsbereich auf dem f umkehrbar ist.

Aufgabe 31 *(je 5 Punkte)* *(*)*

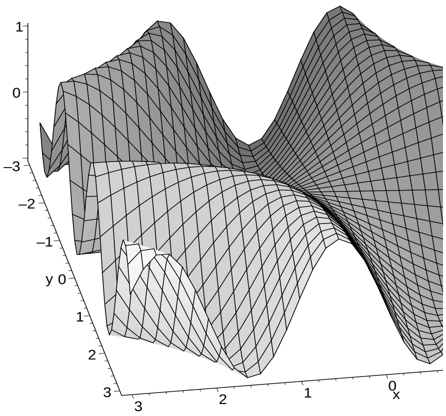
a) Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ mit einer Gaskonstanten c. Man zeige: $\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$.

b) Für ein reales Gas mit Druck P, Molvolumen V_m und absoluter Temperatur T gilt die VAN DER WAALSsche Gleichung

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) \;=\; RT \qquad (a, b, R \text{ Konstanten }) \,.$$

Man zeige: $\dfrac{\partial V_m}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial V_m} = -1$.

Bemerkung: Die Aussagen sind nur dort sinnvoll, wo die Gleichungen nach allen Variablen lokal auflösbar sind. Diese Bedingung soll hier nicht diskutiert werden.



Graph von $f(x, y) = \sin xy$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 5. Juni 2003

7. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 19. Juni 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 32 *(10 Punkte)*
Seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) \ := \ \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) \quad , \quad g(\xi,\eta,\zeta) \ := \ \|(\xi,\eta,\zeta-\frac{1}{2})\|_2 \ .$$

Man berechne die Jacobi-Matrizen $J_f,\ J_g$ und $J_{g\circ f}$.

Aufgabe 33 *(5 Punkte)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die in der Fehlerrechnung oft gebrauchte Abschätzung:
Gibt es $L_1, \cdots, L_n \geq 0$ mit $|D_i f(\xi)| \leq L_i$ für alle $\xi \in K$, so gilt für alle $x, x+\Delta x \in K$:

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} L_i \, |\Delta x_i| \ .$$

Aufgabe 34 *(je 5 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Man zeige:

a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar.
b) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar, berechne alle zweiten Ableitungen und zeige, daß $D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$.

Aufgabe 35 *(10 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zwei mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Der LAPLACE-Operator ist def. durch $\Delta f(x,y) := f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$. Mit $F(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ zeige man für $r \neq 0$:

$$\Delta f(x,y)\big|_{x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi} \ = \ \left(F_{rr} + \frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} F_r \right)(r,\varphi) \ .$$

Aufgabe 36 *(10 Punkte)*

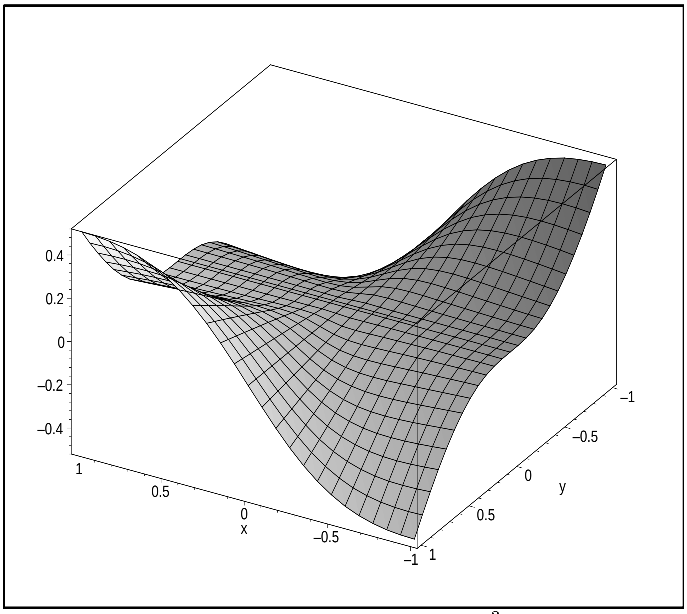
Man bestimme das Taylorpolynom $T_1(f;(x,y),(3,4))$ erster Ordnung von $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ an der Stelle $(3,4)$ und schätze den Rest für $\|(x-3,y-4)\|_2 < \frac{1}{10}$ ab.

Aufgabe 37 *(10 Punkte)* *Knacki*

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : G \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Man beweise folgende integrale Form des Mittelwertsatzes:

$$f(b) - f(a) \;=\; \left(\int_0^1 Df(a+t(b-a))\,dt\right) \cdot (b-a)\ , \qquad (a,b \in G)\ .$$

Hierbei ist $Df(x)$ die $(m \times n)$-Jacobimatrix, das Integral wird komponentenweise gebildet und das Produkt auf der rechten Seite ist das Produkt der Matrix mit dem Spaltenvektor $b-a$.



Graph von $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 19. Juni 2003

8. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 26. Juni 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 38 *(je 5 Punkte)*

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene und wegzusammenhängende Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion für die $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ auf ganz U gilt.

a) Durch Angabe eines Gegenbeispiels widerlege man die Aussage, dass f notwendigerweise von x unabhängig ist.

b) Man zeige: Ist U konvex, so ist f von x unabhängig, d.h. $f(a,y) = f(b,y)$ für alle $(a,y),(b,y) \in U$.

Aufgabe 39 *(5 Punkte)*

Man berechne das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^y$ an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,1)$.

Aufgabe 40 *(5 und 10 Punkte)*

Man bestimme Lage, Art und Größe der lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-x^2-y^2}$, $x,y \in \mathbb{R}$; b) $g(x,y) = y(1-x)\, e^{-x^2-y^2}$, $x,y \geq 0$.

Zu (b) ermittle man auch die globalen Extremwerte.

Aufgabe 41 *(10 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante $c \in [0,1)$. Man zeige, dass die Funktion $g := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) := x + f(x)$, bijektiv ist, und dass für die Umkehrabbildung
$\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{1-c}\, \|x-y\|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

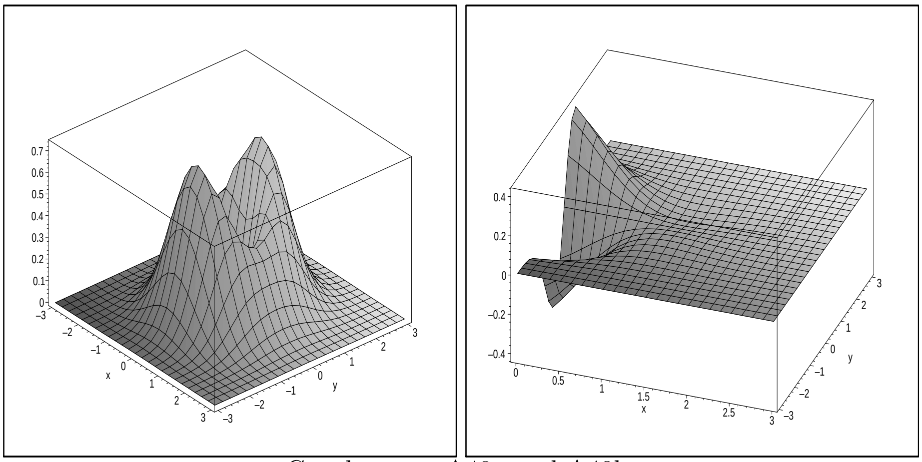
Aufgabe 42 *(3 und 7 Punkte)* *(*)*

Sei $S := \{(x,y) : x^2+y^2 < 1,\ x,y > 0\}$ und $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2}$.

a) Man ermittle die Tangentialebene an den Graphen von f über dem Punkte $(a,b) \in S$.

b) Die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit einer solchen Tangentialebene bilden zusammen mit dem Nullpunkt die Ecken eines Tetraeders. Man bestimme $(a,b) \in S$ so, dass das so erzeugte Tetraeder minimales Volumen besitzt.

(Volumen des Tetraeders: 1/3 Grundfläche · Höhe.)



Graphen von A40a und A40b.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 26. Juni 2003

9. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 3. Juli 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 43 *(5 Punkte)*
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x,y) := (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1)$. Man zeige, dass es eine offene Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine offene Umgebung des Punktes $(3,4)$ abgebildet wird, und berechne die Ableitung der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3,4)$.

Aufgabe 44 *(10 Punkte)*
Die Funktion $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$g(x,y,z,u) \ := \ \begin{pmatrix} e^{-1} - u\, e^{xy+z} \\ 2x^2 - y + z - u^2 \end{pmatrix} .$$

Man zeige, dass in einer offenen Umgebung von $(0,1)$ genau eine Funktion $\varphi(z,u)$ mit $\varphi(0,1) = (-1,1)$ und $g(\varphi(z,u), z, u) = 0$ existiert, und berechne $\varphi'(0,1)$.

Aufgabe 45 *(10 Punkte)*
Ist die Gleichung $\left(4\,(x^2+y^2) - x\right)^3 \ = \ 27\,(x^2+y^2)^2$ in Umgebungen von $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1/8, 0)$, $(0, \frac{3\sqrt{3}}{8})$ lokal nach x oder y auflösbar?

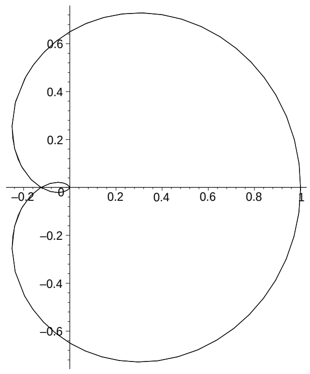
Aufgabe 46 *(10 Punkte)*
Man zeige, dass die Gleichung $f(x,y,z) := y^2 + x\,e^z - z^3 = 3$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ eine Funktion $z = g(x,y)$ definiert, und berechne das zweite Taylorpolynom von g um diesen Punkt.

Aufgabe 47 *(je 5 Punkte)* *(*)*

a) Sei $q > 0$ gegeben. Man zeige: Für alle $x_1, \cdots, x_n > 0$ mit $x_1 \cdots x_n = q^n$ gilt:

$$(1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \ \geq \ (1+q)^n .$$

b) Man maximiere $\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n$ unter der Nebenbedingung $0 \leq x_j \leq \pi$, $x_1 + \cdots + x_n = 2\pi$.



Klausur am Sa, 5. Juli 2003, 8.30 - 10.30
Raumverteilung: A - Ma im Audi Max, Me - Z im E 001

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 3. Juli 2003

10. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe am 10. Juli 2003 vor den Stundenübungen

Aufgabe 48 *(5 Punkte)*

Der BROCARDsche Winkel $\omega,\ 0 < \omega < \pi$, eines Dreiecks mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma > 0$ $(\alpha+\beta+\gamma = \pi)$ ist durch

$$\cot\omega \;=\; \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$$

eindeutig bestimmt. Man zeige: $\omega \leq \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 49 *(10 Punkte)*

Seien $a, b, c > 0$. Für $x, y, z > 0$ bestimme man die Extremwerte von

$$f(x,y,z) \;:=\; x + y + z \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\ .$$

Aufgabe 50 *(10 Punkte)*

Ein (anfänglich leeres) Aquarium wird mit konstantem Zufluß Z [l/sek] (> 0) gefüllt. Ein Sicherheitsventil sorgt für einen Ablauf $-ky(t)$ ($k > 0$ konstant), wobei $y(t)$ die Wassermenge im Aquarium zum Zeitpunkt t ist. Als mathematisches Modell erhält man das Anfangswertproblem $y' = Z - ky$, $y(0) = 0$. Man ermittle die Lösung $y(t)$ und bestimme $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Schließlich diskutiere man den Fall eines konstanten Abflusses $Z < 0$ bei Anfangsfüllung $V > 0$. Nach welcher Zeit ist das Aquarium leer?

Aufgabe 51 *(10 Punkte)*

Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcccl} y_1' &=& y_2\, y_3 &,& y_1(0) = 0 \\ y_2' &=& -y_1\, y_3 &,& y_2(0) = 1 \\ y_3' &=& 2 &,& y_3(0) = 0 \end{array}$$

mit Hilfe des PICARD-LINDELÖFschen Iterationsverfahren.

Aufgabe 52 *(10 und 5 Punkte)* *(a) als Knacki*

a) Sei $f : I \to \mathbb{R},\ I$ Intervall, eine Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genüge. Man zeige, dass jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ monoton ist.

b) Zur *logistischen Gleichung* $y' = \lambda\, y(1-y)$, $(\lambda > 0)$, skizziere man das Richtungsfeld und ermittle die Lösungsgesamtheit.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 10. Juli 2003

11. Übungsblatt zur Analysis II

Abgabe zur ersten Übung Analysis 3

Aufgabe 53 *(10 Punkte)* *Großes Verfolgungsproblem*

Am Ende eines beliebig dehnbares, im Punkt $x = 0$ befestigten Gummibandes der Anfangslänge $L > 0$ startet zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Rennwagen mit der konstanten Geschwindigkeit $V > 0$. Gleichzeitig startet bei $x = 0$ eine auf dem Gummiband krabbelnde Fliege mit der konstanten Geschwindigkeit $v > 0$. Für den Ort $x(t)$ der Fliege ergibt sich so die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = v + \dfrac{V}{L + tV}\, x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Wird die Fliege den Rennwagen einholen? Wenn ja, zu welcher Zeit?

Aufgabe 54 *(10 Punkte)* *Trapper und Indianer*

In den Ecken eines Quadrates der Seitenlänge $2a$ lauern zwei Trapper (in $(-a,-a)$ und (a,a)) und zwei Indianer (in $(a,-a)$ und $(-a,a)$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ starten alle zur Verfolgung des nächsten Nachbarn (natürlich im mathematisch positiven Sinn) mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v. Zu jedem Zeitpunkt bewegt sich jeder genau in Richtung dieses Nachbarn.

a) Nach welcher Zeit findet das blutige Zusammentreffen statt?

b) Auf welcher Kurve bewegt sich der in $(-a,-a)$ gestartete Trapper?

Aufgabe 55 *(10 Punkte)*

Vorgelegt sei das Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y$ mit einer auf $\mathbb{R}$ stetigen und p-periodischen Matrix A, d.h. $A(x+p) = A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige:

a) Mit $Y(x)$ ist auch $Y(x+kp)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Fundamentalsystem.

b) Zu jedem Fundamentalsystem $Y(x)$ gibt es eine reguläre Matrix C mit $Y(x+kp) = Y(x)C^k$ für alle $x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$.

c) Die Eigenwerte von C hängen nicht von der Wahl des Fundamentalsystems ab.

d) Zu jedem Eigenwert λ von C gibt es eine Lösung $y \not\equiv 0$ des Systems mit $y(x+p) = \lambda y(x)$ auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 56 *(10 Punkte)*

Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$ eine stetige $n \times n$-Matrix. Man zeige: Die Matrix A ist genau dann schiefsymmetrisch (d.h. $A^T = -A$), wenn jede Lösung y der Dgl. $y' = A\,y$ konstante Euklidnorm besitzt, d.h. $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = c$.

Aufgabe 57 *(10 Punkte)*

Man bestimme ein Fundamentalsystem nebst zug. Wronskideterminante für

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-1 & 1-x \\ x+2 & x-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung mit $u = v$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling und Mitarbeiter

Hannover, den 5. Juli 2003

Klausur zur Analysis II

Bearbeitungszeit: 8.30 – 10.30

Bitte jedes Blatt mit: Name, VName, Matr.Nr., Gruppenleiter beschriften!

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*
Man bestimme alle $\alpha, \beta > 0$ für die das Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Man zeige: f ist im $\mathbb{R}^2$ differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen f_x, f_y sind im Nullpunkt unstetig.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*
Gegeben seien die Kurven $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$f(t) := e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \qquad g(t) := \frac{1}{e}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\,.$$

a) Man berechne ihre Längen.

b) Man zeige, dass die beiden Kurven genau einen Schnittpunkt besitzen, und ermittle ihren Schnittwinkel.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*
Man bestimme das Taylorpolynom $T_2(x,y)$ zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y) := \sqrt{1+x+y}$ zum Enwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*
Man ermittle alle lokalen Extremwerte der Funktion $g(x,y) := x^3 + 2y^3 + 3xy$ auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*
Man zeige, dass die Gleichung

$$\cos xy - e^{x-y} + 2e^z = 0$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 0)$ eine Funktion $z = g(x,y)$ definiert, und bestimme die Richtungsableitung dieser Funktion an der Stelle $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ in Richtung des Vektors $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Viel Erfolg !!!!!!!!!