Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 21. Oktober 2002

# 1. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 28./29. Oktober 2002 vor den Stundenübungen

**Mit (*) oder *Knacki* gekennzeichnete Aufgaben sind Zusatzaufgaben, die Extrapunkte ergeben.**

**Aufgabe 1** *(5 Punkte)*
Man zeige: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt: $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

**Aufgabe 2** *(5 und 10 Punkte)*

a) Man zeige, dass $\sqrt{7}$ nicht rational ist.
b) Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) := \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ mit den in $\mathbb{R}$ definierten Verknüpfungen „+“ und „·“ ein Körper ist.

**Aufgabe 3** *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, gilt: $\quad x + \dfrac{1}{x} \geq 2.$
b) Man zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$, gilt: $\quad (y - x)^2 < y^2 - x^2.$
Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt hier das Gleichheitszeichen?

**Aufgabe 4** *(5 Punkte)* *(*)*
Sei $\mathbb{F}_2$ der in der Vorlesung definierte Körper mit genau zwei Elementen. Man zeige, dass $\mathbb{F}_2$ kein geordneter Körper sein kann.

**Tutorenprogramm:**

1. Man zeige: Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c, d \neq 0$, gilt: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad + bc}{cd}$.
2. Man bestimme alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\dfrac{x^2 + y}{x - y^2} < 1$.

http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~koeditz/Analysis1/Ana1_02.htm

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 28. Oktober 2002

# 2. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 4./5. November 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 5** *(10 Punkte)*

Man zeige : Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt : $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$ .

*Hinweis:* Man zeige zunächst $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ für $-1 < x < y$.

**Aufgabe 6** *(je 5 Punkte)*

Man zeige : Für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ .

**Aufgabe 7** *(2 und 8 Punkte)*

Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$ .

**Aufgabe 8** *(je 5 Punkte)* *Knacki*

a) Es seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k := x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$. Man zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \geq n .$$

b) Es seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ beliebige positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (AGM-Ungleichung):

$$\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} .$$

**Tutorenprogramm:**

1. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-a| + |x-b| = b - a .$$

2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Man beweise die arithmetische Summenformel:

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} (x + ky) = \frac{n+1}{2}(2x + ny) \quad \text{für alle} \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 4. November 2002

# 3. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 11./12. November 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 9** *(7 Punkte)*

Man zeige: Zu je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl $\xi$ und eine irrationale Zahl $\eta$ mit $x < \xi < y$ und $x < \eta < y$.

**Aufgabe 10** *(5 und 8 Punkte)*

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m \leq n$. Man zeige:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} .$$

b) Man bestimme - falls vorhanden - $\max, \min, \inf$ und $\sup$ der Menge

$$M := \left\{ \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k+1)} : n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n \right\} .$$

**Aufgabe 11** *(10 Punkte)*

Sei $M := \left\{ \frac{\sqrt{x+y}}{xy} : x, y \geq 1 \right\} \subset \mathbb{R}$. Man bestimme - falls vorhanden - $\max M, \min M, \inf M$ und $\sup M$.

**Aufgabe 12** *(10 Punkte)* *Knacki*

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gegeben. Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch:

$$f(0) := a, g(0) := b \text{ und } f(n+1) := 2\,\frac{f(n)g(n)}{f(n)+g(n)} \ , \ g(n+1) := \frac{1}{2}\,(f(n)+g(n)) \text{ für } n \in \mathbb{N} .$$

Man zeige, dass die Menge $A := \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben, die Menge $B := \{g(n) : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt ist und $\sup A = \inf B = \sqrt{ab}$ gilt.
*Hinweis:* Man beachte die Ungleichungen zwischen dem harmonischen, dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel (Gruppenübungen): $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 2\frac{ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $(a, b > 0)$.

**Tutorenprogramm:**

Sei $M := \left\{ \frac{|1-xy|}{(1+x^2)(1+y^2)} : x, y \in \mathbb{R} \ , x \neq y \right\}$ .

a) Man zeige, dass $\sup M = 1$ gilt und $M$ kein Maximum besitzt.

b) Man zeige, dass $\inf M = \min M = 0$ gilt.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 11. November 2002

# 4. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 18./19. November 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 13** *(je 5 Punkte)*

Durch Anwendung der Rechenregeln für Folgen zeige man die Konvergenz der Folgen $(a_n), (b_n)$ und ermittle die Grenzwerte $a, b$. Sodann ermittle man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

a) $a_n := \dfrac{2n^2+1}{(n+1)(n+2)}$ b) $b_n := \sqrt{n^2+n} - n.$

**Aufgabe 14** *(2, 4, 4 und 4 Punkte)*

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und ermittle ggf die Grenzwerte.

a) $a_n := \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$ , $(n \geq 1)$ ; b) $b_n := \sqrt[n]{n}$ , $(n \geq 1)$ ;

c) $c_0 := 1,\ c_1 := 2,\ c_{n+2} := \dfrac{1}{2}(c_n + c_{n+1}),\ (n \in \mathbb{N})$ ; d) $d_n := \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

**Aufgabe 15** *(je 3 Punkte)*

a) Es sei $(a_n)$ eine Folge positiver Zahlen, $q \in \mathbb{R}$, und es gelte $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Man zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ für $n \geq k$. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\geq k}$ eine Nullfolge ist.

**Aufgabe 16** *(10 Punkte)* *Knacki*

Sei $(a_n)$ eine Folge positiver Zahlen. Die Folge $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ besitze einen positiven Grenzwert $q > 0$. Man zeige, dass dann auch die Folge $(\sqrt[n]{a_n})$ gegen $q$ konvergiert.

**Tutorenprogramm:**

1. Man untersuche die Folge $(a_n)$ mit $a_n := \frac{17n^3+1}{2n^3+\pi n^2+3}$ auf Konvergenz.
2. Man ermittle eine konvergente Folge $(a_n)$ positiver Zahlen mit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. (Man vergleiche A15a.)
3. Sei $a > 0$ fest gegeben. Man zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 18. November 2002

# 5. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 25./26. November 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 17** *(5 Punkte)*

Man zeige : Ist $(a_n)$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_{n+1} - a_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für fast alle $n$, so ist $(a_n)$ eine Cauchy-Folge.

**Aufgabe 18** *(3,3,3 und 6 Punkte)*

Man überprüfe die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz:

a) $a_n := \frac{n+1}{n!}$ b) $a_n := 2^{-n} + 3^{-n}$

c) $a_n := n! 3^{-n}$ d) $a_n := \binom{\frac{1}{2}}{n}$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Binomialkoeffizient wie folgt definiert:

$$\binom{x}{n} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}, \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

In den Fällen a) und b) bestimme man den Grenzwert.

**Aufgabe 19** *(6 und 4 Punkte)*

Sei $(a_n)$ eine monotone Nullfolge. Man zeige:

a) Verdichtungssatz von Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n} \text{ konvergiert.}$$

Auf die Voraussetzung der Monotonie der Folge $(a_n)$ kann nicht verzichtet werden (Beispiel!).

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q}$, konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ .

**Aufgabe 20** *(10 Punkte)* *Knacki*

Sei $a > 0$. Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ auf Konvergenz.

*Hinweis:* Man kann $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ benutzen.

**Tutorenprogramm:**

1. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} \quad ; \quad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{(a+1)^k}, \ (a \neq -1) \ ; \ \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \quad ; \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+17}{3n^3+n^2-3} .$$

2. Man berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right)$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 25. November 2002

# 6. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 2./3. Dezember 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 21** *(je 5 Punkte)*

a) Es seien $(a_n)$, $(b_n)$ Folgen positiver reeller Zahlen und es gelte $g := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$. Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert } .$$

Welche Aussage gilt im Falle $g = 0$?

b) Man untersuche auf Konvergenz: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^3+\sqrt{n^4+1}}$ .

**Aufgabe 22** *(je 3 Punkte)*

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k}-1\right)^k$ ; b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k}-1\right)$ ; c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 \cdot 2^k}{(2k)!}$ ; d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}$ .

**Aufgabe 23** *(8 Punkte)*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$. Man zeige: $\lim_{n\to\infty} s_n = e$.

*Hinweis:* Man betrachte $a_n := \frac{(n+1)^n}{n!}$ und beachte HA 16.

**Aufgabe 24** *(10 Punkte)* *Knacki*

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$. (Nicht beweisen! - vergl. A 18)

Man zeige, dass für alle $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ die Reihen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{k} x^k$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} x^k$ absolut konvergieren und berechne ihr CAUCHY-Produkt.

**Tutorenprogramm:**

1. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$ ; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^2+2}\right)^{k^2}$ ; c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k!\,\left(\frac{x}{k}\right)^k$ .

2. Man zeige: Ist $\sum a_k$ absolut konvergent, so ist auch $\sum a_k^2$ (absolut) konvergent.
   Gilt dies auch, wenn „absolut" gestrichen wird?

3. Man skizziere die Funktionsgraphen von $f_1(x) := e^x$, $f_2(x) := e^{-x^2}$ und $f_3(x) := e^{-1/x}$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 2. Dezember 2002

# 7. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 9./10. Dezember 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 25** *(4 und 5 Punkte)*

Man zeige:

a) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \ y - x < 1:\ (y-x)\exp(x) \ \leq\ \exp(y) - \exp(x) \ \leq\ \dfrac{y-x}{1+x-y}\exp(x)\ .$

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, L > 0\ :\ x, y \leq a \ \Rightarrow\ |\exp(x) - \exp(y)| \ \leq\ L\,|x-y|\ .$

**Aufgabe 26** *(4,4 und 6 Punkte)*

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^n}\ ,\ (n \in \mathbb{N});$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{\ln k}\ ,\ (\alpha > 0);$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{\sqrt{k}}\ ,\ (\alpha > 0).$

**Aufgabe 27** *(1,3 und 3 Punkte)*

Man ermittle Real-, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

a) $\dfrac{3+4\,i}{4-3\,i}\ ;$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k,\ (n \in \mathbb{N})\ ;$ c) $z^2 = 3 + 4\,i$ (alle Lösungen).

**Aufgabe 28** *(8 Punkte)* *Knacki*

Man zeige: Für jedes $a > 0$ gilt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$

*Hinweis:* Man betrachte $\frac{a^x - 1}{x}$.

**Tutorenprogramm:**

1. Man zeige: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x) \geq \exp(x_0) + \exp(x_0)(x - x_0)$ und interpretiere dies an den Graphen.

2. Man skizziere den Graphen der rationalen Funktion: $f(x) := \dfrac{(x-2)^2(x+2)}{x^2(x+1)}$ .

3. $C_{14}$ Methode zur Altersbestimmung. Das Kohlenstoffisotop $C_{14}$ besitzt eine Halbwertszeit von $t_h = 5730$ Jahren. Der (prozentuale) Anteil in lebenden Organismen ist der gleiche wie in der Luft. In „historische Zeiträumen“ war dieser konstant (gesichert). Der Anteil genügt dem exponentiellen Gesetz $C(t) = C(0)\exp(-ft)$. Man bestimme die Konstante $f$.

   Das Alter eines Grabtuches soll näherungsweise bestimmt werden. Der $C_{14}$ Anteil beträgt 78.5% des Gehaltes in neuem Tuch. Man bestimme das Alter $t_1$ des Tuches.

4. Man ermittle Real-, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

   a) $\dfrac{5-2\,i}{3+i}\ ;$ b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n ,(n \in \mathbb{N});$ c) $z^2 = 1 + i$ (alle Lösungen).

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 9. Dezember 2002

# 8. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 16./17. Dezember 2002 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 29** *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige, dass der *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ streng monoton wachsend ist, also eine Umkehrfunktion *Areasinus hyperbolicus* arsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ gilt.

b) Man zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{arsinh} x + \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right) .$$

**Aufgabe 30** *(je 5 Punkte)*

a) Man zeige: Zu $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \sin x + b \cos x = c \sin(x + d)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zu $a = 3, b = -4$ ermittle man passende $c, d$.

b) Man zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_+^*$ gilt: $\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$.

**Aufgabe 31** *(je 5 Punkte)*

Für $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_+^*$ sei $\zeta_{n,k} := e^{i \frac{k}{n} x},\ k = 0, \cdots n$. Durch geradlinige Verbindung von $\zeta_{n,k}$ mit $\zeta_{n,k+1}$ erhält man einen Polygonzug, der 1 mit $e^{ix}$ verbindet. Die Länge diese Polygonzuges ist $L_n := \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta_{n,k+1} - \zeta_{n,k}|$. Man zeige:

a) $L_n = 2n \left|\sin \frac{x}{2n}\right|$. und b) $\lim_{n\to\infty} L_n = |x|$.

**Aufgabe 32** *(10 Punkte)* *Knacki* Tschebyscheff-Polynome

Man beweise mit Hilfe der *Eulerschen Formel* $\cos nx + i \sin nx = e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n,\ n \in \mathbb{N}$, dass es (eindeutig bestimmte) Polynome $T_n, U_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, derart, dass gilt:

$$\cos nx = T_n(\cos x) \text{ und für } n > 0 \ \sin nx = U_{n-1}(\cos x) \cdot \sin x .$$

($T_n$ bzw. $U_{n-1}$ heißen Tschebyscheff-Polynome erster bzw. zweiter Art.)
Man zeige ferner die Gültigkeit der Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), (n > 0)$, und berechne $T_j$ für $j = 1, 2, 3, 4$.

**Tutorenprogramm:**

1. Man zeige $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$. Für welche $x, y$ gilt dieses Additionstheorem?
2. Man skizziere die Funktionen
   $f_1(x) := \sin(\arcsin x),\ f_2(x) := \arcsin(\sin x),\ f_3(x) := \cos(\arccos x),\ f_4(x) := \arccos(\cos x),$
   $f_5(x) := \tan(\arctan x)\ , f_6(x) := \arctan(\tan x)$. Wo sind diese Funktionen definiert?
3. Man zeige: Für $x \in [-1, 1]$ gilt $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 16. Dezember 2002

# 9. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 6./7. Januar 2003 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 33** *(je 5 Punkte)*

Man zeige:

a) Für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen
$M_{f,g}(x) := \max(f(x), g(x))$ und $m_{f,g}(x) := \min(f(x), g(x))$ stetig.

b) mit Hilfe des $\varepsilon, \delta$-Kriteriums, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x^2}$ stetig ist.

**Aufgabe 34** *(10 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \left|\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right|$. Man skizziere $f$ und weise nach, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) := f(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0,\ g(0) := a$. Kann man $a$ so wählen, dass $g$ bei 0 stetig wird?

**Aufgabe 35** *(je 5 Punkte)*

a) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Man zeige die Existenz eines $c \in [0, 1]$ mit $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.

b) Für $a < b$ sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Man zeige:
Es gibt mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ .

**Aufgabe 36** *(10 Punkte)* *Knacki* SONNENAUFGANGSLEMMA

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. $x \in \mathbb{R}$ heißt *Schattenpunkt* von $f$ , wenn ein $y > x$ mit $f(y) > f(x)$ existiert. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ , seien keine Schattenpunkte, alle Punkte im Intervall $(a, b)$ seien jedoch Schattenpunkte. Man zeige :

a) Für alle $x \in (a, b)$ gilt $f(x) \leq f(b)$ .

b) $f(a) \leq f(b)$ .

c) $f(a) = f(b)$ .

*Hinweis :* Zu a) : Man führe $\sup\{y :\ x \leq y\ ,\ f(x) \leq f(y)\ \} < b$ zum Widerspruch.
Zu c) : Man beachte, dass $a$ kein Schattenpunkt ist.

**Tutorium:**

1. Man zeige: Für $x \neq 0, n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i\,\frac{2n+1}{2}\,x} - e^{-i\,\frac{x}{2}}}{e^{i\,\frac{x}{2}} - e^{-i\,\frac{x}{2}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\,\sin\frac{x}{2}}\ .$$

2. Man zeige mit Hilfe des $\varepsilon, \delta$-Kriteriums, dass $f(x) := x^3$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

3. Man untersuche die Funktion $x \mapsto [x]$ auf Stetigkeit.

**Alles Weihnachtsgeschenke !!!**

**Aufgabe 37** *(5 Punkte)* *(*)*

Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Man zeige :

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{n} (a_k b_l - a_l b_k)^2 \right) = 2 \left( \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left( \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \right) ,$$

folgere hieraus die CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung

$$\left( \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

und gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen steht.

**Aufgabe 38** *(5 Punkte)* *(*)*

Man zeige: Genügt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ einer Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, $(n > 0)$, mit ganzen Zahlen $a_0, \cdots, a_{n-1}$, so ist $x$ irrational.

**Aufgabe 39** *(5 Punkte)* *(*)*

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst gleichmäßig stetig, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D,\ |x - y| < \delta :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig, wohl aber die Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x}$.

**Aufgabe 40** *Weihnachtsgeschenke ohne Abgabe*

a) Man zeige: Für kein $n \in \mathbb{N}_{>1}$ ist $n^4 + 4^n$ eine Primzahl.

b) Auf dem Rand einer Kreisscheibe **K** verteilen wir $n$ paarweise verschiedene Punkte. Jeder Punkt wird mit jedem anderen Punkt geradlinig verbunden. Keine drei dieser Verbindungsstrecken mögen sich in inneren Punkten von **K** schneiden. In wie viele Flächenstücke $f_n$ wird die Kreisscheibe auf diese Weise zerlegt?
*Hinweis* : Kennt man $f_1, \cdots, f_n$ , so kann man $f_{n+1}$ durch diese Zahlen ausdrücken.

c) Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{30} \frac{k}{x - k} \geq \frac{15}{3613} \right\} .$$

Man zeige: $M$ ist die (disjunkte) Vereinigung von endlich vielen Intervallen, deren Längensumme gerade $(1.1.2003 =)112003 = 31 \cdot 3613$ ist.

WIR WÜNSCHEN ALLEN EIN SCHÖNES WEIHNACHTSFEST UND EIN ERFOLGREICHES NEUES JAHR 2003 !!!!!!!

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 6. Januar 2003

# 10. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 13./14. Januar 2003 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 41** *(2,2 und 4 Punkte)*

Man berechne folgende Limiten ($a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}_{>0}$):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ ; c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$ .

**Aufgabe 42** *(je 2 Punkte)*

Für folgende Funktionen ermittle man jeweils einen „natürlichen Definitionsbereich“ und die Ableitung ($a > 0$):

*a)* $f_1(x) := x^{(x^x)}$ ; *b)* $f_2(x) := (x^x)^x$ ; *c)* $f_3(x) := x^{(x^a)}$ ;
*d)* $f_4(x) := x^{(a^x)}$ ; *e)* $f_5(x) := (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ ; *f)* $f_6(x) := \ln(\ln(x^2+x+1))$ .

**Aufgabe 43** *(je 5 Punkte)*

a) Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } x \geq 0 \\ x^m & \text{für } x < 0 \end{cases}$

im Nullpunkt differenzierbar? Man berechne gegebenenfalls die Ableitung.

b) Man zeige: Die Funktion $f$ auf $\mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := x\left(1 + 2x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ ist überall differenzierbar, es gilt $f'(0) > 0$ und jede Umgebung von 0 enthält Intervalle, in denen $f'$ negativ ist. Man versuche sich an einer Skizze!

**Aufgabe 44** *(10 Punkte)* *Knacki*

Zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $f : [x_0, x_0+1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $x_0$ differenzierbare Funktion mit $f(x_0) \neq 0$. Die Folge $(x_n)$ sei definiert durch

$$x_n := \left(\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n .$$

Man untersuche die Folge $(x_n)$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 13. Januar 2003

# 11. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 20./21. Januar 2003 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 45** *(8 Punkte)*

Es sei $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \dfrac{2x}{\sin x}$. Man zeige, dass $f$ umkehrbar ist, bestimme den Definitionsbereich von $f^{-1}$ und berechne $(f^{-1})'(\pi)$.

**Aufgabe 46** *(3, 3 und 6 Punkte)*

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b)$ differenzierbar. Man beweise oder widerlege:

a) Ist $f$ im Punkte $b$ differenzierbar, so existiert $B := \lim\limits_{x\to b-} f'(x)$, und es gilt $f'(b) = B$.

b) Existiert $B := \lim\limits_{x\to b-} f'(x)$, so ist $f$ in $b$ differenzierbar, und es gilt $f'(b) = B$.

c) Ist $f$ in $b$ stetig und existiert $B := \lim\limits_{x\to b-} f'(x)$, so ist $f$ in $b$ differenzierbar, und es gilt $f'(b) = B$.

**Aufgabe 47** *(10 Punkte)*

Aus einem Halbkreis und einem Rechteck werde ein Rundbogenfenster des Umfangs $L > 0$ geformt (siehe Bild unten!). Wie muss man vorgehen um ein Fenster möglichst großer Fläche zu bekommen?
*Bemerkung:* Wir verwenden „zwanglos" die Formeln $U = 2r\pi$ und $F = r^2\pi$ für Umfang und Fläche eines Kreises vom Radius $r$.

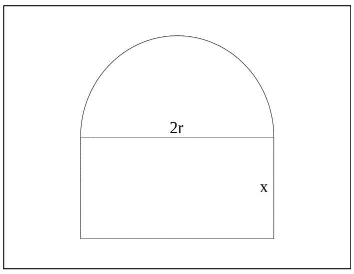
**Aufgabe 48** *(10 Punkte)* *Knacki*

Nach Planck wird das Emissionsvermögen eines schwarzen Strahlers der Temperatur $T$ ($T$ bzg. der Kelvin-Skala, also $T > 0$) beschrieben durch

$$E(\lambda) \;=\; \frac{c^2\hbar}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{c\hbar}{kT\lambda}\right) - 1}\;,\quad 0 < \lambda < \infty$$

($\lambda$ Wellenlänge, $c, \hbar, k$ positive Konstanten).
Man zeige: $E(\lambda)$ hat genau eine Maximalstelle $\lambda_m$, und es gilt

$$\lambda_m \cdot T \;=\; \text{const. (\textit{Wiensches Verschiebungsgesetz})}.$$



Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 20. Januar 2003

# 12. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe am 27./28. Januar 2003 vor den Stundenübungen

**Aufgabe 49** *(je 4 Punkte)*

Man berechne folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ mit $a,b>0$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0+}(1-x)^{\ln x}$;

**Aufgabe 50** *(3, 3 und 4 Punkte)*

Man zeige die Gültigkeit folgender Ungleichungen für jedes $n\in\mathbb{N}$:

a) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{x^k}{k!}<e^x$ für $x\neq 0$ . b) $\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k>\ln(1+x)$ für $x>-1, x\neq 0$ .

c) Mit Hilfe des Satzes von Taylor bestimme man $\sqrt{17}$ mit einer Genauigkeit von $10^{-4}$ .

**Aufgabe 51** *(3 und 5 Punkte)*

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x):=\left(\tanh\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ für $x\neq 0$ und $f_n(0):=1$ ( $\tanh x:=\frac{\sinh x}{\cosh x}$).

Man zeige:

a) Die Folge $(f_n)$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise und ermittle die Grenzfunktion $f$.

b) Die Folge $(f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, für jedes $a>0$ konvergiert sie jedoch gleichmäßig auf $\mathbb{R}\setminus(-a,a)$.

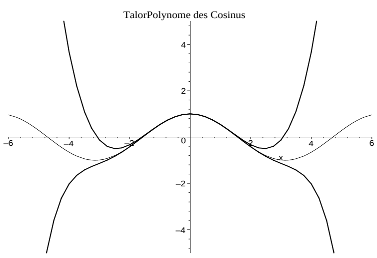
**Aufgabe 52** *(10 Punkte)* *Knacki*

Seien $S_n, C_n$ die $n$-ten Taylorpolynome des Sinus bzw. des Cosinus.

Man zeige: Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt:

$S_{4k+3}(x)<\sin x<S_{4k+1}(x)$ für $x>0$ und

$C_{4k+2}(x)<\cos x<C_{4k}(x)$ für $x\neq 0$, und $x\neq 2n\pi, n\in\mathbb{Z}$, falls $k=0$.



Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 3. Februar 2003

# 13. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe zur ersten Stundenübungen Analysis 2
alles Extrapunkte

**Aufgabe 53** *(6 Punkte)*

Man zeige: Für jedes $\alpha < 0$, $\alpha \neq -1$ konvergiert die Folge

$$\left( \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) .$$

Man formuliere eine analoge Aussage für $\alpha = -1$ .
*Hinweis:* Man grenze $x^{\alpha}$ durch geeignete Treppenfunktionen ein.

**Aufgabe 54** *(5 Punkte)*

Für $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx$ und $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx$ .

**Aufgabe 55** *(je 3 Punkte )*

Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)}$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \cos x \, dx$; c) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$;

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$; e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arccos x \, dx$; f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^3 - x^2 + x) \sin x \, dx$.

**Aufgabe 56** *(3,3,4 und 3 Punkte)* *Knacki*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes $r > 0$ sei $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_r(x) := \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t) dt .$$

Man zeige:

a) $f_r$ ist differenzierbar.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{r \to 0} f_r(x) = f(x)$.

c) Auf jedem Intervall $[a, b]$ konvergiert die Folge $(f_{\frac{1}{n}})$ gleichmäßig gegen $f$.

d) Ist $f$ gleichmäßig stetig, so konvergiert $(f_{\frac{1}{n}})$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f$.

**Aufgabe 57** *ohne Abgabe* *Knacki*

a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man zeige:

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq \left( \int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_a^b g^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $f(a) = 0$. Man zeige:

$$\int_a^b |f(x) f'(x)| \, dx \ \leq \ \frac{b-a}{2} \int_a^b (f'(x))^2 dx .$$

Ungleichung von Opial

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling und Mitarbeiter

Hannover, den 8. Februar 2003

# Klausur zur Analysis I

Bearbeitungszeit: 8.15 – 10.15

**Bitte jedes Blatt mit: Name, VName, Matr.Nr., Gruppenleiter beschriften!**

**Aufgabe 1** *(10 Punkte)*
Es sei $0 \leq a \leq 1$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt:

$$(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$$

**Aufgabe 2** *(10 Punkte)*
Die Folge $(a_n)$ sei bei gegebenen $A \in \mathbb{R}$, $q \in (-1, 1)$, rekursiv definiert durch

$$a_0 \ := \ A \qquad , \qquad a_{n+1} \ := \ 1 + q\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Man zeige, dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.
*Hinweis:* Man notiere einige Folgenglieder, errate eine explizite Darstellung von $a_n$ und beweise diese.

**Aufgabe 3** *(10 Punkte)*
Man zeige durch einen $\varepsilon$-$\delta$-Beweis die Stetigkeit von $f(x) := \dfrac{x}{1+x}$ im Punkt $x_0 = 1$. Konkret gebe man zu $\varepsilon := \frac{1}{100}$ ein brauchbares $\delta > 0$ an.

**Aufgabe 4** *(10 Punkte)*
Es sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \ . \end{cases}$$

Man zeige, dass $f$ in 0 differenzierbar ist und bestimme $f'(0)$.

**Aufgabe 5** *(10 Punkte)*
Man bestimme das Taylorpolynom dritter Ordnung von $f(x) = (\sin x)^2$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeige, dass für das Restglied $R_3(x)$ die Abschätzung $|R_3(x)| \leq \frac{1}{48}$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.

**Viel Erfolg !!!!!!!!!**