Analytische Zahlentheorie

Prof. J.Sander
Universität Hannover
SS 2001

$\LaTeX\,2_\varepsilon$-Umsetzung von Miriam Westerfrölke und Marco Pries

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Konzept der Primzahl war schon den Griechen der Antike bekannt. Für sie war eine Primzahl eine natürliche Zahl, die sich niemals ohne Rest teilen lässt, es sei denn durch 1 oder sich selbst. Nach dieser Definition ist auch 1 eine Primzahl. Heute zählen wir 1 nicht mehr zu den Primzahlen. Eine elegante Definition im neueren Sinne ist:

Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler besitzt.

Spätestens seit 325 v.Chr. war den Griechen auch bekannt

Satz 1.1 (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:

$p_1 := 2$ und $p_2 := 3$ sind Primzahlen. Falls nur die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ existieren, so bilde das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 1$. Dieses besitzt einen Primfaktor, der von $p_1, p_2 \ldots, p_n$ verschieden ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Satz 1.2

Sind $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ die Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge, so gilt für $n \geq 3$

$$p_n < 6^{2^{n-3}}.$$

Beweis:

für $n = 3$ gilt: $p_3 = 5 < 6^{2^0} = 6$. Induktiv folgt nun:

$p_{n+1} < p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ (siehe Beweis Satz 1.1) $< 2 \cdot 3 \cdot 6^{2^0} \cdot 6^{2^1} \cdot \ldots \cdot 6^{2^{n-3}} = 6^{2^{n-2}}$.

□

Für die Primzahlzählfunktion

$$\pi(x) := \sum_{p \leq x} 1 := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} 1$$

mit $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ ergibt sich

Korollar 1.1

Für $x \geq 3$ ist $\pi(x) > \log_2 \log_2 x$.

Beweis:

Sei n derart gewählt, dass $p_n \leq x < p_{n+1} \Longrightarrow n = \pi(p_n) = \pi(x)$. Nach Satz 1.2 ist $p_{n+1} < 6^{2^{n-2}} < 2^{2^n} \Longrightarrow \pi(x) = n > \log_2 \log_2 p_{n+1} > \log_2 \log_2 x$.

$\square$

Im Jahre 1737 lieferte Euler einen neuen Beweis für Satz 1.1, der weitaus tiefere Einsichten in das Verhalten der Primzahlen ermöglichte. Euler verwendete die Identität

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.1}$$

die sich zunächst formal dadurch zeigen lässt, dass wir das Produkt auffassen als Produkt von geometrischen Reihen, also

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots\right) \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl n wird auf der rechten Seite jeder Bruch $1/n^s$ genau einmal dargestellt. Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Konvergenz gilt (1.1) für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$.

Euler argumentierte nun folgendermaßen: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so existierte das Produkt in (1.1) auch für $s = 1$. Die Summe hingegen geht für $s \to 1^+$ in die harmonische Reihe über, die bekanntlich divergiert. Also muss es unendlich viele Primzahlen geben. Dies lässt sich sogar quantitativ fassen.

Satz 1.3 (Euler)

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} \sim \log \log x.$$

Beweis:

Es gilt

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} \sim \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x.$$

Die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{p \le x} \log(1 - \frac{1}{p}) &= -\sum_{p \le x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \le x} \frac{1}{mp^m} \\
&= -\left(\sum_{p \le x} \frac{1}{p} + \sum_{p \le x} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mp^m} \right) = -\sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O\left(\sum_{p \le x} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right) \\
&= -\sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O\left(\sum_{p \le x} \left(\frac{1}{1 - 1/p} - 1 - \frac{1}{p} \right) \right) \\
&= -\sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O\left(\sum_{p \le x} \frac{1}{p(p-1)} \right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p(p-1)} \le \sum_{2 \le n \le x} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{2 \le n \le x} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \le 1$$

und erhalten mit (1.1)

$$\begin{aligned}
\sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= -\sum_{p \le x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(1) = -\log\left(\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) + O(1) \\
&= \log\left(\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \right) + O(1) \sim \log \log x.
\end{aligned}$$

Um 1800 vermuteten Gauß und Legendre (unabhängig voneinander):

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad \text{(Gauß)}$$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{(Legendre)}$$

Teilintegration bestätigt die Gleichwertigkeit der beiden Formeln. Diese Vermutung ist naheliegend, da

$$\int_e^x \frac{dt}{t \log t} = \log\log x \sim \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \qquad \text{(nach Satz 1.3),}$$

d.h. das Integral von $1/t$ bezüglich des Maßes $dt/\log t$ ist asymptotisch gleich dem Integral von $1/t$ bezüglich des diskreten Maßes mit Gewicht 1 bei Primzahlen und Gewicht 0 sonst. Also ist die Dichtefunktion der Primzahlen ungefähr $1/\log t$.

Es dauerte weitere 50 Jahre, bis gegen 1850 erste wesentliche Ergebnisse in dieser Richtung erzielt wurden.

Satz 1.4 (Tschebyscheff, 1852)

Für hinreichend große x gilt

$$0,89 \cdot \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1,11 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Tschebyscheff bewies außerdem, dass, falls

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = c$$

existiert, dann $c = 1$ sein müsse.

1859 veröffentlichte Riemann eine Arbeit mit dem Titel:

„**Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe**“.

Obwohl die Arbeit nur acht Seiten umfasste, enthielt sie ein komplettes Programm zum Beweis der von Gauß und Legendre vermuteten Asymptotik von $\pi(x)$. Dies führte zum Beweis des sogenannten „Primzahlsatzes“ durch Hadamard und de la Vallée Poussin (unabhängig voneinander). Riemanns wesentliche Idee war, die Identität (1.1) für komplexe s zu betrachten. Zu seinen Ehren wurde

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (Re\ s > 1)$$

die „Riemannsche Zetafunktion“ genannt. Riemanns tiefe Einsicht in die Problematik zeigt sich vielfach:
Er erkannte den Zusammenhang zwischen Primzahlsatz und der Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion im sogenannten kritischen Streifen ($\rightarrow$ Riemannsche Vermutung), er gab eine Funktionalgleichung für ζ an, weiterhin die sogenannte „explizite Formel“ für den Zusammenhang zwischen Primzahlsatz und Nullstellenverteilung von ζ sowie eine asymptotische Formel für die vertikale Verteilung der Nullstellen im kritischen Streifen - all dies auf acht Seiten und praktisch ohne Beweis.

Zum Abschluss dieser Einleitung sei noch erwähnt, dass 1948 Selberg der Beweis einer Formel gelang, aus der Erdös und Selberg einen ersten „elementaren“ Beweis des Primzahlsatzes herleiten konnten. Elementar bedeutet hier, dass keine komplexen Integrale (vorzugsweise gar keine Integrale) auftreten. Dieser Beweis liefert jedoch praktisch keine weiteren Einsichten über die Verteilung der Primzahlen. Wir werden deshalb im folgenden dem Riemannschen Ansatz nachgehen.

Wir merken an, dass viele der nachstehenden Methoden und Ergebnisse durch Verwendung von Charakteren auf Primzahlen in primen Restklassen verallgemeinert werden können (insbesondere der Primzahlsatz von Dirichlet). Dies werden wir hier jedoch nicht tun.

2 Arithmetische Funktionen/Formale Dirichlet-Reihen

Eine arithmetische (oder zahlentheoretische) Funktion ist eine komplexwertige Zahlenfolge. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller arithmetischen Funktionen. Beispiele für Elemente aus $\mathcal{A}$ sind:

$$\begin{aligned}
\tau(n) = d(n) &:= \sum_{d|n} 1 \\
\sigma_k(n) &:= \sum_{d|n} d^k \qquad (\sigma_0 = \tau, \sigma_1 = \sigma) \\
\varphi(n) &:= \sum_{\substack{1\le a\le n \\ (a,n)=1}} 1 \qquad (Eulersche\ \varphi - Funktion) \\
\left(\frac{n}{p}\right) &:= \qquad Legendre - Symbol \qquad (p \in \mathbb{P}_{>2}\ fest)
\end{aligned}$$

Diese zahlentheoretischen Funktionen sind alle multiplikativ, d.h. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, sofern $(a,b) = 1$. Das Legendre-Symbol ist sogar streng multiplikativ, d.h. $\left(\frac{a\cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Wir erklären auf $\mathcal{A}$ die Addition wie üblich, d.h. $(f+g)(n) := f(n) + g(n)$; und eine Multiplikation wie folgt:

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (Faltung\ von\ f\ und\ g)$$

Bemerkung:

Die Faltung multiplikativer Funktionen ist multiplikativ.

Satz 2.1

$(\mathcal{A}, +, *)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement

$$\eta(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein $f \in \mathcal{A}$ ist genau dann Einheit (d.h. invertierbar), wenn $f(1) \neq 0$.

Beweis:

Wir beweisen nur die zweite Aussage.

„$\Longrightarrow$“

$f \in \mathcal{A}$ sei Einheit, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{A}$ mit $f * g = \eta$

$\Longrightarrow 1 = \eta(1) = (f * g)(1)$

$= f(1) \cdot g(1) \Longrightarrow f(1) \neq 0.$

„$\Longleftarrow$“

Sei $f(1) \neq 0$. Das zu f inverse g wird induktiv konstruiert:

Wir setzen $g(1) := 1/f(1)$. Sei g für alle $1 \leq m < n$ schon definiert. Dann setzen wir $g(n)$ gemäß $0 = \eta(n) = (f * g)(n) = f(1) \cdot g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1}} f(d) \cdot g(\frac{n}{d})$.

□

Satz 2.2

Sei $f \in \mathcal{A}$ multiplikativ und nicht identisch 0. Dann ist $f(1) = 1$, und das Inverse g von f existiert und ist auch multiplikativ.

Beweis:

f nicht identisch $0 \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq 0$. Wegen $f(n) = f(1 \cdot n) = f(1) \cdot f(n)$ folgt daher $f(1) = 1$. Nach Satz 2.1 existiert das Inverse g von f. Sei $h \in \mathcal{A}$ erklärt durch

$$h\left(p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}\right) := \prod_{i=1}^{r} g\left(p_i^{e_i}\right).$$

Offensichtlich ist h multiplikativ und $h(p^e) = g(p^e)\, \forall p \in \mathbb{P}, e \in \mathbb{N}_0$. Also $(f * h)(p^e) = (f * g)(p^e) = \eta(p^e)$. Da f und h multiplikativ sind, folgt $f * h$ multiplikativ (siehe Bemerkung oben).

$\Longrightarrow f * h = \eta$ auf ganz $\mathbb{N}$. Wegen $h = \eta * h = (g * f) * h = g * (f * h) = g * \eta = g$ ist also g auch multiplikativ.

□

Beispiel:

Sei $\varepsilon(n) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. ε ist (streng) multiplikativ. Nach Satz 2.2 ist ε Einheit. Das Inverse μ von ε heißt *Möbiusfunktion* ($\Longrightarrow \mu$ ist multiplikativ, aber nicht streng multiplikativ). Es ist $\mu(1) = 1$. Wir berechnen μ auf den Primzahlpotenzen. Es muss gelten: $\varepsilon * \mu = \eta$.

$\mu(p) + 1 = \varepsilon(1) \cdot \mu(p) + \varepsilon(p) \cdot \mu(1) = (\varepsilon * \mu)(p) = \eta(p) = 0 \Longrightarrow \mu(p) = -1$

$\varepsilon(1) \cdot \mu(p^2) + \varepsilon(p) \cdot \mu(p) + \varepsilon(p^2) \cdot \mu(1) = (\varepsilon * \mu)(p^2) = \eta(p^2) = 0 \Longrightarrow \mu(p^2) = 0$

Induktiv folgt: $\mu(p^r) = 0 \qquad (r \in \mathbb{N}_{>2})$.

Also

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei}, \\ (-1)^t & \text{falls } n = p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_t \text{ quadratfrei.} \end{cases}$$

Satz 2.3 (Möbius-Umkehrung)

Seien $f, g \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\varepsilon * f = g \Longleftrightarrow g * \mu = f \ ,$$

d.h. $g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Longleftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot g(n/d)$.

Beweis:

Klar, z.B. „$\Longrightarrow$“

$g * \mu = (f * \varepsilon) * \mu = f * (\varepsilon * \mu) = f * \eta = f$

$\square$

Korollar 2.1

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot d\ .$$

Beweis:

Es gilt $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, also $(\varepsilon * \varphi)(p^r) = 1 + \sum_{k=1}^{r}(p^k - p^{k-1}) = p^r$. Da $\varepsilon * \varphi$ multiplikativ ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $(\varepsilon * \varphi)(n) = n =: id(n)$. Satz 2.3 liefert

$$\varphi(n) = (\mu * id)(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot d.$$

$\square$

Korollar 2.2

Mit $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$ heißt

$$c_q(h) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{a \cdot h}{q}\right) \qquad \textit{Ramanujan-Summe.}$$

Es gilt für $q \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{Z}$

$$c_q(h) = \sum_{d|(q,h)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \cdot d.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a \cdot h}{q}\right) &= \sum_{a=0}^{q-1} e\left(\frac{a \cdot h}{q}\right) = \sum_{a=0}^{q-1} e\left(\frac{h}{q}\right)^a \\
&= \frac{e\left(\frac{h}{q}\right)^q - 1}{e\left(\frac{h}{q}\right) - 1} = 0,\ \text{sofern } e\left(\frac{h}{q}\right) \neq 1,\ \text{d.h. } q \nmid h \\
\Longrightarrow \sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a \cdot h}{q}\right) &= \begin{cases} q & \text{für } q \mid h, \\ 0 & \text{für } q \nmid h. \end{cases}
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{q} e\left(\frac{a\cdot h}{q}\right) &= \sum_{d|q} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=d}}^{q} e\left(\frac{a\cdot h}{q}\right)\\
&\overset{a=bd}{=} \sum_{d|q} \sum_{\substack{b=1\\(b,q/d)=1}}^{q/d} e\left(\frac{b\cdot h}{q/d}\right) = \sum_{d|q} c_{q/d}(h) = (\varepsilon * c(h))\,(q)\\
\Longrightarrow (\varepsilon * c(h))\,(q) &= \begin{cases} q & \text{für } q \mid h,\\ 0 & \text{für } q \nmid h. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit der Möbius-Umkehrung folgt

$$c_q(h) = \sum_{\substack{d|q\\d|h}} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\cdot d = \sum_{d|(q,h)} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\cdot d\ .$$

$\square$

Bemerkungen:

(i) Offenbar ist $c_q(h)$ stets reell.

(ii) Bei festem h ist $c_q(h)$ multiplikativ bezüglich q.

(iii) $c_q(h) = c_q\left((h,q)\right)$.

Lemma 2.1

$$c_q(h) = \varphi(q)\cdot \frac{\mu\left(\frac{q}{(q,h)}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{(q,h)}\right)}.$$

Beweis:

Da $c_q(h)$ multiplikativ ist, genügt es, die Identität für Primzahlpotenzen zu zeigen (also $q = p^k$).

Setze: $p^b \| h$ ($:\Longleftrightarrow p^b \mid h,\ p^{b+1} \nmid h$). Nach der Bemerkung zu Korollar 2.2 ist $c_{p^k}(h) = c_{p^k}(p^b)$.

<u>1. Fall:</u> $k \leq b$.

Dann ist $(p^k, p^b) = p^k$. Mit Korollar 2.2 und Korollar 2.1 ergibt sich wegen

$(p^k, h) = p^k$

$c_{p^k}(h) = c_{p^k}(p^b) = \sum_{d|p^k} \mu\left(\frac{p^k}{d}\right) \cdot d = \varphi(p^k)$, wie behauptet.

<u>2.Fall:</u> $k = b + 1$.

Wegen Korollar 2.2 ist

$$c_{p^k}(h) = c_{p^k}(p^b) = c_{p^{b+1}}(p^b) = \sum_{d|p^b} \mu\left(\frac{p^{b+1}}{d}\right) \cdot d = \mu\left(\frac{p^{b+1}}{p^b}\right) \cdot p^b = \mu(p) \cdot p^b = \mu(p) \cdot \frac{\varphi(p^{b+1})}{\varphi(p)} .$$

<u>3.Fall:</u> $k > b + 1$.

Analog zu Fall 2 folgt: $c_{p^k}(h) = 0$.

□

Wir ordnen jeder arithmetischen Funktion $a \in \mathcal{A}$ durch Einführung einer Unbestimmten s die formale *Dirichlet-Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

zu. Formales multiplizieren zweier Dirichlet-Reihen gibt nach Umordnung

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(n) \cdot b(m)}{(n \cdot m)^s} \\ &\overset{k=mn}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{n|k} a(n) \cdot b\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a * b)(k)}{k^s} ,\end{aligned}$$

d.h. der Multiplikation von Dirichlet-Reihen entspricht die Faltung der entsprechenden arithmetischen Funktionen. Damit bilden die formalen Dirichlet-Reihen einen zu $\mathcal{A}$ isomorphen Ring.

Soweit ist nichts gewonnen. Setzen wir jedoch für s komplexe Zahlen ein derart, dass die Reihen konvergieren, so lassen sich unter Umständen Erkenntnisse über die Funktionen $a(n)$ gewinnen. Ein zweiter Vorteil besteht darin, dass bekannte Identitäten zwischen arithmetischen Funktionen als Identitäten von Dirichlet-Reihen geschrieben werden können. Differenzieren wir diese formal nach s, so ergeben sich neue

Identitäten. Wir wollen als Beispiele die zu den bereits definierten arithmetischen Funktionen gehörige Dirichlet-Reihen bestimmen.

Lemma 2.2

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta(n)}{n^s} = 1$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{n^s} =: \zeta(s) \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-k)$$

(iv) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2 \qquad (d(n) := \tau(n))$$

(v) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

<u>**Beweis:**</u>

(i) klar.

(ii) folgt aus $\varepsilon * \mu = \eta$.

(iii) Sei $I_k(n) := n^k$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_k(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}} = \zeta(s-k).$$

Wegen $\sigma_k = \varepsilon * I_k$ folgt die Behauptung.

(iv) folgt aus (iii) wegen $d(n) = \sigma_0(n)$.

(v) Nach Korollar 2.1 gilt $\varphi = \mu * I_1$. Damit gilt auch (v).

$\square$

3 Konvergente Dirichlet-Reihen

Satz 3.1

Sei $f \in \mathcal{A}$ multiplikativ und die zugehörige Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ konvergiere absolut für ein $s \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \qquad (Euler - Produkt)\ .$$

Ist f sogar streng multiplikativ, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1} .$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$. Wähle N so groß, dass $\sum_{n>N} |f(n)/n^s| < \varepsilon$. Sei $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{P} : p \leq n\} \subseteq \mathbb{P}$. Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen und der Multiplikativität von f folgt

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ p|n \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \frac{f(n)}{n^s}$$

$$\Longrightarrow \left| F(s) - \prod_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \left| \sum_{n>N} \frac{f(n)}{n^s} \right| < \varepsilon.$$

Für $N \longrightarrow \infty$ folgt die erste Identität. Ist f streng multiplikativ, so gilt darüber hinaus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^k = \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

(als geometrische Reihe).

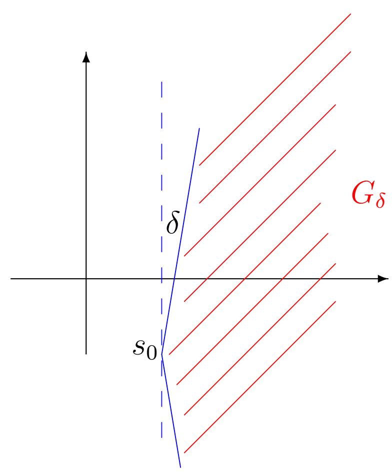
$\square$

Satz 3.2

Sei $a \in \mathcal{A}$ und sei $s_0 \in \mathbb{C}$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^{s_0}$ konvergiert. Dann ist die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^{s}$ für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig konvergent auf

$$G_\delta = \left\{ s \in \mathbb{C} : |arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\} .$$

Insbesondere ist $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^{s}$ in $Re\ s > Re\ s_0$ holomorph.



Beweis:

Wir benutzen partielle Summation in der Gestalt

$$\sum_{x \leq n \leq y} a(n) \cdot g(n) = \left(\sum_{x \leq n \leq y} a(n) \right) \cdot g(y) - \int_x^y \left(\sum_{x \leq n \leq y} a(n) \right) \cdot g'(t) dt$$

für eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{C}$. Mit $g(t) = t^{s_0 - s}$ erhalten wir für $1 \leq M \leq N$

$$\begin{aligned} \sum_{M \leq n \leq N} \frac{a(n)}{n^s} &= \sum_{M \leq n \leq N} \frac{a(n)}{n^{s_0}} \cdot g(n) \\ &= \left(\sum_{M \leq n \leq N} \frac{a(n)}{n^{s_0}} \right) \cdot N^{s_0 - s} + \int_M^N \left(\sum_{M \leq n \leq t} \frac{a(n)}{n^{s_0}} \right) \cdot (s - s_0) \cdot t^{s_0 - s - 1} dt. \end{aligned}$$

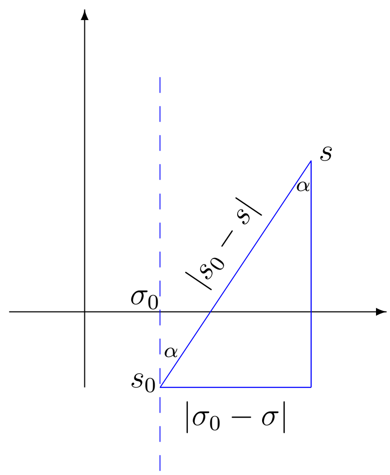
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum a(n)/n^{s_0}$ existiert ein $M(\varepsilon)$ derart, dass für alle $t \geq M \geq M(\varepsilon)$ gilt

$$\left| \sum_{M \leq n \leq t} \frac{a(n)}{n^{s_0}} \right| < \varepsilon.$$

Mit $\sigma := Re\ s$ und $\sigma_0 := Re\ s_0$ folgt für $M \geq M(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{M\leq n\leq N} \frac{a(n)}{n^s}\right| &\leq \left|N^{s_0-s}\right| \cdot \varepsilon + \int_M^N \varepsilon \cdot |s-s_0| \cdot \left|t^{s_0-s-1}\right| dt \\
&= \varepsilon \cdot \left(N^{\sigma_0-\sigma} + |s-s_0| \cdot \frac{N^{\sigma_0-\sigma} - M^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0-\sigma}\right) \\
&\leq \varepsilon \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{|s_0-s|}{|\sigma_0-\sigma|}\right)
\end{aligned}$$

wegen $\sigma_0 < \sigma$.



Außerdem haben wir offenbar $\sin\alpha = |\sigma_0 - \sigma| \,/\, |s_0 - s|$. Nach Voraussetzung ist $\delta < \alpha$, also $\sin\delta < \sin\alpha$, also $|s_0 - s| \,/\, |\sigma_0 - \sigma| < 1/\sin\delta$. Insgesamt gilt

$$\left|\sum_{M\leq n\leq M} \frac{a(n)}{n^s}\right| < \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{2}{\sin\delta}\right)$$

gleichmäßig im Winkelfeld, womit der Satz bewiesen ist.

□

Bemerkung:

Während Potenzreihen in Kreisscheiben und im Innern derselben absolut und gleichmäßig konvergieren, ist das Konvergenzgebiet einer Dirichlet-Reihe eine rechte Halbebene $Re\ s > a$ $\quad (a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Konvergenzabszisse*). Hier folgt allerding aus Konvergenz keine absolute Konvergenz; z.B. konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^s$ nach dem Leibniz-Kriterium für reelle $s > 0$, nach Satz 3.2 also in $Re\ s > 0$. Absolute Konvergenz liegt jedoch nur in $Re\ s > 1$ vor.

Satz 3.3 (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen)

Seien $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$ und $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)/n^s$ für $Re\ s > \alpha$ konvergent. Weiterhin gelte $F(\sigma) = G(\sigma)$ für alle hinreichend großen $\sigma \in \mathbb{R}$. Dann ist $a(n) = b(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Nach Satz 3.2 konvergieren F und G auf $[\alpha + 1, \infty)$ gleichmäßig.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \lim_{\sigma\to\infty} F(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot \left(\lim_{\sigma\to\infty} 1/n^\sigma \right) = a(1) \\ &= \lim_{\sigma\to\infty} G(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \cdot \left(\lim_{\sigma\to\infty} 1/n^\sigma \right) = b(1), \end{aligned}$$

also $a(1) = b(1)$.

Wir setzen $F_1(\sigma) := 2^\sigma \cdot (F(\sigma) - a(1))$ und $G_1(\sigma) := 2^\sigma \cdot (G(\sigma) - b(1))$. Wegen $a(1) = b(1)$ folgt $F_1(\sigma) = G_1(\sigma)$ für hinreichend große $\sigma \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\lim_{\sigma\to\infty} F_1(\sigma) = \lim_{\sigma\to\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a(n) \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^\sigma \right) = \sum_{n=2}^{\infty} a(n) \cdot \left(\lim_{\sigma\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^\sigma \right) = a(2).$$

Analog ergibt sich $\lim_{\sigma\to\infty} G_1(\sigma) = b(2)$, also $a(2) = b(2)$. Induktiv folgt die Behauptung.

□

Unser Anliegen ist, aus den analytischen Eigenschaften einer Dirichlet-Reihe auf das Verhalten der Koeffizientensumme zu schließen. Hier ein nützliches Hilfsmittel.

Lemma 3.1 (Perron'sche Formel)

Seien $c, y, T \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei

$$\delta(y) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad y = 1, \\ 1 & \text{für} \quad y > 1. \end{cases}$$

Ferner sei $I(y,T) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s}$. Dann gilt

$$|I(y,T)-\delta(y)| < \begin{cases} y^c \cdot \min(1,(T\,|\log y|)^{-1}) & \text{für } y \neq 1, \\ c/T & \text{für } y = 1. \end{cases}$$

Beweis:

1. Fall: $y = 1$.

Wir setzen $s = c + it$, also $ds = idt$. Es folgt

$$\begin{aligned} I(1,T) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{dt}{c+it} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{c-it}{c^2+t^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{T} \frac{c}{c^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{T/c} \frac{dz}{1+z^2} \qquad (z := t/c) \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{T/c}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{T/c}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \end{aligned}$$

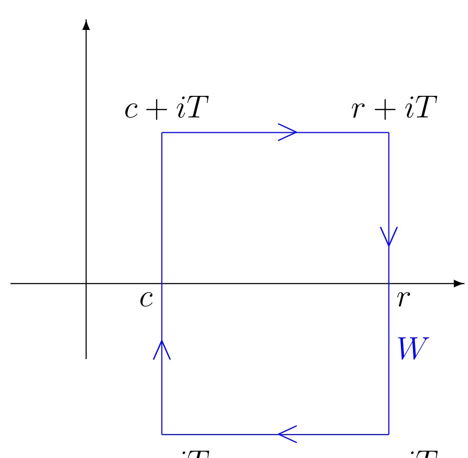
$\left(\int dz/(1+z^2) = \arctan z\right)$. Also ist

$$\left|I(1,T) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{\pi}\int\limits_{T/c}^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{\pi}\frac{c}{T} < \frac{c}{T}$$

wie behauptet.

2. Fall: $0 < y < 1$.

Da y^s/s in $Re\ s > 0$ holomorph ist, gilt der Cauchy-Integralsatz $\int\limits_W y^s \frac{ds}{s} = 0$.



Für $Re\ s = r$ haben wir

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| = \frac{|y^s|}{|s|} \leq \frac{y^r}{r}$$

wegen

$$|y^s| = \left|e^{\log y(Re\, s + i\cdot Im\, s)}\right| = y^{Re\, s}\cdot\left|e^{i\varphi}\right| = y^{Re\, s}$$

und $|s| \geq |Re\, s|$. Da y^r/r für $r \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 strebt, erhalten wir

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{r-iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r-iT}^{r+iT} y^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c+iT}^{r+iT} y^s \frac{ds}{s},$$

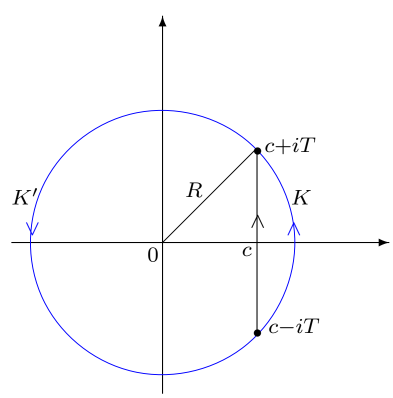
also mit $r \to \infty$

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{\infty-iT} y^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c+iT}^{\infty+iT} y^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}^{\infty} \frac{y^{r-iT}}{r-iT}dr - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}^{\infty} \frac{y^{r+iT}}{r+iT}dr.$$

Es folgt

$$|I(y,T)| \leq 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c}^{\infty}\frac{y^r}{T}dr \leq \frac{y^c}{T\,|\log y|}.$$

Statt über ein Rechteck können wir auch über einen Kreisabschnitt integrieren.



Der Kreis habe den Radius R, also gilt $R^2 = c^2 + T^2$. Wegen $0 < y < 1$ haben wir

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| = \frac{|y^s|}{R} \leq \frac{y^c}{R}.$$

Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt

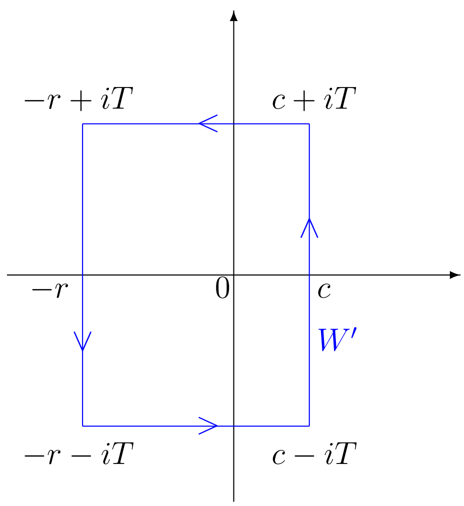
$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K} y^s \frac{ds}{s}.$$

$$\Longrightarrow |I(y,T)| \leq \frac{1}{2\pi} l(K) \cdot \frac{y^c}{R} \leq \frac{1}{2\pi} \pi R \cdot \frac{y^c}{R} < y^c,$$

wobei $l(K)$ die Länge des Integrationsweges bezeichnet. Damit ist der Fall $0 < y < 1$ vollständig erledigt.

3. Fall: $y > 1$.

Die Funktion y^s/s ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph außer einem einfachen Pol bei $s = 0$ mit Residuum 1 $\quad (y^s/s = 1/s + c_0 + c_1 s + \cdots)$.



Nach dem Residuensatz folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{W'} y^s \frac{ds}{s} = 1.$$

Also

$$I(y,T) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{-r+iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-r+iT}^{-r-iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-r-iT}^{c-iT} y^s \frac{ds}{s}\ .$$

Für $Re\ s = -r$ gilt

$$\left| \frac{y^s}{s} \right| = \frac{|y^s|}{|s|} \leq \frac{y^c}{r} \to 0 \qquad \text{(gleichmäßig für } r \to \infty\text{)},$$

d.h. das mittlere Integral verschwindet für $r \to \infty$. Die beiden äußeren Integrale werden wie im 2. Fall behandelt und liefern das Gewünschte. Zusammen mit der Integration über K' erhalten wir auch in diesem Fall die behauptete Abschätzung.

$\square$

Mit der Abkürzung

$$\int\limits_{(c)} = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{c-iT}^{c+iT}$$

erhalten wir sofort

Korollar 3.1

Bei festem c gilt für $y > 0$

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} y^s \frac{ds}{s}.$$

$\delta(y)$ heißt *Dirichlets diskontinuierlicher Faktor.*

Satz 3.4

Seien $c > 0$ und $a \in \mathcal{A}$. Die Reihe $\sum a(n)n^{-s}$ konvergiere gleichmäßig in $Re\ s > c-\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $x \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n\leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \right) x^s \frac{ds}{s}.$$

Ist $x \in \mathbb{Z}$, so muss auf der linken Seite der Summand $a(x)$ durch $a(x)/2$ ersetzt werden.

<u>**Beweis:**</u>

Nach Definition von δ ist

$$\delta\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < n, \\ 1/2 & \text{für} \quad x = n, \\ 0 & \text{für} \quad x > n. \end{cases}$$

Ist zunächst $x \notin \mathbb{Z}$, so folgt aus Korollar 3.1

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} a(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\left(\frac{x}{n}\right)^s\cdot\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\right)x^s\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz. Der Fall $x \in \mathbb{Z}$ ergibt sich analog.

□

Mit Satz 3.4 kann also $\sum_{n\le x} a(n)$ durch ein Integral über die Dirichlet-Reihe $\sum a(n)n^{-s}$ berechnet werden selbst dann, wenn diese bei $s = 0$ nicht konvergiert.

Viele Probleme der Zahlentheorie lassen sich als Berechnung einer geeigneten Koeffizientensumme auffassen. Wählen wir z.B. $a(n) = r(n)$ als die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von zwei Quadraten, so folgt

$$\sum_{n\le x} r(n) = \#\left\{(u,v)\in\mathbb{Z}^2 : u^2+v^2\le x\right\},$$

d.h. die Summe berechnet die Anzahl der Gitterpunkte im Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{x}$. Die Bestimmung einer möglichst guten asymptotischen Formel dafür ist das sogenannte *Kreisproblem*. Mit $a(n) = d(n)$ haben wir

$$\sum_{n\le x} d(n) = \#\left\{(u,v)\in\mathbb{N}^2 : uv\le x\right\}.$$

Diesmal zählen wir also Gitterpunkte des ersten Quadranten unterhalb einer Hyperbel. Das Finden einer guten asymptotischen Formel heißt in diesem Fall *Dirichletsches Teilerproblem*. Es sei darauf hingewiesen, dass sich die Hauptterme der jeweiligen asymptotischen Formeln mit elementaren Methoden bestimmen lassen. Uns interessiert hier vor allem die Primzahlverteilung, insbesondere die Anzahlfunktion $\pi(x)$. Wählen wir

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n\in\mathbb{P},\\ 0 & \text{für} \quad n\notin\mathbb{P},\end{cases}$$

so gilt natürlich $\pi(x) = \sum_{n \le x} a(n)$. Leider ist $a(n)$ nicht multiplikativ, und die zugehörige Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$$

lässt sich nicht ohne weiteres durch die Zetafunktion ausdrücken. Es besteht trotzdem ein enger Zusammenhang zur Riemannschen Zetafunktion, denn:

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} - \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} \qquad (3.1) \end{aligned}$$

für $Re\ s > 1$. Für diese s gilt außerdem

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} \le \frac{1}{p^{2s}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) \le \frac{1}{p^{2s}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \le \frac{2}{p^2}.$$

Also gilt für $Re\ s > 1$

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + O(1).$$

Leider hat $\zeta(s)$ für $Re\ s < 1$ Nullstellen, so dass $\log \zeta(s)$ dort logarithmische Singularitäten besitzt. Differenzieren wir aber (3.1) nach s, so erhält man

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{d}{ds} \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ks}}.$$

Dies lässt sich als Dirichlet-Reihe schreiben:

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

wobei

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{, falls} \quad n = p^k, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

von Mangoldt-Funktion heißt. Die entsprechende Koeffizientensumme

$$\Psi(x) := \sum_{n \le x} \Lambda(n)$$

hängt übrigens eng mit der *Tschebyscheff-Funktion*

$$\vartheta(x) := \sum_{p \le x} \log p$$

zusammen. Es gilt

$$\Psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}).$$

Da wir - wie sich herausstellen wird - zum Beweis des Primzahlsatzes statt $\pi(x)$ ebenso $\vartheta(x)$ verwenden können, ist der Zusammenhang zwischen Primzahlverteilung und Riemannscher Zetafunktion hergestellt. Er drückt sich konkret aus in

Satz 3.5

Für $x \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

Beweis: Satz 3.4 .

4 Exkurs: Die Gammafunktion

Für $z \in \mathbb{C}$, $Re\ z > 0$ setzen wir

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \ .$$

Für $Re\ z > 0$ stellt das Integral eine holomorphe Funktion dar. Partielle Integration ergibt

$$\Gamma(z) = e^{-u} \frac{u^z}{z}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^z}{z} dz = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \ .$$

Mit dieser Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

lässt sich Γ schrittweise in die ganze komplexe Ebene meromorph fortsetzen. Die so entstehende Funktion heißt *Gammafunktion*.

Offenbar ist $\Gamma(1) = 1$. Es folgt $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem zeigt die Funktionalgleichung, dass Γ bei $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, einen Pol erster Ordnung (mit Residuum $(-1)^n n!$) hat. Die Gammafunktion lässt sich auch direkt auf ganz $\mathbb{C}$ durch das Weierstraß-Produkt

$$z \cdot \prod_{j=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j}$$

erklären. Dieses konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ (durch die sogenannten konvergenzerzeugenden Faktoren $e^{-z/j}$) und stellt deshalb eine ganze Funktion mit Nullstellen genau bei $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, dar. Dies ist im Wesentlichen $\Gamma(z)^{-1}$.

Satz 4.1

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Gamma(z)^{-1} = z \cdot e^{\gamma z} \prod_{j=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{j}\right) e^{-z/j},$$

wobei

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\le n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

die Eulersche Konstante bezeichnet. Insbesondere hat $\Gamma(z)$ keine Nullstellen.

Beweis:

Es genügt, die Behauptung für reelle $z = x > 0$ zu zeigen, da sie dann für alle z durch analytische Fortsetzung folgt. Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\,dt &= \frac{t^x}{x}(1-t)^n\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t^x}{x} n(1-t)^{n-1}\,dt \\ &= \frac{n}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

Es folgt sukzessiv

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\,dt &= \frac{n}{x}\cdot\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\int_0^1 t^{x+n-1}dt \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\end{aligned}$$

Wir substituieren $t \to t/n$ und erhalten

$$\int_0^1 t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Wir schreiben das Integral als

$$\int_0^\infty t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \cdot I_n(t)dt,$$

wobei $I_n(t)$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[0,n]$ bezeichne. Für $n \to \infty$ können nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz Limes und Integral vertauscht werden. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1+t/n)^n = e^t$ folgt somit

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Diese Darstellung der Gammafunktion geht auf Gauß zurück. Umordnen des Produktes ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!\cdot n^x} &= x\cdot n^{-x}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{x}{j}\right)\\
&= x\cdot e^{x(1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\log n)}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{x}{j}\right)\cdot e^{-x/j}
\end{aligned}$$

Mit $n\to\infty$ folgt das Gewünschte.

□

Satz 4.2

Es gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Beweis:

Bekanntlich gilt

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right).$$

Mit der Funktionalgleichung und Satz 4.1 folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= -\frac{1}{\Gamma(z)\cdot z\Gamma(-z)}\\
&= -\left(ze^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}\right)\left(\frac{1}{z}(-z)e^{-\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{j}\right)e^{z/j}\right)\\
&= z\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)=\frac{\sin\pi z}{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.1

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis:

Nach Satz 4.1 ist $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$. Mit Satz 4.2 haben wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi.$$

Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Für große $|z|$ ist das asymptotische Verhalten von $\Gamma(z)$ gut bekannt.

Satz 4.3 (Stirlingsche Formel)

Sei $\delta > 0$. In $|\arg z| \leq \pi - \delta$ gelten dann

(i) $$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O\left(\frac{1}{|z|}\right);$$

(ii) $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Beweis:

Zuerst leiten wir eine auch für sich interessante Integraldarstellung für Γ'/Γ her. Nach Satz 4.1 ist

$$-\log \Gamma(z) = \log z + \gamma z + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{z}{j}\right) - \frac{z}{j}\right).$$

Logarithmisches Differenzieren liefert also

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+j} - \frac{1}{j}\right).$$

Für $Re\ w > 0$ haben wir

$$\frac{1}{w} = \int_0^{\infty} e^{-wt} dt.$$

Damit erhalten wir für $Re\ z > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) &= -\gamma - \int_0^\infty e^{-tz} dt - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left(e^{-(j+z)t} - e^{-jt}\right) dt \\
&= -\gamma + \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n e^{-jt} - e^{-tz} \sum_{j=0}^n e^{-jt} \right) dt \\
&= -\gamma + \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(n+1)t} - 1}{e^{-t} - 1} - 1 - e^{-tz} \frac{e^{-(n+1)t} - 1}{e^{-t} - 1} \right) dt \\
&= -\gamma + \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-nt} - 1}{1 - e^t} - \frac{\left(e^{-nt} - e^t\right) e^{-tz}}{1 - e^t} \right) dt \\
&= -\gamma + \int_0^\infty \frac{1 - e^{(1-z)t}}{e^t - 1} dt.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Grenzprozesse ist durch gleichmäßige und absolute Konvergenz leicht zu rechtfertigen. Eine ähnliche Darstellung kann auch für γ selbst aus der Definition gewonnen werden. Für $Re\ w > 0$ haben wir

$$\log w = \int_1^w \frac{dz}{z} = \int_0^\infty \int_1^w e^{-zt} dz dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-wt}}{t} dt.$$

Einsetzen in die Definition von γ liefert nach ähnlicher Rechnung wie eben

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt.$$

Zusammen folgt nun

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{te^t} - \frac{e^{(1-z)t}}{e^t - 1} \right) dt.$$

Nach Übergang $z \to z + 1$ und Hinzufügen gewisser Terme erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+1) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{te^t} - \frac{e^{-tz}}{e^t - 1} \right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-tz} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) dt + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-tz} dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt.
\end{aligned}$$

Es sind alle Integrale konvergent, und wir kennen die beiden letzten:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-tz} dt = \frac{1}{2z} \qquad , \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t} dt = \log z.$$

Wir differenzieren die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ logarithmisch und erhalten

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+1) = (\log\Gamma(z+1))' = (\log z + \log\Gamma(z))' = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) \ ,$$

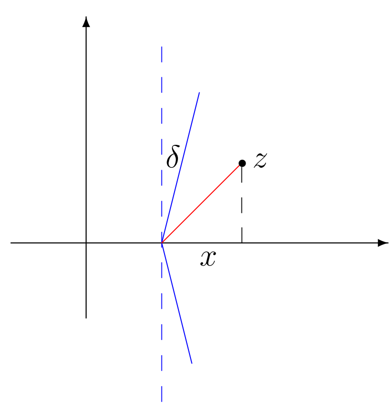
also insgesamt

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z - \frac{1}{2z} + \int_0^\infty e^{-tz} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) dt. \tag{4.1}$$

Ist $|\arg z| \le \frac{\pi}{2} - \delta$, so folgt

$$|z| \le \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} \ll x$$

für $z = x + iy$.



Außerdem ist

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} = \frac{(2-t)(e^t - 1) - 2t}{2t(e^t - 1)} = \frac{(2/3! - 1/2!)\, t^3 + (2/4! - 1/3!)\, t^4 + \cdots}{2t\,(t + t^2/2! + t^3/3! + \cdots)} = O(t)$$

für $t \to 0^+$, also insbesondere beschränkt auf $(0, \infty)$. Es folgt

$$\left| \int_0^\infty e^{-tz} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1} \right) dt \right| \ll \int_0^\infty e^{-xt} dt \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{|z|}.$$

Damit haben wir die Formel (ii) für $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$ gezeigt. Alternativ dürfen wir im Integral unserer Formel (4.1) für $Re\ z > \delta > 0$ partiell integrieren. Es folgt dann

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t-1}\right)dt &= -\frac{e^{-tz}}{z}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t-1}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-tz}}{z}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{e^t}{\left(e^t-1\right)^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{z}\cdot O(1) + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{e^t}{\left(e^t-1\right)^2}-\frac{1}{t^2}\right)dt.\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{e^t}{\left(e^t-1\right)^2}-\frac{1}{t^2} = \frac{t^2e^t-\left(e^t-1\right)^2}{t^2\left(e^t-1\right)^2} &= \frac{t^2+t^3+t^4/2!+\cdots-\left(t^2+2\cdot t^3/2!+\cdots\right)}{t^2\left(t^2+2\cdot t^3/2!+\cdots\right)} \\ &= \frac{C\cdot t^4+\cdots}{t^4+\cdots} = \frac{C+\cdots}{1+\cdots} = O(1)\end{aligned}$$

auf $0 < y < \infty$. Also

$$\int_0^\infty e^{-tz}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t-1}\right)dt = \frac{1}{z}\cdot O(1) + \frac{1}{z}\cdot O\left(\int_0^\infty e^{-tx}dt\right) = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Somit gilt (ii) auch für $Re\ z > \delta > 0$. Um nun Formel (i) zu zeigen, integrieren wir (4.1) über $[1, z]$. Für $Re\ z > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) &= \int_1^z \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\zeta)d\zeta \\ &= \int_1^z\left(\log\zeta-\frac{1}{2\zeta}\right)d\zeta + \int_0^\infty\left(\int_1^z e^{-t\zeta}d\zeta\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t-1}\right)dt \\ &= \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C - \int_0^\infty e^{-tz}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t-1}\right)dt,\end{aligned}$$

wobei die Konstante später noch explizit bestimmt wird. Das letzte Integral erweist sich auf ähnlichem Wege wie das in (4.1) als $O\left(1/|z|\right)$. Damit gilt (i) in $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$ und in $Re\ z > \delta$, allerdings ist C noch zu berechnen. Nach der soeben gezeigten Formel haben wir für $y > 0$

$$\log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= iy\left(\log\left(\frac{1}{2}+iy\right)-\log\left(\frac{1}{2}-iy\right)\right)-1+2C+O\left(\frac{1}{y}\right)\\
&= -2y\cdot\arg\left(\frac{1}{2}+iy\right)-1+2C+O\left(\frac{1}{y}\right),
\end{aligned}
$$

wegen

$$\cos\arg z=\frac{Re\,z}{|z|}\qquad,\qquad \sin\arg z=\frac{Im\,z}{|z|},$$

also

$$2i\arg z=\log e^{2i\arg z}=\log\left(\frac{Re\,z+iIm\,z}{|z|}\right)^2=\log\frac{z^2}{z\overline{z}}=\log z-\log\overline{z}.$$

Es ist $\tan\arg(1/2+iy)=2y$, also nach der Potenzreihenentwicklung von arctan

$$\arg\left(\frac{1}{2}+iy\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2y}+O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Es folgt

$$\log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right)\right)=-\pi y+2C+O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Andererseits ist die linke Seite nach Satz 4.2 gleich

$$
\begin{aligned}
\log\frac{\pi}{\sin\pi\,(1/2+iy)} &= \log\frac{2\pi}{e^{\pi y}\,(1-e^{-2\pi y})}\\
&= \log 2\pi-\pi y-\log\left(1-e^{-2\pi y}\right).
\end{aligned}
$$

Mit $y\to\infty$ folgt $C=\frac{1}{2}\log 2\pi$ wie behauptet.

Es bleibt noch, den Gültigkeitsbereich der Stirling-Formeln auf $|\arg z|<\pi-\delta$ auszudehnen. Hierzu können wir nochmals Satz 4.2 und die Formel in $|\arg z|<\pi/2-\delta$ bzw. $Re\ z>\delta$ verwenden. Der Bereich $|\arg z|>\pi-\delta$ bleibt ausgespart, weil an den Stellen $-n$, $n\in\mathbb{N}$, $\sin\pi n$ verschwindet. Damit ist Satz 4.3 bewiesen.

$\square$

Satz 4.4 (Legendresche Verdoppelungsformel)

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{1-2z} \cdot \Gamma(2z).$$

Beweis:

Wir setzen

$$F(z) = 4^z \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2z)^{-1}$$

und müssen zeigen: $F(z) = 2\sqrt{\pi}$ für alle z. Wir verwenden die im Beweis zu Satz 4.1 hergeleitete Gaußsche Darstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

für reelle $x > 0$. Mit der Abkürzung $(x)_n := x(x+1) \cdots (x+n)$ erhalten wir für $x > 0$

$$F(x) = 4^x \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x)_n} \cdot \frac{n! \cdot n^{x+1/2}}{(x+1/2)_n} \cdot \frac{(2x)_{2n}}{(2n!)(2n)^{2x}},$$

wobei wir in der Darstellung für $\Gamma(2x)$ noch n durch $2n$ ersetzt haben. Es folgt

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2x)(2x+1) \cdots (2x+2n)}{x(x+1/2)(x+1) \cdots (x+n)(x+n+1/2)} \\ &= \lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 2^{2n+1} \cdot \frac{1}{x+n+1/2}. \end{aligned}$$

Insbesondere existiert der Grenzwert für jedes $x > 0$. Also

$$F(x_1) - F(x_2) = F(x_1)\left(1 - \frac{F(x_2)}{F(x_1)}\right) = F(x_1)\left(1 - \lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + n + 1/2}{x_2 + n + 1/2}\right) = 0$$

Damit ist $F(x)$ konstant für $x > 0$. Mittels analytischer Fortsetzung ergibt sich dies für ganz $\mathbb{C}$. Wegen

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1) \cdot \Gamma(1)^{-1} = 2\sqrt{\pi}$$

nach Korollar 4.1 folgt die Behauptung.

$\square$

Korollar 4.2

$$\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(z/2\right)}{\Gamma\big((1-z)/2\big)} = 2^{1-z} \cdot \Gamma(z) \cdot \cos\frac{\pi z}{2}.$$

Beweis:

Nach Satz 4.4 und Satz 4.2 ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(z/2\right)}{\Gamma\left(z\right)} &= \pi \cdot 2^{1-z} \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^{-1} \\
&= \pi \cdot 2^{1-z} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{z+1}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\pi(z+1)/2\right)}{\pi} \\
&= 2^{1-z} \cdot \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \cdot \cos\frac{\pi z}{2}.
\end{aligned}$$

□

5 Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

Wir folgen dem Beweis von Riemann. Als Hilfsmittel sind nötig die Integraldarstellung der Gammafunktion und deren einfachste analytische Eigenschaften sowie eine sogenannte *Thetafunktion*

$$\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Diese Reihe konvergiert offenbar absolut und gleichmäßig in $x > \varepsilon > 0$. Auch für Θ existiert eine Funktionalgleichung, zu deren Herleitung wir die *Poissonsche Summenformel* verwenden werden. Sie ist ein nützliches Werkzeug für vielerlei Anwendungen in Analysis und Zahlentheorie. Dazu erklären wir für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = O\left(1/|x|^2\right)$ die *Fourier-Transformierte*

$$\hat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-xy)dx$$

mit der üblichen Abkürzung $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir zeigen an dieser Stelle eine relativ schwache Version in der Form von

Satz 5.1 (Poissonsche Summenformel)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem gelte $f(x) = O\left(1/|x|^2\right)$, und $\displaystyle\int |f''(x)|\, dx$ existiere. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\alpha+n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e(k\alpha)\ .$$

Beweis:

Es genügt, den Satz für $\alpha = 0$ zu beweisen. Setzten wir nämlich für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion g durch $g(x) = f(x+\alpha)$ fest, so gilt

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e(-xy)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+\alpha)e(-xy)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y+\alpha)e(-x(y+\alpha))e(\alpha x)dy \\
&= e(\alpha x)\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e(-xy)dy = e(\alpha x)\hat{f}(x),
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\alpha+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k)e(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e\left(\alpha k\right).$$

Die für $0 \leq r < 1$ absolut konvergente Reihe

$$P(t,r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e(kt)$$

lässt sich durch zwei geometrische Reihen (für $k > 0$ bzw. $k < 0$) berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned}
P(t,r) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e(-kt) \\
&= 1 + \frac{re(t)}{1-re(t)} + \frac{re(-t)}{1-re(-t)} \\
&= \frac{\left(1-re(t)\right)\left(1-re(-t)\right) + re(t)\left(1-re(-t)\right) + re(-t)\left(1-re(t)\right)}{\left(1-re(t)\right)\left(1-re(-t)\right)} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(2\pi t\right)+r^2}.
\end{aligned}$$

Es lassen sich nun mehrere Eigenschaften von $P(t,r)$ ablesen, wobei wir noch die Formel

$$\int_0^1 e(kt)dt = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = 0, \\ 0 & \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$$

verwenden.

Gemäß Definition hat $P(t,r)$ offensichtlich die Periode 1 in t. Gliedweise Integration liefert weiterhin für $0 \leq r < 1$

$$\int_0^1 P(t,r)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \cdot \int_0^1 e(kt)dt = 1.$$

Beachten wir noch

$$1 - 2r\cos(2\pi t) + r^2 = (r - \cos 2\pi t)^2 + (\sin 2\pi t)^2 \geq 0,$$

so folgt aus obiger Identität für $P(t,r)$ sofort $P(t,r) \geq 0$ für alle $0 \leq r < 1$ und $t \in \mathbb{R}$ sowie

$$P(t,r) \leq \frac{1-r^2}{(\sin 2\pi\delta)^2}$$

für $0 \leq r < 1$ und $0 < \delta \leq |t| \leq 1/2$, da hier $|\sin 2\pi t| \geq |\sin 2\pi\delta|$.
Wir bezeichnen mit I_k das Intervall $[k-1/2, k+1/2]$. Wegen $f(x) = O(1/x^2)$ folgt für $0 < r < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\hat{f}(k) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e(-ky)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(y,r)f(y)dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{I_k} P(y,r)f(y)dy.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die linke Seite der Gleichung gegen $\sum \hat{f}(k)$ und die rechte Seite gegen $\sum f(k)$ konvergiert für $r \to 1$, $r < 1$, womit die Poissonsche Summenformel bewiesen wäre.

Behauptung 1:

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{I_k} P(y,r)f(y)dy = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k).$$

Zunächst gilt wegen $P(y,r) \geq 0$ und $P(y,r)$ 1-periodisch

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{I_k} P(y,r)f(y)dy\right| &\leq \int\limits_{I_k} P(y,r)|f(y)|dy \\ &\leq \max_{y\in I_k}|f(y)|\int\limits_0^1 P(y,r)dy = O\left(\frac{1}{k^2}\right) .\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $K = K(\varepsilon)$ derart, dass

$$\sum_{|k|>K}\left|\int\limits_{I_k} P(y,r)f(y)dy\right| < \varepsilon$$

und

$$\sum_{|k|>K}|f(k)| < \varepsilon .$$

Es bleiben die Terme mit $|k| \leq K$ zu untersuchen. Hierfür wählen wir ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, dass für alle $|k| \leq K$ und alle x mit $|x-k| \leq \delta$ gilt

$$|f(k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} .$$

Wegen $\int\limits_0^1 P(t,r)dt = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\leq K}|P(y,r)f(y)dy - f(k)| &= \sum_{|k|\leq K}\left|\int\limits_{I_k} P(y,r)(f(y)-f(k))dy\right| \\ &\leq \sum_{|k|\leq K}\int\limits_{I_k} P(y,r)|f(y)-f(k)|dy \\ &= \sum_{|k|\leq K}\left(J_1(k)+J_2(k)\right),\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}J_1(k) &= \int\limits_{k-\delta}^{k+\delta} P(y,r)|f(y)-f(k)|dy, \\ J_2(k) &= \int\limits_{\substack{[k-1/2,k+1/2]\setminus \\ [k-\delta,k+\delta]}} P(y,r)|f(y)-f(k)|dy.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt für alle $|k| \leq K$

$$J_1(k) \leq \frac{\varepsilon}{3K} \int\limits_{I_k} P(y,r)dy = \frac{\varepsilon}{3K}$$

und wegen $f(y) = O\left(1/y^2\right)$

$$J_2(k) \leq \frac{1-r^2}{(\sin 2\pi\delta)^2} \int\limits_{I_k} |f(y) - f(k)|dy = O_\delta\left(\frac{1-r^2}{k^2}\right) = O_\varepsilon\left(\frac{1-r^2}{k^2}\right).$$

Es folgt

$$\sum_{|k|\leq K} J_1(k) \leq (2K+1) \cdot \frac{\varepsilon}{3K} < \varepsilon$$

und für alle $r \geq r_0$ mit einem $r_0 = r_0(\varepsilon) < 1$

$$\sum_{|k|\leq K} J_2(k) \leq C_\varepsilon(1-r^2) \sum_{|k|\leq K} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Damit ist Behauptung 1 gezeigt.

Behauptung 2:

$$\lim_{r\to 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\hat{f}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k).$$

Zweimalige partielle Integration gibt wegen $f(x) = O\left(1/x^2\right)$, $\int |f''|$ existiert,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-kx)dx = -\frac{f(x)e(-kx)}{k}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e(-kx)dx \\
&= \frac{1}{k^2}\left(-f'(x)e(-kx)\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f''(x)e(-kx)dx\right) ,
\end{aligned}$$

also

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{k^2}\left(\lim_{x\to\infty} f'(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|dx\right) .$$

Mit

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \int\limits_{a}^{\infty} f''(t)dt + f'(a) = C_a + f'(a) = C$$

folgt $\hat{f}(k) = O\left(1/k^2\right)$. Also dürfen in der behaupteten Identität lim und $\sum\limits_k$ vertauscht werden. Daraus folgt die Behauptung.

□

Als Korollar erhalten wir

Lemma 5.1

Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2} = \sqrt{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2+2\pi i n\alpha} \ ,$$

(ii) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+\alpha) e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2} = -ix^{3/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n e^{-\pi x n^2+2\pi i n\alpha} \ .$$

Beweis:

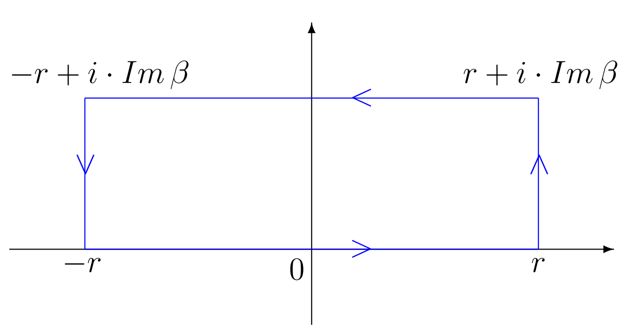
Bei festem $x > 0$ sei $f(\alpha) := e^{\pi\alpha^2/x}$. Wir erhalten mit Substitution $\alpha = xt$ und quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi\alpha^2/x} e(-\alpha y) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi\alpha^2/x - 2\pi i\alpha y} d\alpha \\ &= x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x t^2 - 2\pi i x t y} dt = x e^{-\pi x y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi x(t+iy)^2} dt.\end{aligned}$$

Das Integral

$$H(\beta) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(t+\beta)^2} dt$$

ist bei festem $\lambda > 0$ unabängig von $\beta \in \mathbb{C}$. Dies folgt aus dem Cauchy-Integralsatz, da die Funktion $e^{-\lambda z^2}$ eine ganze (d.h. in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion ist. Wir integrieren über das nebenstehende Rechteck und zeigen damit $H(\beta) = H(0)$.



Also folgt mit Substitution $u = \sqrt{x}t$

$$\hat{f}(y) = xe^{-\pi xy^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi xt^2} dt = \sqrt{x}e^{-\pi xy^2} \cdot K \ ,$$

wobei

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du.$$

Nach der Poissonschen Summenformel folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2} = K\sqrt{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi xn^2+2\pi in\alpha} \ .$$

Für $\alpha = 0, \ x = 1$ sind beide Summen identisch und sicherlich ungleich Null. Also ist $K = 1$. Damit ist (i) bewiesen. Differenzieren wir (i) gliedweise nach α, so sind die entstehenden Reihen gleichmäßig konvergent. Deshalb ist auch (ii) gezeigt.

□

Korollar 5.1 (Funktionalgleichung der Θ-Funktion)

Für $x > 0$ gilt

$$\Theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \cdot \Theta(x).$$

Satz 5.2 (Funktionalgleichung der ζ-Funktion)

Die Riemannsche ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C}, \ Re \ s > 1)$$

läßt sich nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen. Es gilt

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)\zeta(1-s) \ .$$

In $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist ζ holomorph, bei $s = 1$ hat ζ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1. In $Re\ s < 0$ verschwindet ζ genau an den Stellen $-2, -4, -6, \ldots$; diese Nullstellen sind sämtlich erster Ordnung. Für reelle $s \in [0, 1)$ gilt $\zeta(s) < 0$; speziell $\zeta(0) = -1/2$.

Beweis:

Wir substituieren $u = \pi n^2 y$ in

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$$

und erhalten für $Re\ s > 0$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} (\pi n^2 y)^{\frac{s}{2}-1} \pi n^2 dy \ .$$

Wir multiplizieren mit n^{-s} und summieren über n. Dann kommt für $Re\ s > 1$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \ ,$$

wobei

$$\omega(x) := \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} \ .$$

Offenbar ist $\Theta(x) = 2\omega(x) + 1$. Daher gibt die Funktionalgleichung für Θ

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \Theta(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \omega(x) \ .$$

Also mit Substitution $y = 1/x$

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_1^\infty \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
&= \int_1^\infty \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \omega\left(\frac{1}{y}\right) y^{-\frac{s}{2}-1} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-1} dy + \frac{1}{2} \int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dy + \int_1^\infty \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) dx \ .
\end{aligned}$$

Wir haben für *Re* $s > 1$

$$\int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-1} dy = -\left.\frac{y^{-\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\right|_1^\infty = \frac{2}{s}$$

und

$$\int_1^\infty y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dy = -\left.\frac{y^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\right|_1^\infty = -\frac{2}{s-1} \ .$$

Zusammen kommt

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) dx \ .$$

Es gilt

$$\omega(x) = e^{-\pi x} \cdot \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi(n^2-1)x} \leq e^{-\pi x} \sum_{n=0}^\infty e^{-\pi n x} = O(e^{-\pi x}) \ .$$

Also konvergiert das auftretende Integral für alle komplexen s, und zwar glechmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$. Deshalb stellt es eine ganze Funktion dar. Offensichtlich ändert sich die Formel für

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

nicht beim Übergang $s \to 1-s$, womit die Funktionalgleichung bewiesen ist. Obige Integralformel zeigt auch die einfachen Pole von ζ bei $s = 1$ bzw. von Γ bei $s = 0$. Bekanntlich besitzt $\Gamma(s/2)$ aber weitere Pole bei $s = -2, -4, -6, \ldots$. Da die rechte Seite der Integralformel dort holomorph ist, muß ζ bei $-2, -4, -6, \ldots$ Nullstellen haben. Andere Nullstellen kann $\zeta(s)$ in *Re* $s < 0$ nicht haben, da die Funktionalgleichung sonst Nullstellen von ζ oder Γ in *Re* $s > 1$ liefern würde, was nicht der Fall ist. Die Funktionalgleichung zeigt darüber hinaus, dass die Nullstellen bei $-2n,\ n \in \mathbb{N}$, von erster Ordnung sind, denn die Pole von $\Gamma(s/2)$ sind von erster Ordnung und $\zeta(1+2n)$ wie auch $\Gamma(1+2n)$ sind ungleich 0.

Es bleibt noch zu untersuchen $\zeta(s)$ für $s \in [0, 1)$. Für $Re\ s > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-(n-1))n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \\
&= s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} x^{-s-1}dx = s \cdot \int_1^{\infty}[x]x^{-s-1}dx \\
&= s \cdot \int_1^{\infty}(x-\{x\})x^{-s-1}dx = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx.
\end{aligned}$$

Da $0 \leq \{x\} < 1$, konvergiert das rechte Integral sogar für $Re\ s > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Für $s \in (0, 1)$ liefert diese Darstellung von ζ sofort $\zeta(s) < 0$. Lösen wir die Funktionalgleichung nach $\zeta(s)$ auf, so kommt

$$\zeta(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \lim_{s\to 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s/2)}.$$

Da die Residuen von ζ bei $s = 1$ und von Γ bei $s = 0$ beide 1 sind, ist

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \cdots \quad , \quad \Gamma(s) = \frac{1}{s} + \cdots \ ,$$

also

$$\zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + \cdots \quad , \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{2}{s} + \cdots$$

und somit

$$\lim_{s\to 0}\frac{\zeta(1-s)}{\Gamma(s/2)} = \lim_{s\to 0} -\frac{1/s+\cdots}{2/s+\cdots} = -\frac{1}{2}\ .$$

Also mit Korollar 4.1

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

□

Die Funktionalgleichung und auch andere Betrachtungen nehmen eine einfachere Form an, wenn wir anstelle von $\zeta(s)$ die nach Satz 5.2 ganze Funktion

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

betrachten. Die Funktionalgleichung lautet dann

$$\xi(s) = \xi(1-s) \ .$$

ξ hat höchstens in $0 \le Re\ s \le 1$ Nullstellen, die mit den Nullstellen von ζ in diesem Bereich übereinstimmen und von derselben Ordnung sind.

Riemann hat in seiner berühmten Arbeit von 1859, die schon in der Einleitung genannt wurde, einige bemerkenswerte Vermutungen über ζ bzw. ξ formuliert:

1. $\zeta(s)$ hat unendlich viele Nullstellen im *kritischen Streifen* $0 \le Re\ s \le 1$. Bezeichnen wir diese Nullstellen mit ρ und ihre (zweiseitig unendliche) Folge mit $\mathcal{N}$ (Anordnung z.B. nach wachsendem Imaginärteil; die ρ können sich wegen der Holomorphie von ζ (außer bei 1) nirgends häufen), wobei jede Nullstelle so oft vorkomme, wie ihre Vielfachheit angibt, so behauptete Riemann für die Anzahlfunktion dieser ρ

   $$N(T) := \sharp\{\rho \in \mathcal{N} : \quad 0 < Im\ \rho \le T\}$$

   die asymptotische Formel

   $$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \ .$$

   Riemanns Beweisskizze vervollständigte erst von Mangoldt zu einem Beweis.

2. Ist die Formel für $N(T)$ richtig, so konvergiert

   $$\prod_{\rho \in \mathcal{N}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

   in ganz $\mathbb{C}$ und stimmt nach dem Weierstraß-Produktsatz mit $\xi(s)$ bis auf einen ganzen, nullstellenfreien Faktor überein. Riemann gab

   $$\xi(s) = e^{Bs} \prod_{\rho \in \mathcal{N}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

   mit einer Konstanten B ohne Begründung an. Es sei erwähnt, dass zu Riemanns Zeit noch kein Produktsatz à la Weierstraß zur Verfügung stand. Diese

Entwicklung der Funktionentheorie erfolgte erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts, wodurch auch der Beweis des Primzahlsatzes gelang.

3. Riemann erkannte den Zusammmenhang zwischen Primzahlverteilung und Lage der Nullstellen der ζ-Funktion. Er gibt ohne Beweis die *explizite Formel*

$$\pi(x) = li\ x - \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ Im\ \rho>0}} (li(x^\rho) + li(x^{1-\rho})) + \int_x^\infty \frac{d\eta}{(\eta^2-1)\log\eta} - \log 2$$

an, wobei

$$li\ x := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right) .$$

Auch dies bewies später von Mangoldt.

4. Riemann arbeitete in seiner Originalarbeit mit der Funktion $\xi(1/2 + is)$, d.h. die *kritische Gerade Re* $s = 1/2$ liegt bei ihm auf der reellen Achse. Er schreibt: „ ... es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indes die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.“

In unserer Terminologie heißt das, dass alle Nullstellen von ξ auf der Geraden *Re* $s = 1/2$ liegen sollten. Diese *Riemannsche Vermutung* ist bis heute offen.
Die anderen Behauptungen und den Primzahlsatz werden wir in den nächsten Paragraphen beweisen. Für spätere Anwendungen noch folgendes

Lemma 5.2

Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\xi(1/2 + it) \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Aus der Integralformel für $\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= s(s-1)\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dx\right) \\
&= 1+s(s-1)\int_1^\infty \omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dx \ .
\end{aligned}$$

Mit $s = 1/2 + it$ ist

$$s(s-1) = \left(\frac{1}{2}+it\right)\left(-\frac{1}{2}+it\right) = -\frac{1}{4} - t^2 \in \mathbb{R} \ .$$

Da $\omega(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
Im\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) &= x^{-\frac{3}{4}} \cdot Im\left(x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}+x^{-(\frac{s}{2}-\frac{1}{4})}\right) \\
&= x^{-\frac{3}{4}} \cdot Im\left(e^{i\frac{t}{2}\log x}+e^{-i\frac{t}{2}\log x}\right) \\
&= x^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\sin\left(\frac{t}{2}\log x\right)+\sin\left(-\frac{t}{2}\log x\right)\right) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

ist das Lemma bewiesen.

□

6 Der Produktsatz von Hadamard

Wir wollen die schon erwähnte Produktdarstellung der ξ-Funktion herleiten. Hadamard stellte fest, dass sich alle ganzen Funktionen, die mit $|z| \to \infty$ nicht zu stark wachsen, in ein Produkt über die Nullstellen entwickeln lassen.

Lemma 6.1

Seien $C > 0$ und $\lambda > 0$ reelle Konstanten. Sei f eine ganze komplexe Funktion mit

$$Re\ f(z) \leq C \cdot |z|^\lambda \quad (z \in \mathbb{C}) \ .$$

Dann ist f ein Polynom vom Grade $[\lambda]$.

Beweis:

Für $k, n \in \mathbb{N}$ gelten bekanntlich die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{2\pi} \cos k\alpha \sin n\alpha \ d\alpha = 0 \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\alpha \cos n\alpha \ d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin k\alpha \sin n\alpha \ d\alpha = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad k = n \ , \\ 0 & \text{für} \quad k \neq n \ . \end{cases}$$

Wir machen zunächst die Annahme $f(0) = 0$. Dann hat f eine in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) z^n$$

mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Schreiben wir $z = r \cdot e^{i\vartheta}$, so folgt

$$Re\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) \ .$$

Da die Potenzreihe gleichmäßig konvergiert, ergibt sich aus den Orthogonalitätsrelationen nach Vertauschung von Summe und Integral für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos k\vartheta \cdot Re\ f(z)\ d\vartheta &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos k\vartheta \cos n\vartheta\ d\vartheta - b_n \int_0^{2\pi} \cos k\vartheta \sin n\vartheta\ d\vartheta \right) \\
&= a_k r^k \cdot \pi\ .
\end{aligned}$$

Mit $a_0 = 0$ gilt diese Formel auch für $k = 0$. Wegen

$$\int_0^{2\pi} Re\ f(z)\ d\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos n\vartheta\ d\vartheta - b_n \int_0^{2\pi} \sin n\vartheta\ d\vartheta \right) = 0$$

erhalten wir aus $Re\ f(z) \le C|z|^\lambda = C \cdot r^\lambda$

$$\begin{aligned}
|a_k| &\le \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} |Re\ f(z)|\ d\vartheta \\
&= \frac{1}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} (|Re\ f(z)| + Re\ f(z))\ d\vartheta \\
&= \frac{2}{\pi r^k} \int_0^{2\pi} \max(Re\ f(z), 0)\ d\vartheta \\
&\le \frac{2}{\pi r^k} \cdot 2\pi \cdot C \cdot r^\lambda = 4C \cdot r^{\lambda - k}\ .
\end{aligned}$$

Für $k > \lambda$ folgt $a_k = 0$ mit $r = |z| \to \infty$. Ein entsprechendes Argument mit sin statt cos ergibt analog $b_k = 0$ für $k > \lambda$, womit die Behauptung für $f(0) = 0$ gezeigt ist.

Ist $f(0) \neq 0$, so wenden wir das Bewiesene auf die Funktion $f(z) - f(0)$ an.

□

Bemerkung:

Der Beweis zeigt, dass die Behauptung bereits gilt, falls $Re\ f(z) \le c \cdot |z|^\lambda$ auf einer Folge von Kreislinien $|z| = R_\nu$ mit $R_\nu \to \infty$ bekannt ist.

Wir betrachten nun Funktionen, die schneller wachsen als Polynome. Eine ganze Funktion $f(z)$, die der Abschätzung

$$f(z) = O\big(\exp(|z|^\alpha)\big) \quad (z \in \mathbb{C})$$

für ein festes $\alpha > 0$ genügt, heißt von *endlicher Ordnung*. Die reelle Zahl

$$\text{ord } f := \inf\{\alpha : \ |f(z)| \leq \exp(|z|^\alpha) \text{ für } z \in \mathbb{C}\}$$

heißt *Ordnung von f*.

Es gibt Funktionen endlicher Ordnung ohne Nullstellen, z.B. e^z, e^{z^2},usw. (dies sind in gewissem Sinne bereits die allgemeinsten Beispiele).

Lemma 6.2

Ist f eine ganze Funktion endlicher Ordnung ohne Nullstellen, dann gilt $f = \exp(g)$ mit einem Polynom g. Außerdem ist ord $f = \deg g$.

Beweis:

Wegen $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$ ist $\log f$ ganz. Es ist

$$Re \ \log f(z) \leq C \cdot |z|^\alpha \ ,$$

also folgt mit Lemma 6.1 die Behauptung.

□

Auch über Funktionen endlicher Ordnung mit Nullstellen können wir eine Übersicht gewinnen. Zunächst wollen wir mit der Jensenschen Formel zeigen, dass die Nullstellen nicht zu dicht beieinander liegen können.

Satz 6.1 (Jensensche Formel)

Sei f in einer Umgebung von $|z| \leq R$ holomorph, es seien $f(0) \neq 0$ und $f(z) \neq 0$ auf $|z| = R$. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von f in $|z| < R$, wobei jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend oft aufgelistet ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\ e^{i\vartheta})|d\vartheta &= \log|f(0)| + \log\frac{R^n}{|z_1\cdot\ldots\cdot z_n|} \\ &= \log|f(0)| + \sum_{i=1}^n \log\frac{R}{|z_i|}\ . \end{aligned}$$

(Dies bedeutet, dass das Verhalten von f auf dem Kreisrand $|z| = R$ ausschließlich bestimmt wird von $f(0)$ sowie den Nullstellen von f im Inneren des Kreises.)

Beweis:

Wir untersuchen zunächst zwei Spezialfälle.

1. Fall: $f(z) \neq 0$ für alle $|z| \leq R$.

Wir können einen Zweig des Logarithmus so wählen, dass $\log f(z)$ in einer Umgebung von $|z| \leq R$ wohldefiniert und holomorph ist. Nach dem Residuensatz gilt

$$\begin{aligned} \log f(0) &= Res_{z=0}\frac{\log f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{\log f(z)}{z}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(R\ e^{i\vartheta})d\vartheta \end{aligned}$$

nach Substitution $z = R\ e^{i\vartheta}$. Wegen

$$\begin{aligned} Re\ \ \log z &= Re\ \ \log re^{i\vartheta} = Re\ (\log r + i\vartheta) \\ &= \log r = \log|z| \end{aligned}$$

folgt die gewünschte Formel durch Betrachtung der Realteile der hergeleiteten Gleichung.

2.Fall: Sei $f(z) = z - \zeta$ für $|\zeta| < R$.

Wir benutzen die Hilfsfunktion

$$Q(z) = \frac{f(z)}{R^2 - z\overline{\zeta}} = \frac{z-\zeta}{R^2 - z\overline{\zeta}}\ .$$

Für $|z| = R$ ist

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= \left|\frac{R\ e^{i\vartheta} - \zeta}{R^2 - \overline{\zeta}\cdot R\ e^{i\vartheta}}\right| = \frac{1}{R}\left|\frac{R\ e^{i\vartheta}-\zeta}{R - \overline{\zeta}e^{i\vartheta}}\right| \cdot \frac{1}{|e^{-i\vartheta}|} \\ &= \frac{1}{R}\cdot\frac{|R\ e^{i\vartheta}-\zeta|}{|\overline{R\ e^{i\vartheta}-\zeta}|} = \frac{1}{R}\ . \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|Q(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \log\frac{1}{R} = -\log R\ .$$

Wegen $|\zeta| < R$ hat $(R^2 - z\overline{\zeta})$ im Kreis $|z| \leq R$ keine Nullstellen. Aus Fall 1 folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|R^2 - z\overline{\zeta}|d\vartheta = \log R^2 = 2\log R\ .$$

Also kommt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|Q(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\vartheta}|d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|R^2 - z\overline{\zeta}|d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta - 2\log R\ .\end{aligned}$$

Zusammen haben wir – wie behauptet –

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta = \log R = \log|f(0)| + \log\frac{R}{|\zeta|}\ .$$

Der allgemeine Fall ergibt sich aus den beiden Spezialfällen, indem wir

$$f(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_n)\cdot F(z)$$

mit nullstellenfreiem $F(z)$ schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|R\,e^{i\vartheta} - z_i|d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(R\,e^{i\vartheta})|d\vartheta \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\log|-z_i| + \log\frac{R}{|z_i|}\right) + \log|F(0)| \\ &= \log\left|\prod_{i=1}^{n}(-z_i)\cdot F(0)\right| + \sum_{i=1}^{n}\log\frac{R}{|z_i|} \\ &= \log|f(0)| + \sum_{i=1}^{n}\log\frac{R}{|z_i|}\ .\end{aligned}$$

□

Satz 6.2

Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung α. Die Nullstellen von f seien (entsprechend Vielfachheit) $z_1, z_2, \ldots$, wobei $|z_i| \leq |z_{i+1}|$ für alle i.

(i) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sum_{|z_i| \leq R} 1 = O(R^{\,\alpha+\varepsilon}) \ ;$$

(ii) Ist $\beta > \alpha$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{z_i \neq 0} |z_i|^{-\beta} \ .$$

__Beweis:__

Sei $\gamma \geq 3$ so gewählt, dass f auf $|z| = \gamma \cdot R$ keine Nullstelle besitzt. Wegen $\log\gamma > 1$ folgt aus der Jensenschen Formel (o.B.d.A. $f(0) \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\sum_{|z_i| \leq R} 1 \ &\leq \ \sum_{|z_i| \leq R} \log\frac{\gamma R}{|z_i|} \leq \sum_{|z_i| \leq \gamma R} \log\frac{\gamma R}{|z_i|} \\
&= \ -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\gamma R\, e^{i\vartheta})|d\vartheta \\
&\leq \ -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi(\gamma R)^{\alpha+\varepsilon} = O_\varepsilon(R^{\,\alpha+\varepsilon}) \ .
\end{aligned}$$

Dies beweist (i).

Zum Beweis von (ii) sei für den Augenblick

$$N(R) = \sum_{|z_i| < R} 1 \ .$$

Sei $\alpha < \rho < \beta$. Nach (i) ist

$$N(R) < C_\rho \cdot R^{\,\rho} \ .$$

Speziell für $R = |z_n|$ folgt

$$n < N(|z_n|) < C_\rho |z_n|^\rho \ ,$$

also

$$|z_n|^{-\beta} < C_\rho^{\beta/\rho} \cdot n^{-\beta/\rho} \ .$$

Es folgt

$$\sum_{z_i \neq 0} |z_i|^{-\beta} \ll \sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq 0}}^{\infty} i^{-\beta/\rho} < \infty \ .$$

□

Satz 6.3 (Hadamard)

Sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung α. Sei k die Ordnung der Nullstelle von f bei 0. Seien z_i die Nullstellen von f in $z \neq 0$ entsprechend ihrer Vielfachheit aufgelistet. Dann gilt

$$f(z) = z^k \ e^{g(z)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) e^{J(z/z_i)} \ ,$$

wobei

$$J(\omega) = \sum_{i=1}^{[\alpha]} \frac{1}{j} \ \omega^j$$

ist und g ein Polynom vom Grad höchstens $[\alpha]$ bezeichnet.

Beweis:

Wir führen den Beweis nur für $\alpha = 1$, weil wir den Satz nur in diesem Fall anwenden werden. Wir können o.B.d.A. annehmen $k = 0$, d.h. $f(0) \neq 0$. Nach Satz 6.2 ist $\sum |z_i|^{-2}$ konvergent. Damit ist das Produkt

$$P(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) e^{z/z_i}$$

auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig konvergent, denn

$$\log P(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\log\left(1 - \frac{z}{z_i}\right) + \frac{z}{z_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_i}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_i}\right)^3 + \cdots\right) .$$

Also ist $f(z)/P(z)$ eine ganze, nullstellenfreie Funktion.

Behauptung: ord $f/P \leq 1$ (auf $|z| = R = R_\nu \to \infty$).

Wir benötigen eine untere Abschätzung für $P(z)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei außerdem R stets so gewählt, dass $\big|R - |z_i|\big| > |z_i|^{-2}$ für alle i. Dies ist sogar für gewisse beliebig große R möglich, denn:

Nach Satz 6.2(i) ist $\sum\limits_{|z_i| \leq R} 1 \ll R^{1+\varepsilon}$. Also ist oft $\big||z_i| - |z_{i-1}|\big| \geq R^{-1}$ für $R/2 \leq |z_i| \leq R$. Für $R := \dfrac{|z_i| + |z_{i-1}|}{2}$ folgt

$$\big|R - |z_i|\big| > \frac{1}{2R} \geq \frac{1}{4|z_i|} > \frac{1}{|z_i|^2} \ .$$

Wir schätzen nun $P(z)$ auf $|z| = R$ ab und betrachten 3 Fälle.

1.Fall: $|z_i| \leq R/2$;

$$\left|\left(1 - \frac{z}{z_i}\right) e^{z/z_i}\right| \geq \left(\left|\frac{z}{z_i}\right| - 1\right) e^{Re(z/z_i)} \geq 1 \cdot e^{-|z/z_i|} = e^{-R/|z_i|}.$$

Unter Anwendung von Satz 6.2 folgt damit für hinreichend große R

$$\begin{aligned} \left|\prod_{|z_i| \leq R/2} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) e^{z/z_i}\right| &\geq \exp\left(-R \sum_{|z_i| \leq R/2} \frac{1}{|z_i|}\right) \\ &> \exp\left(-R^{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|z_i|^{1+\varepsilon}}\right) > \exp\left(-R^{1+2\varepsilon}\right) \ . \end{aligned}$$

2.Fall: $|z_i| > 2R$;

es gilt für $|\zeta| \leq 1/2$ mit einem geeigneten c

$$\begin{aligned} |(1-\zeta)e^{\zeta}| &= \left|\left(1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^3}{3!} + \cdots\right) - \left(\zeta + \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{2!} + \frac{\zeta^4}{3!} + \cdots\right)\right| \\ &= \left|1 - \zeta^2\left(1 - \frac{1}{2!}\right) - \zeta^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - \cdots\right| \\ &\geq 1 - |\zeta|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots\right) \\ &\geq 1 - |\zeta|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) \geq 1 - |\zeta|^2 \\ &\geq e^{-c|\zeta|^2} \ . \end{aligned}$$

Damit folgt für hinreichend großes R

$$\begin{aligned}\left|\prod_{|z_i|>2R}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{z/z_i}\right| &\geq \exp\left(-c\sum_{|z_i|>2R}\left(\frac{R}{|z_i|}\right)^2\right)\\ &> \exp\left(-c\, R^{\,1+\varepsilon}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{|z_i|^{1+\varepsilon}}\right) > \exp(-R^{\,1+2\varepsilon})\ .\end{aligned}$$

<u>3.Fall:</u> $R/2 \leq |z_i| \leq 2R$;

wegen $\big|R-|z_i|\big| > |z_i|^{-2}$ ist

$$\begin{aligned}\left|\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{z/z_i}\right| &= \left|1-\frac{z}{z_i}\right|\cdot e^{Re(z/z_i)} \geq \frac{|z-z_i|}{2R}\cdot e^{-2}\\ &\geq \frac{e^{-2}}{2R}\cdot\frac{1}{(2R)^2} > \frac{1}{60R^3}\ .\end{aligned}$$

Nach Satz 6.2(i) gibt es höchstens $O(R^{\,1+\varepsilon})$ viele Nullstellen z_i im obigen Bereich, also

$$\left|\prod_{R/2\leq|z_i|\leq 2R}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)e^{z/z_i}\right| \geq \left(\frac{1}{60R^3}\right)^{R^{\,1+\varepsilon}}\ .$$

Zusammen kommt

$$|P(z)| \geq \left(\frac{1}{60R^3}\right)^{R^{\,1+\varepsilon}}\cdot\exp\left(-2R^{1+2\varepsilon}\right) > \exp\left(-R^{1+3\varepsilon}\right)$$

für hinreichend große R. Da f von Ordnung 1 ist, folgt für $|z| = R$

$$\frac{f(z)}{P(z)} \ll \frac{\exp\left(R^{1+\varepsilon}\right)}{\exp\left(-R^{1+3\varepsilon}\right)} \ll \exp\left(R^{1+4\varepsilon}\right),$$

und dies auf einer Folge $R = R_\nu \to \infty$. Nach Lemma 6.2 (zusammen mit der Bemerkung zu Lemma 6.1) ist daher $\log(f/P)$ ein lineares Polynom, womit der Satz für $\alpha = 1$ bewiesen ist.

$\square$

Für Funktionen der Ordnung 1 kann die Reihe $\sum|z_i|^{-1}$ sowohl konvergieren als auch divergieren. Im Falle der Konvergenz ergibt sich eine Wachstumsschranke für f, die schärfer ist als die Ordnung angibt.

Lemma 6.3

Sei f eine ganze Funktion von Ordnung 1. Sei außerdem die Reihe

$$\sum_{f(z_i)=0} |z_i|^{-1}$$

konvergent. Dann gilt $|f(z)| < e^{C|z|}$ für ein $C > 0$.

Beweis:

Für $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt

$$|1-\zeta| \leq 1 + |\zeta| \leq e^{|\zeta|}$$

und

$$|e^{\zeta}| = e^{Re\ \zeta} \leq e^{|\zeta|} \ ,$$

also

$$|(1-\zeta)e^{\zeta} \leq e^{2|\zeta|} \ .$$

Mit $\zeta = z/z_i$ folgt aus Satz 6.3

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |z|^k e^{C_1|z|} \prod_{i=1}^{\infty} e^{2|z/z_i|} \\ &= |z|^k e^{C_1|z|} \cdot \exp\left(2 \sum_{f(z_i)=0} \frac{|z|}{|z_i|}\right) < e^{C|z|} \end{aligned}$$

für ein geeignetes C.

□

Satz 6.4

Die Funktion $\xi(s)$ hat unendlich viele Nullstellen ρ in $0 \leq Re\ \rho \leq 1$. Dabei gilt

(i) $\xi(s) = e^{Bs} \prod_{\rho \in \mathcal{N}} (1 - s/\rho)\, e^{s/\rho}$;

(ii) $\sum_{\rho} |\rho|^{-1}$ ist divergent ;

(iii) $\sum_{\rho} |\rho|^{-1-\varepsilon}$ ist konvergent für jedes $\varepsilon > 0$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

von Ordnung 1 ist. Wegen der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ reicht es, $\xi(s)$ in $Re\ s \geq 1/2$ abzuschätzen. Hier liefert die Stirlingsche Formel (Satz 4.3)

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = O\left(e^{\,|s\log s|}\right) .$$

Für ζ verwenden wir die im Beweis zu Satz 5.2 hergeleitete Integralformel und erhalten

$$|(s-1)\zeta(s)| = |s - (s-1)s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}dx| = O\left(|s|^2\right) .$$

Die Abschätzung

$$\left|s\pi^{-s/2}\right| \leq e^{C|s|}$$

führt insgesamt zu

$$|\xi(s)| \ll e^{|s\log s|}\cdot |s|^2 e^{C|s|} \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}} .$$

Uns ist bereits bekannt, dass $\xi(s)$ außerhalb $0 \leq Re\ s \leq 1$ keine Nullstellen besitzt. Außerdem ist ξ ganz und von Ordnung 1. Wegen $\zeta(s) \to 1$ für $s \to \infty$, $s \in \mathbb{R}$, bekommen wir aus der Stirlingschen Formel

$$\xi(s) > \pi^{-s/2}\cdot\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) > e^{\frac{1}{4}s\log s} .$$

Damit folgt aus Lemma 6.3, dass $\sum|\rho|^{-1}$ divergiert. Also ist (ii) gezeigt, und es gibt unendlich viele $\rho \in \mathcal{N}$. Nach Satz 6.2(ii) gilt auch (iii). Der Produktsatz 6.3 liefert wegen $\xi(0) \neq 0$ die Behauptung (i), allerdings zunächst nur mit dem Faktor e^{A+Bs} anstelle von e^{Bs}. Dann gilt aber unter Verwendung der Funktionalgleichung

$$e^A = \xi(0) = \xi(1) = \left(\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)\right)\cdot\pi^{-1/2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 ,$$

also $A = 0$. Dies vervollständigt den Beweis des Satzes.

$\square$

7 Nullstellen von ζ und logarithmische Ableitung

Wir hatten schon früher gesehen, dass ζ'/ζ für die Primzahlverteilung eine wichtige Funktion ist. Wir werden nun ζ'/ζ mit den Nullstellen von ζ in Beziehung setzen. Wir verwenden im Folgenden die Abkürzung

$$\sum_\rho := \lim_{x\to\infty} \sum_{|\rho|\le x} ,$$

wobei $\rho \in \mathcal{N}$ wieder die Nullstellen von ζ bezeichne.

Lemma 7.1

Für die Konstante B aus Satz 6.4 gilt

$$B = -\sum_\rho \frac{1}{\rho} .$$

Beweis:

Aus Satz 6.4 folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{\xi}(s) = (\log \xi(s))' &= \left(Bs + \sum_{\rho\in\mathcal{N}} \left(\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho}\right)\right)' \\ &= B + \sum_{\rho\in\mathcal{N}} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) . \qquad (7.1) \end{aligned}$$

Dies ist eine Partialbruchzerlegung von ξ'/ξ. Andererseits impliziert die Funktionalgleichung für ξ, dass

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = (\log \xi(s))' = (\log \xi(1-s))' = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s) .$$

Also gilt auch

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = -B - \sum_{\rho\in\mathcal{N}} \left(\frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) .$$

Behauptung: $\rho \in \mathcal{N} \Longrightarrow \overline{\rho} \in \mathcal{N}$.

Wir verwenden die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} s^{-s-1} dx \quad (Re\ s > 0)\ .$$

Wegen

$$\begin{aligned} x^{\overline{z}} &= e^{(Re\ z - i\ Im\ z)\log x} = e^{Re\ z \cdot \log x} \cdot \overline{e^{i\ Im\ z \cdot \log x}} \\ &= \overline{e^{(Re\ z + i\ Im\ z)\log x}} = \overline{x^z} \end{aligned}$$

folgt aus $\rho \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \zeta(\overline{\rho}) &= \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}-1} - \overline{\rho} \int_1^\infty \{x\} \overline{x^{-\rho-1}} dx = \overline{\frac{\rho}{\rho-1} - \rho \int_1^\infty \{x\} x^{-\rho-1} dx} \\ &= \overline{\zeta(\rho)} = 0\ . \end{aligned}$$

Wegen $0 \le Re\ \rho \le 1$ für $\rho \in \mathcal{N}$ folgt außerdem

$$0 \le \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} = \frac{2Re\ \rho}{\rho\overline{\rho}} \le \frac{2}{|\rho|^2}\ .$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{|\rho| \le x} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{2} \sum_{|\rho| \le x} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} \right) \\ &\le \frac{1}{2} \sum_{|\rho| \le x} \frac{2}{|\rho|^2} = \sum_{|\rho| \le x} \frac{1}{|\rho|^2}\ . \end{aligned}$$

Nach Satz 6.4(iii) ist also $\sum \frac{1}{\rho}$ (in dieser Anordnung) konvergent, nach Satz 6.4(ii) aber nicht absolut konvergent.

Subtrahieren wir die beiden Formeln für ξ'/ξ, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2B &= -2\sum_\rho \frac{1}{\rho} - \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} - \sum_\rho \frac{1}{1-\rho-s} \\ &= -2\sum_\rho \frac{1}{\rho}\ , \end{aligned}$$

denn nach Funktionalgleichung ist mit ρ auch $1-\rho$ eine Nullstelle.

Bemerkung:

Wir weisen nochmal darauf hin, dass Lemma 7.1 nur für die eingangs definierte „symmetrische“ Summation gilt, während die Summation „$\rho \in \mathcal{N}$“ in (7.1) beliebig ist.

Wir wollen ζ'/ζ im kritischen Streifen durch einen Abschnitt seiner Partialbruchzerlegung (7.1) approximieren. Dazu die folgenden Hilfssätze.

Lemma 7.2

Es gibt eine Konstante $k > 0$ derart, dass in $Re\ s \geq -5$, $|Im\ s| > 1$ gilt

$$|\zeta(s)| \ll |Im\ s|^k \ .$$

Beweis:

In $Re\ s > 2$ ist $|\zeta(s)| \leq \zeta(2) = O(1)$. Für $Re\ s \geq 1/2$ hatten wir im Beweis zu Satz 6.4 mit der Integraldarstellung von ζ gezeigt

$$|(s-1)\zeta(s)| = O(|s|^2) \ .$$

Wegen $|Im\ s| > 1$ ist $|s-1| > 1$. Für $1/2 \leq Re\ s \leq 2$ folgt damit

$$|\zeta(s)| = O(|Im\ s|^2) \ .$$

Aus der Funktionalgleichung für ζ (Satz 5.2) und der Legendre-Verdopplungsformel (Korollar 4.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\zeta(1-s) &= \pi^{-\frac{s}{2}}\ \pi^{\frac{1}{2}(1-s)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)} \cdot \zeta(s) \\
&= \pi^{-s+\frac{1}{2}} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{1-s}\ \Gamma(s) \cdot \cos\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s) \\
&= 2^{1-s}\ \pi^{-s} \cos\frac{\pi s}{2}\ \Gamma(s)\zeta(s) \ .
\end{aligned}$$

Wir wollen darin die rechte Seite abschätzen. Wegen

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z \quad , \quad e^{-zi} = \cos z - i \sin z$$

folgt für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}) \ ,$$

also

$$\left|\cos \frac{\pi s}{2}\right| \le \left|e^{\frac{\pi s i}{2}}\right| + \left|e^{-\frac{\pi s i}{2}}\right| \ll e^{|Re \frac{\pi s i}{2}|} = e^{\frac{\pi}{2}|Im\ s|} \ .$$

Zur Abschätzung von $\Gamma(s)$ verwenden wir natürlich die Stirling-Formel (in abgeschwächter Form)

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + O(1) \ .$$

Wir setzen $s = \sigma + it$. Dann gilt für $|\sigma| \le 5$

$$\begin{aligned} \log s &= \log it \left(1 + \frac{\sigma}{it}\right) = \log(\pm i) + \log |t| + \log \left(1 + \frac{\sigma}{it}\right) \\ &= \pm \frac{\pi i}{2} + \log |t| + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} Re\ \log\ \Gamma(s) &= Re \left(\left(it + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\right) \left(\pm \frac{\pi i}{2} + \log |t| + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)\right) - \sigma + O(1) \\ &= -\frac{\pi}{2}|t| + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \log |t| + O(1) \ . \end{aligned}$$

Das liefert

$$|\Gamma(s)| = e^{Re\ \log\ \Gamma(s)} \ll e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \cdot |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} \ .$$

Wegen $|2^{1-s}| = 2^{1-\sigma}$ und $|\pi^{-s}| = \pi^{-\sigma}$ erhalten wir für $|\sigma| = |Re\ s| \le 5$

$$|\zeta(1-s)| \ll |Im\ s|^{\sigma - \frac{1}{2}}\ |\zeta(s)| \ .$$

Da wir die Behauptung für $Re\ s \ge \frac{1}{2}$ bereits bewiesen haben, folgt sie damit auch für $-5 \le Re\ s \le \frac{1}{2}$.

$\square$

Lemma 7.3

Für $N(T) = \sharp\{\rho \in \mathcal{N} : \quad 0 < Im\ \rho \leq T\}$ gilt

(i) $N(T+1) - N(T-1) \ll \log T$;

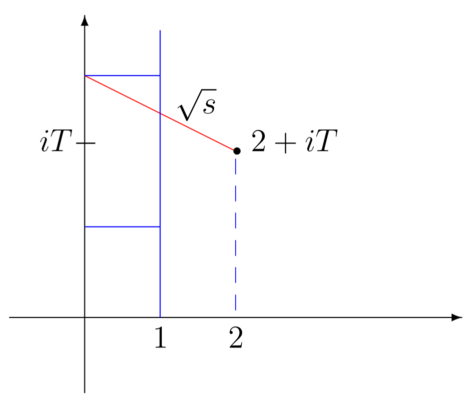
(ii) $N(T) \ll T \log T$.

<u>**Beweis:**</u>

Wir wählen einen Radius r, $3 \leq r \leq 4$ derart, dass

$$\zeta(2 + iT + re(\vartheta)) \neq 0 \quad (\vartheta \in \mathbb{R}) \ ,$$

d.h. auf dem Kreis um $2 + iT$ mit Radius r liegt keine Nullstelle von ζ. Das ist möglich, da die Nullstellen von ζ nirgends dicht liegen.



Für jedes $\rho \in \mathcal{N}$ sei $\rho' := \rho - 2 - iT$. Nach der Jensenschen Formel Satz 6.1 gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log|\zeta(2+iT+re(\vartheta))|d\vartheta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\zeta(2+iT+re^{i\eta})|d\eta \\ &= \log|\zeta(2+iT)| + \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |\rho'|\leq r}} \log\frac{r}{|\rho'|} \ . \end{aligned}$$

Das Integral wie auch $\log|\zeta(2+iT)|$ lassen sich mit Lemma 7.2 zu $O(\log T)$ abschätzen. Andererseits hat jedes $\rho \in \mathcal{N}$ mit $|Im\ \rho - T| \leq 1$ von $2+iT$ höchstens den Abstand $\sqrt{5}$.

Also wegen $r \geq 3$

$$\begin{aligned} N(T+1)-N(T-1) &= \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im\ \rho-T|\leq 1}} 1 \leq \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |\rho-(2+iT)|\leq\sqrt{5}}} 1 = \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |\rho'|\leq\sqrt{5}}} 1 \\ &\leq \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |\rho'|\leq\sqrt{5}}} 4\cdot\log\frac{r}{|\rho'|} \ll \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |\rho'|\leq r}} \log\frac{r}{|\rho'|} \\ &\ll \log T\ . \end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen. Aussage (ii) folgt sofort wegen

$$\begin{aligned} N(T) &\leq \sum_{t=0}^{[T]} (N(t+1)-N(t)) \\ &\ll \sum_{t=0}^{[T]} \log t \ll T\log T\ . \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

Teil (ii) ist eine sehr schwache Version des noch vor uns liegenden Satzes von v. Mangoldt.

Satz 7.1

Es gilt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im\ (s-\rho)|<1}} \frac{1}{s-\rho} + O(1+\log|s|) & \text{für} \quad -1\leq Re\ s\leq 2\ , |Im\ s|\geq 1\ , \\ O(1) & \text{für} \quad Re\ s\geq 2\ , \\ O(\log|s|) & \text{für} \quad Re\ s\leq -1\ , |s+2m|>1/4\ (m\in\mathbb{N})\ . \end{cases}$$

Beweis:

Wir hatten in Paragraph 3 gezeigt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$. Daraus folgt für $Re\ s\geq 2$

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < \infty\ .$$

In $Re\ s \leq -1$ verwenden wir erneut die schon im Beweis zu Lemma 7.2 benutzte Form der Funktionalgleichung für ζ

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\,\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(s)\zeta(s)\ .$$

Logarithmisches Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) &= (\log\zeta(1-s))' \\ &= -\log 2 - \log\pi - \frac{\sin\frac{\pi}{2}s}{\cos\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\ &= -\log 2\pi - \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi s}{2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ . \end{aligned}$$

Aus $e^{zi} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-zi} = \cos z - i\sin z$ folgt für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}) \quad , \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi})\ ,$$

also

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}\ .$$

Klar ist $|e^{zi}| = |e^{-zi}|^{-1}$. Ist also etwa $\left|e^{\frac{\pi s i}{2}}\right| \geq 1$, so gilt

$$\left|\tan\frac{\pi s}{2}\right| = \left|\frac{1 - e^{-\pi s i}}{1 + e^{-\pi s i}}\right| \leq \frac{2}{|1 + e^{-\pi s i}|}\ .$$

Der Nenner wird 0 für $s = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$, d.h. für $1 - s = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}$. Aber nach Voraussetzung ist $|s - (-2m)| > 1/4$. Somit ist

$$\left|\tan\frac{\pi s}{2}\right| \ll 1\ .$$

(Die Bedingung $|s+2m| = |s-(-2m)| > 1/4 \quad (m \in \mathbb{N})$ besagt, dass s die Nullstellen $-2m,\ m \in \mathbb{N}$, von ζ vermeidet.) Mit der Stirling-Formel für Γ'/Γ folgt

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s)\right| \ll \log|s|\ ,$$

also

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \ll \log|1-s| \ll \log|s|\ .$$

Es bleibt der Fall $-1 \le Re\ s \le 2, \quad |Im\ s| \ge 1$. O.B.d.A. sei $s = \sigma + it$ mit $t \ge 1$. Nach Definition von ξ ist mit der Stirling-Formel

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'}{\xi}(s) &= (\log \xi(s))' = \left(\log \left(s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\right)\right)' \\
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\
&= \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\log t) \ .
\end{aligned}$$

Mit (7.1) folgt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho\in\mathcal{N}}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log t) \ .$$

Speziell für $s = 2 + it$ haben wir mit $\rho' := 2 + it - \rho$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = \sum_{\rho\in\mathcal{N}}\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log t) \ .$$

Da

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} = O(1) \ ,$$

erhalten wir nach Subtraktion der beiden Formeln

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho\in\mathcal{N}}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) + O(\log t) \ .$$

Wir schätzen nun in dieser Identität alle Terme ab, die in der zu beweisenden Formel nicht vorkommen.

Sei zunächst $|Im(s-\rho)| = |Im\ \rho - t| \ge 1$. Es gilt wegen $-1 \le \sigma \le 2, \quad 0 \le Re\ \rho \le 1$

$$|s-\rho| \ll |t - Im\ \rho| \ll |s-\rho| \ .$$

Also ist

$$\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)} = O\left(\frac{1}{(t-Im\ \rho)^2}\right) \ .$$

Wir erhalten mit Lemma 7.3(i) für $n \in \mathbb{Z}, \quad n \ne 0, \quad n \ne -1$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{\rho \\ t+n\le Im\ \rho\le t+n+1}}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\right| &\ll \sum_{\substack{\rho \\ t+n\le Im\ \rho\le t+n+1}}\frac{1}{(t-Im\ \rho)^2} \\
&\le \frac{1}{n^2}(N(t+n+1) - N(t+n)) \\
&\ll \frac{\log|t+n|}{n^2} \ .
\end{aligned}$$

Summation über n gibt

$$\sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho - t| \geq 1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log|n+t|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log t}{n^2}$$
$$\ll \log t \ .$$

Nun bleibt der Beitrag $1/\rho'$ mit $|Im\ \rho - t| \leq 1$. Klar ist $|1/\rho'| \leq 1$, und nach Lemma 7.3(i) ist dann

$$\sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho - t| \leq 1}} \frac{1}{|\rho'|} \leq N(t+1) - N(t) \ll \log t \ .$$

Also ergibt sich zusammen

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{N} \\ |Im(s-\rho)| \leq 1}} \frac{1}{s-\rho} + O(\log t) \ ,$$

womit die erste Formel und damit alle drei Formeln von Satz 7.1 gezeigt sind.

$\square$

Bemerkungen:

(i) Die benutzte Methode liefert auch eine verwandte Abschätzung, die wir implizit mitbewiesen haben, nämlich

$$\sum_{\rho \in \mathcal{N}} \frac{1}{1 + (t - Im\ \rho)^2} \ll \log t \ .$$

(ii) Auf die Voraussetzung $|Im\ s| \geq 1$ kann wegen des Pols von $\zeta(s)$ bei $s = 1$ nicht verzichtet werden. Wird eine für alle t gültige Abschätzung benötigt, so ist die Polstelle entsprechend zu berücksichtigen. Die obige Methode liefert dann

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{1-s} + \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{N} \\ |Im(\rho - s)| < 1}} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(2 + |t|)) \ .$$

8 Die explizite Formel

Die schon erwähnte explizite Formel zeigt klar den unmittelbaren Zusammenhang zwischen Primzahlen und Nullstellen der Zetafunktion. Für uns ist sie außerdem die Grundlage zum Beweis des Primzahlsatzes. Wir werden die explizite Formel nicht für $\pi(x)$ direkt, sondern für die schon genannte Funktion

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

herleiten, was zu einer etwas übersichtlicheren Darstellung führt. Wir definieren noch

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Außerdem setzen wir

$$\langle x \rangle := \min\{|x - p^k| : p \in \mathbb{P},\ k \in \mathbb{N},\ p^k \neq x\}.$$

Satz 8.1 (Approximative explizite Formel)

Für $x > 2$ und $T > 1$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x,T)\ ,$$

wobei

$$R(x,T) \ll \frac{x}{T}(\log xT)^2 + \log x \cdot \min\left(1, \frac{x}{T\,\langle x \rangle}\right).$$

<u>**Beweis:**</u>

Wir verwenden die Perronsche Formel und den Residuensatz. Nach Satz 3.5 gilt für $x \notin \mathbb{Z}$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

Hier soll die Integrationsgerade (2) nach links verschoben werden. Die dabei zu berücksichtigenden Residuen ergeben gerade die rechte Seite unserer Formel. Wir werden diese einfache Beweisidee im Folgenden präzisieren. Wir setzen $c = 1 + (\log x)^{-1}$, also gilt $x^c = ex$. Mit $y = x/n$ folgt aus der Perronschen Formel (Lemma 3.1)

$$\begin{aligned}
\left|\psi_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}ds\right| &= \left|\psi_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\cdot\frac{x^s}{s}ds\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\cdot\delta\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_{n-1}^{\infty}\Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)(\delta(y) - I(y,T))\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)|\delta(y) - I(y,T)| \\
&< \sum_{\substack{n=1\\ n\neq x}}^{\infty}\left(\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^c\cdot\min\left(1, \frac{1}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right)\right) + \Lambda([x])\cdot\frac{c}{T},
\end{aligned}$$

wobei der letzte Term nur für $x \in \mathbb{N}$ auftritt. Wir schätzen die Summe über n ab, indem wir sie in drei Teile zerlegen. Zunächst untersuchen wir den Beitrag der Terme mit $n \notin \left[\frac{1}{2}x, 2x\right]$. Dann ist $\left|\log\frac{x}{n}\right| \gg 1$, und der Gesamtbeitrag ist damit

$$\begin{aligned}
\sum_{n\notin\left[\frac{1}{2}x,2x\right]} &\ll \frac{x}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c} = \frac{x}{T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right)\right| \\
&\ll \frac{x}{T}\log x,
\end{aligned}$$

denn

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \cdots.$$

Als nächstes betrachten wir diejenigen n mit $n \in \left(\frac{1}{2}x, 2x\right)$. Wir setzen

$$x_1 := \max\{p^k : \quad p^k < x\}.$$

Ist $x_1 \leq \frac{1}{2}x$, so ist $\Lambda(n) = 0$ für alle $n \in \left(\frac{1}{2}x, 2x\right)$, und der Gesamtbeitrag zur fraglichen Summe ist 0. Also nehmen wir an $x_1 > \frac{1}{2}x$. Wir untersuchen den Term

$n = x_1$ allein. Es gilt

$$\log \frac{x}{x_1} = -\log\left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right) \geq \frac{x - x_1}{x} \geq \frac{\langle x \rangle}{x},$$

also

$$\Lambda(x_1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^c \cdot \min\left(1, \frac{1}{T \log \frac{x}{x_1}}\right) \ll \log x \cdot \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right).$$

Für die $n \in \left(\frac{1}{2}x, x_1\right)$ setzen wir $n = x_1 - \nu$. Dann ist $1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}x$. Ferner gilt

$$\log \frac{x}{n} \geq \log \frac{x_1}{n} = -\log\left(1 - \frac{\nu}{x_1}\right) \geq \frac{\nu}{x_1},$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1}{2}x < n < x_1} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left(1, \frac{1}{T\left|\log \frac{x}{n}\right|}\right) &\ll \sum_{\nu \leq \frac{1}{2}x} \Lambda(x_1 - \nu)\frac{x_1}{T\nu} \\ &\ll \frac{x}{T}(\log x)^2. \end{aligned}$$

Für die $n \in (x, 2x)$ kommt auf analogem Wege dieselbe Abschätzung heraus. Wir erhalten zusammen

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x}{T}(\log x)^2 + \log x \cdot \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right)\right).$$

Dieser erste Schritt des Beweises lieferte also eine approximative Version von Satz 3.5. Wir werden nun mit Hilfe des Residuensatzes das Integral behandeln.

Ist ω eine Nullstelle von $\zeta(s)$, d.h. $\omega \in \mathcal{N}$oder $\omega = -2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so besitzt $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ bei ω einen einfachen Pol mit Residuum 1. Also gilt

$$Res_{s=\omega}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \cdot \frac{x^s}{s} = \frac{x^\omega}{\omega}.$$

Außerdem ist klar

$$Res_{s=0}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} = \frac{\zeta'}{\zeta}(0),$$

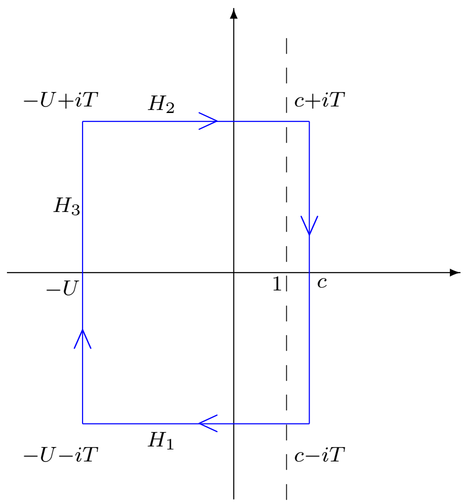
$$Res_{s=1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} = -x$$

(wegen $\zeta(s) = -\frac{1}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \cdots$).

Wir wählen im Folgenden T stets so, daß $T \neq Im\rho$ für alle $\rho \in \mathcal{N}$. Sei außerdem

$U \in \mathbb{N},\ 2 \nmid U$. Wir werden den Residuensatz auf den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-U \pm iT$ und $c \pm iT$ an. Wir setzen

$$I_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_j} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds.$$



Dann folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds = -x + \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_{m \le \frac{1}{2}U} \frac{x^{-2m}}{-2m} + \sum_{j=1}^{3} I_j \quad .$$

<u>Zu I_3:</u>

Mit Satz 7.1 folgt sofort

$$|I_3| \le \int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right| \cdot \frac{x^{-U}}{|s|} dt \ll \log U \cdot \frac{x^{-U}}{U} \cdot T$$

für $U \to \infty$ bei festem T.

<u>Zu I_1, I_2:</u>

Die Abschätzung dieser Integrale ist schwieriger, da H_1 bzw. H_2 dicht an den Polen erster Ordnung bei $s = \rho \in \mathcal{N}$ vorbeilaufen können. Diese Situation soll möglichst vermieden werden. Dazu verwenden wir Lemma 7.3. Danach gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ höchstens $O(\log n)$ Nullstellen $\rho \in \mathcal{N}$ mit $n < Im\ \rho < n+1$. Also existiert ein $T_n \in (n, n+1]$ derart, daß $|Im\ \rho - T_n| \gg (\log T_n)^{-1}$ für alle $\rho \in \mathcal{N}$. Wir bezeichnen die Menge aller dieser T_n mit $\mathcal{T}$. Für $s = \sigma + iT$ mit $T \in \mathcal{T}$ und $-1 \leq \sigma \leq 2$ folgt dann nach Satz 7.1 und nochmals Lemma 7.3

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \ll \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{N} \\ |Im\ \rho - T| < 1}} \frac{1}{|s-\rho|} + O(\log T) \ll (\log T)^2 \quad .$$

Wir verwenden dies in $-1 \leq \sigma \leq 2$ und Satz 7.1 in $\sigma < -1$. Dann kommt für $U \to \infty$

$$\begin{aligned}
|I_1| + |I_2| &\ll \int_{-1}^{c} (\log T)^2 \left|\frac{x^s}{s}\right| d\sigma + \int_{-U}^{-1} \log|s| \cdot \left|\frac{x^s}{s}\right| d\sigma \\
&\ll \frac{(\log T)^2}{T} \int_{-1}^{c} x^\sigma d\sigma + \frac{\log T}{T} \int_{-U}^{-1} x^\sigma d\sigma \\
&\ll \frac{(\log T)^2}{T} \int_{-\infty}^{c} x^\sigma d\sigma \\
&= \frac{(\log T)^2}{T} \cdot \frac{e^{c \log x}}{\log x} \ll \frac{(\log T)^2}{T} \cdot \frac{x}{\log x}.
\end{aligned}$$

Dies gilt gleichmäßig in U und für alle $T \in \mathcal{T}$. Wegen $I_3 \to 0$ für $U \to \infty$ erhalten wir insgesamt für $T \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= x - \sum_{\substack{\rho \\ |Im \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_m \frac{x^{-2m}}{2m} + O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^2 + \log x \cdot \min\left(1, \frac{x}{T\langle x \rangle}\right)\right) \\
&= x - \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1-x^2) + R(x,T)\,.
\end{aligned}$$

Ist nun $T > 1$ beliebig, so existiert nach Konstruktion ein $T_n \in \mathcal{T}$ mit $|T - T_n| < 1$. Der Übergang von T zu T_n hat auf $R(x,T)$ keinen nennenswerten Einfluß, wohl aber auf die Summe $\sum_\rho x^\rho/\rho$. Nach Lemma 7.3(i) gilt allerdings

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho| < T_n}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| &\leq \left| \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho - T| < 1}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \frac{x^{Re\ \rho}}{T} \sum_{\substack{\rho \\ |Im\ \rho - T| < 1}} 1 \\
&\ll \frac{x}{T} \log T \quad .
\end{aligned}$$

Dieser Beitrag läßt sich in $R(x,T)$ unterbringen. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

□

Korollar 8.1 (Explizite Formel)

Für $x > 2$ gilt

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho \in \mathbb{N}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2).$$

Beweis:

Bei festem x gilt $R(x,T) \to 0$ für $T \to \infty$.

□

9 Der Primzahlsatz

Der Primzahlsatz in der Form

$$\psi(x) \sim x$$

(was zu $\pi(x) \sim x/\log x$ äquivalent ist) folgte sofort aus der expliziten Formel, falls wenigstens

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = o(x)$$

gezeigt werden könnte. Hätten wir $Re\ \rho \leq 1 - \delta$ für ein festes $\delta > 0$ und alle $\rho \in \mathcal{N}$, so ließe sich leicht ein strengeres Resultat ableiten. Die Riemannsche Vermutung, d.h. $\delta = 1/2$, wäre die Grenze und lieferte den bestmöglichen Fehlerterm zum Primzahlsatz (denn wie wir wissen hat ζ unendlich viele Nullstellen im kritischen Streifen, und diese liegen wegen der Funktionalgleichung „mindestens“ bei $Re\ s = 1/2$). Leider hängt bei allen bekannten Ergebnissen über nullstellenfreie Bereiche von ζ im kritischen Streifen δ immer von $Im\ \rho$ ab, und zwar in der Form $\delta \to 0$ mit $Im\ \rho \to \infty$.

Lemma 9.1

Es gibt eine positive Konstante C derart, daß für alle $\rho \in \mathcal{N}$ gilt

$$Re\ \rho < 1 - C \cdot \min\left(1, \frac{1}{\log(Im\ \rho)}\right).$$

<u>**Beweis:**</u>

Es gilt für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ wegen $\cos 2\delta = 2\cos^2\delta - 1$

$$0 \leq 2(1 + \cos\vartheta)^2 = 3 + 4\cos\vartheta + \cos 2\delta.$$

Mit $\vartheta := t\log n$ folgt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}(3 + 4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n)) \\ &= Re\left(-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right), \end{aligned} \tag{9.1}$$

denn

$$\begin{aligned} Re\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) &= Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\cdot Re\left(e^{-it\log n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\cos(t\log n). \end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, daß $1 < Re\ s < 2$ und $Im\ s > 1$. Dann liefert Satz 7.1

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im(s-\rho)|<1}}\frac{1}{s-\rho} + O(\log|s|).$$

Wegen $Re\ s > 1$ ist $Re(s-\rho) > 0$, also auch $Re(s-\rho)^{-1} > 0$. Durch Weglassen negativer Summanden gilt demnach für jedes $\rho_1 \in \mathcal{N}$ mit $|Im(s-\rho_1)| < 1$ und geeignetes $c > 0$

$$Re\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) < -Re\left(\frac{1}{s-\rho_1}\right) + c\log|s|.$$

Ist c hinreichend groß gewählt, so gilt für $1 < \sigma < 2$ wegen des einfachen Pols von $\frac{\zeta'}{\zeta}$ bei $s = 1$ mit Residuum 1

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma-1} + c.$$

Sei nun $\rho \in \mathcal{N}$ beliebig. Wir setzen $Im\ \rho = t = Im\ s$ und nehmen wegen der Symmetrie der Nullstellen $\rho \in \mathcal{N}$ o.B.d.A. $t > 0$ an.

<u>1.Fall:</u> $t > 1$.

Wegen $\sigma > 1$ ergeben die obigen Überlegungen für ein geeignetes $C > 0$

$$0 \le \frac{3}{\sigma-1} - 4\cdot Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) + C\log(t+2),$$

wobei $Im(s-\rho) = 0$. Für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $Re\ z > 0$ gilt

$$Re\frac{1}{z} = Re\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{Re\ z}{|z|^2} = \frac{1}{Re\ z + \dfrac{(Imz)^2}{Rez}}.$$

Wegen $Im(s-\rho) = 0$ folgt mit $z = s-\rho$

$$\frac{4}{\sigma - Re\ \rho} \le \frac{3}{\sigma-1} + C\log(t+2).$$

Mit der Wahl $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t+2)}$, $\quad \delta > 0$, kommt

$$\sigma - Re\ \rho \geq 4 \cdot \frac{\delta}{(3+\delta C)\log(t+2)},$$

also

$$Re\ \rho < 1 + \frac{\delta}{\log(t+2)} - \frac{4\delta}{(3+\delta C)\log(t+2)}.$$

Setzen wir noch $\delta := 1/3C$, so haben wir

$$Re\ \rho < 1 - \frac{1}{15C\log(t+2)},$$

womit das Lemma in diesem Fall bewiesen ist.

<u>2.Fall:</u> $\quad 0 < t \leq 1$.

Tatsächlich tritt dieser Fall gar nicht auf, was sich auch aus früheren Ergebnissen, nämlich der Kenntnis von B in §7 herleiten ließe. Wir gehen anders vor. Wir zeigen zunächst,daß

$$\zeta(1+it) \neq 0$$

für alle $0 < t \leq 1$. Angenommen $t_0 \in (0,1]$ sei maximal mit $\zeta(1+it_0) = 0$. Dann ist $\zeta(1+2it_0) \neq 0$, denn $2t_0 > 1$ (da sonst t_0 nicht minimal wäre), aber dort hat ζ keine Nullstelle nach dem 1.Fall. Wir haben also für $\sigma \to 1^+$

$$Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it_0) \sim \frac{1}{\sigma - 1},$$

hingegen für $\sigma \to 1^+$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it_0) = O(1).$$

Aus dem 1.Fall wissen wir außerdem

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + C.$$

Damit liefert (9.1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq Re\left(-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it_0) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it_0)\right) \\ &\leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - 1} + O(1) = -\frac{1}{\sigma - 1} + O(1), \end{aligned}$$

d.h. einen Widerspruch für $\sigma \to 1^+$. Also gilt $\zeta(1+it) \neq 0$ für alle $t \in (0,1]$. Da $\zeta(s)$ in $0 \leq Re\ s \leq 1, \quad 0 \leq Im\ s \leq 1$ nur endlich viele Nullstellen ρ haben kann, gibt es somit ein $c > 0$ derart, daß $Re\ \rho < 1 - c$. Damit ist das Lemma auch im 2.Fall gezeigt.

□

Wir sind nun in der Lage, eine erste Version des Primzahlsatzes zu beweisen.

Satz 9.1

Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$\psi(x) = x + O\left(x \cdot e^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

<u>Beweis:</u>

Aus Lemma 7.3(i) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{|Im\ \rho|<T} \frac{1}{|\rho|} &\ll \sum_{t=1}^{[T]+1} \sum_{t-1<Im\ \rho\leq t} \frac{1}{|\rho|} \ll \sum_{t=1}^{[T]+1} \frac{1}{t}(N(t)-N(t-1)) \\ &\ll \sum_{t=1}^{[T]+1} \frac{\log t}{t} \ll (\log T)^2.\end{aligned}$$

Mit Lemma 9.1 folgt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{|Im\ \rho|<T} \frac{x^\rho}{\rho}\right| &\leq \sum_{|Im\ \rho|<T} \frac{x^{Re\ \rho}}{|\rho|} \\ &\leq x^{1-\frac{C}{\log T}} \sum_{|Im\ \rho|<T} \frac{1}{|\rho|} \ll x^{1-\frac{C}{\log T}} (\log T)^2.\end{aligned}$$

Wir setzen dies in die approximative explizite Formel (Satz 8.1) ein und erhalten für $x \in \mathbb{N}$ wegen $\langle x \rangle \geq 1$ und $\psi_0(x) = \psi(x) + O(\log x)$

$$\psi(x) = x + O\left(1 + x^{1-\frac{C}{\log T}} + \frac{x}{T}(\log xT)^2\right).$$

Balancieren der beiden letzten Summanden legt die Wahl $\log x \approx (\log T)^2$ nahe, also setzen wir $T = e^{\sqrt{\log x}}$, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

In der klassischen Form lautet die Aussage von Satz 9.1:

Satz 9.2 (Primzahlsatz)

Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

Beweis:

Wir haben einerseits

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} &= \sum_{p^k\le x} \frac{\log p}{\log p^k} = \sum_{p^k \le x} \frac{1}{k} \\
&\le \sum_{p\le x} 1 + \sum_{p\le\sqrt{x}} \sum_{k\le \frac{\log x}{\log p}} \frac{1}{k} \\
&= \pi(x) + O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}} \log x\right) \\
&= \pi(x) + O(\log x \cdot \pi(\sqrt{x})) \\
&= \pi(x) + O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Tschebyscheff. Andererseits kommt mit partieller Summation und Satz 9.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} &= \left(\sum_{n\le x} \Lambda(n)\right) \cdot \frac{1}{\log x} - \int_2^x \left(\sum_{n\le t} \Lambda(n)\right) \left(\frac{1}{\log t}\right)' dt \\
&= \frac{\psi(x)}{\log x} \int_2^x \frac{\psi(t)}{t(\log t)^2} dt \\
&= \frac{x}{\log x} + \int^x \frac{t\ dt}{t(\log t)^2} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}} + \int^x e^{-c\sqrt{\log t}} dt\right).
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{t\ dt}{t(\log t)^2} &= t \cdot \left(-\frac{1}{\log t}\right)\Big|_2^x + \int_2^x \frac{dt}{t(\log t)} \\ &= -\frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(1)\,.\end{aligned}$$

Für das Integral im Restterm gilt

$$\begin{aligned}\int_2^x e^{-c\sqrt{\log t}} dt &= \int_2^{x^{1/4}} e^{-c\sqrt{\log t}} dt + \int_{x^{1/4}}^x e^{-c\sqrt{\log t}} dt \\ &\ll x^{1/4} + e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}} \cdot x \\ &\ll x \cdot e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\,.\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} + O(\sqrt{x}) \\ &= \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x e^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right)\,.\end{aligned}$$

□

<u>**Bemerkung:**</u>

Die schärfste Form des Restgliedes beim Primzahlsatz ist vom Typ

$$O_\varepsilon \left(x e^{-(\log x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}}\right)$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Dies geht zurück auf das „größte“ nullstellenfreie Gebiet, das bislang bekannt ist: Für die $\rho \in \mathcal{N}$ gilt bei hinreichend großem $Im\ \rho$

$$Re\ \rho < 1 - \frac{1}{(\log Im\ \rho)^\vartheta}$$

für beliebiges $\vartheta > 2/3$ (Korobov und Vinogradov unabhängig voneinander, 1958). Den engen Zusammenhang zwischen nullstellenfreiem Gebiet der Zetafunktion im kritischen Streifen und Restglied beim Primzahlsatz zeigt

Satz 9.3

Sei $0 \le \vartheta < 1$.

(i) $Re\ \rho \le \vartheta$ für alle $\rho \in \mathcal{N} \Longrightarrow \psi(x) = x + O(x^\vartheta (\log x)^2)$;

(ii) $\psi(x) = x + O(x^\vartheta) \Longrightarrow Re\ \rho \le \vartheta$ für alle $\rho \in \mathcal{N}$.

Beweis:

(i) $Re\ \rho \le \vartheta$ impliziert $|x^\rho| \le x^\vartheta$. Wie im Beweis zu Satz 9.1 erhalten wir daraus mit der expliziten Formel

$$\psi(x) - x \ll x^\vartheta (\log T)^2 + \frac{x}{T}(\log xT)^2 + 1 \ .$$

Mit $T = x^{1-\vartheta}$ folgt die Behauptung.

(ii) Wir schreiben $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$ und erhalten mit partieller Summation

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(n)}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}} dx = s \cdot \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx \ .
\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $\psi(x) = x + R(x)$ kommt

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= s \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} + s \cdot \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx \\
&= s \cdot \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_1^{\infty} + s \cdot \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx \\
&= \frac{s}{s-1} + s \cdot \int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx
\end{aligned}$$

für $Re\ s > 1$. Wegen $R(x) \ll x^\vartheta$ nach Voraussetzung konvergiert das Integral sogar für $Re\ s > \vartheta$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Damit hat ζ'/ζ

in $Re\ s > \vartheta$ nur bei $s = 1$ eine Singularität und ist sonst holomorph. Also muß $Re\ \rho \leq \vartheta$ für alle $\rho \in \mathcal{N}$ gelten.

□

Wir wissen, daß $|\mathcal{N}| = \infty$ ist. Wegen der Funktionalgleichung für ζ ist mit $\rho \in \mathcal{N}$ auch $1 - \rho \in \mathcal{N}$. Also gibt es unendlich viele $\rho \in \mathcal{N}$ mit $Re\ \rho \geq 1/2$. Aus Satz 9.3(ii) folgt, daß

$$\psi(x) = x + O(x^{\vartheta})$$

nur für $\vartheta \geq 1/2$ möglich ist, d.h. daß der Fehler $\sqrt{x}$ im Primzahlsatz nicht wesentlich unterschritten werden kann. Die Riemannsche Vermutung ist nun äquivalent dazu, daß die Primzahlen so gleichmäßig wie möglich verteilt sind. Es gilt nämlich

Korollar 9.1

Die Riemannsche Vermutung $Re\ \rho = 1/2$ für alle $\rho \in \mathcal{N}$ ist genau dann richtig, wenn für alle $\varepsilon > 0$

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) .$$

Beweis:

„$\Longrightarrow$“

$$Re\ \rho \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^2\right) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ nach Satz 9.3(i).

„$\Longleftarrow$“

$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$ impliziert $Re\ \rho \leq 1/2 + \varepsilon$ für alle ε, also $Re\ \rho \leq 1/2$, d.h. $Re\ \rho = 1/2$ nach Satz 9.3(ii) und Vorbemerkung.

□

10 Die vertikale Verteilung der Nullstellen von ζ

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir gesehen, daß die horizontale Verteilung der Nullstellen der Zetafunktion (im kritischen Streifen) die Regularität der Primzahlverteilung bestimmt (und umgekehrt). Für die vertikale Verteilung der $\rho \in \mathcal{N}$ genügte uns die Abschätzung

$$N(T+1) + N(T) \ll \log T$$

aus Lemma 7.3, woraus sich sofort

$$N(T) \ll T \log T$$

ergab. Totzdem ist eine möglichst genaue Kenntnis der vertikalen Verteilung der $\rho \in \mathcal{N}$ auch für deren horizontale Verteilung nützlich.

Satz 10.1

Für $T \notin \{Im\ \rho : \ \rho \in \mathcal{N}\}$ gilt

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right) ,$$

wobei

$$S(T) := \frac{1}{\pi} \int\limits_L Im \frac{\zeta'}{\zeta}(s) ds, \quad L := [2, 2+iT] \cup [2+iT, 1/2+iT] .$$

<u>**Beweis:**</u>

Die ξ-Funktion ist ganz mit genau den Nullstellen $\rho \in \mathcal{N}$. Ist etwa

$$\xi(s) = c_\nu (s-\rho)^\nu + \cdots ,$$

also

$$\xi'(s) = \nu c_\nu (s-\rho)^{\nu-1} + \cdots ,$$

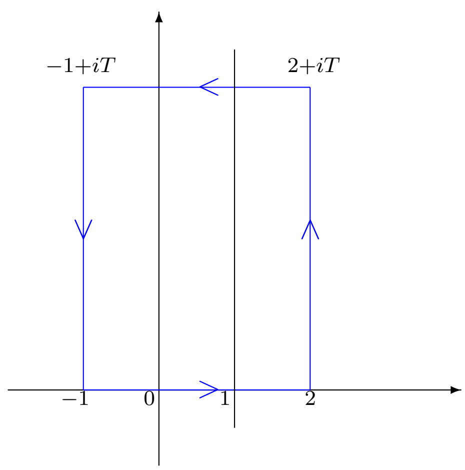
so folgt

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = \frac{\nu}{s-\rho} + \cdots \ ,$$

d.h. $Res_\rho \frac{\xi'}{\xi}(s)$ ist die Vielfachheit der Nullstelle ρ. Somit hat ξ'/ξ genau die einfachen Pole $\rho \in \mathcal{N}$, wobei das Residuum jeweils die zugehörige Vielfachheit angibt. Ist nun $T \notin \{Im\ \rho :\ \ \rho \in \mathcal{N}\}$ und bezeichnet R den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-1,\ 2,\ 2+iT,\ -1+iT$ (positiv orientiert), so folgt nach dem Residuensatz

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_R \frac{\xi'}{\xi}(s)ds \ .$$

(Dieses Integral liefert bekanntlich im Allgemeinen die Nullstellenanzahl vermindert um die Polstellenanzahl innerhalb R, mit Vielfachheiten.)



Da $N(T)$ reell ist, muß gelten

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} Im \left(\int\limits_R \frac{\xi'}{\xi}(s)ds \right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_R Im \frac{\xi'}{\xi}(s)ds \ .$$

Es ist $\xi(s) \in \mathbb{R}$ für $s \in \mathbb{R}$, also gilt dies auch für ξ'/ξ. Daher ist

$$\int\limits_{-1}^{2} Im \frac{\xi'}{\xi}(s)ds = 0 \ .$$

Wegen der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ haben wir $\xi'(s) = -\xi'(1-s)$, also $\frac{\xi'}{\xi}(s) = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s)$.

Damit bekommen wir nach Substitution $s \to 1-s$

$$\begin{aligned} \int_{-1+iT}^{-1} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds &= -\overline{\int_{2+iT}^{2} \frac{\xi'}{\xi}(s)\cdot(-ds)} = -\int_{2}^{2-iT} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds \\ &= -\overline{\int_{2}^{2+iT} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds} \ , \end{aligned}$$

also

$$Im\left(\int_{-1+iT}^{-1} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds\right) = Im\left(\int_{2}^{2+iT} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds\right) \ ,$$

und analog

$$Im\left(\int_{\frac{1}{2}+iT}^{-1+iT} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds\right) = Im\left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\xi'}{\xi}(s)ds\right) \ .$$

Zusammen haben wir

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\int_L Im\frac{\xi'}{\xi}(s)ds \ .$$

Nach Definition von ξ und wegen $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ gilt

$$\begin{aligned} \xi(s) &= s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \\ &= 2(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s) \ . \end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\int_L Im\left((\log(s-1))' + \left(\log\pi^{-\frac{s}{2}}\right)' + \left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right)' + (\log\zeta(s))'\right) ds$$

Wir werten die vier entstehenden Integrale getrennt aus. Für ein $z \in \mathbb{C}$ gilt einerseits

$$z = |z| \cdot e^{i\arg z}$$

und andererseits

$$z = e^{\log z} = e^{Re\log z + iIm\log z} = e^{Re\log z}\cdot e^{iIm\log z} \ ,$$

also

$$Im\log z = \arg z \ , \ \ Re\log z = \log|z| \ .$$

(Es sei angemerkt, daß $\arg z$ nur bis auf Vielfache von 2π festliegt, d.h. vom Zweig des Logarithmus abhängt.) Damit ergibt sich

$$\int\limits_L Im(\log(s-1))'ds = Im\log(s-1)\Big|_2^{\frac{1}{2}+iT}$$

$$= \arg(s-1)\Big|_2^{\frac{1}{2}+iT} = \arg\left(-\frac{1}{2}+iT\right) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) ,$$

und

$$\int\limits_L Im\left(\log \pi^{-\frac{s}{2}}\right)' ds = Im\left(-\frac{s}{2}\log\pi\right)\Big|_2^{\frac{1}{2}+iT} = -\frac{1}{2}T\log\pi .$$

Für die Gammafunktion verwenden wir die Stirling-Formel und erhalten

$$\begin{aligned}\int\limits_L Im\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right)' ds &= Im\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right)\Big|_2^{\frac{1}{2}+iT}\\ &= Im\log\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right)\\ &= Im\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}iT\right)\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right)\right) - \frac{1}{2}T + O\left(\frac{1}{T}\right) .\end{aligned}$$

Wir haben

$$Im\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}iT\right)\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot Im\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right) + \frac{1}{2}T\cdot Re\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right) .$$

Es ist

$$Im\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right) = \arg\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right) = \frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

und

$$\begin{aligned}Re\log\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right) &= \log\left|\frac{5}{4}+\frac{1}{2}iT\right| = \log\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{T^2}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{T^2}{4}\left(1+\frac{25}{4T^2}\right) = \log\frac{T}{2}+O\left(\frac{1}{T^2}\right) .\end{aligned}$$

Damit kommt

$$\int\limits_L Im\left(\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right)' ds = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}T\log\frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) - \frac{1}{2}T \ .$$

Einsetzen dieser Gleichung gibt unter Berücksichtigung der Definition von $S(T)$ die Behauptung.

□

Satz 10.2

Es gilt

$$S(T) = O(\log T) \ .$$

Beweis:

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\zeta(2+it)-1| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2+it}}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1 \ .$$

Also ist $Re(\zeta(2+it)) > 0$, woraus folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_2^{2+iT} Im\frac{\zeta'}{\zeta}(s)ds\right| &= \left|\int\limits_2^{2+iT} Im(\log\zeta(s))'ds\right| \\
&= \left|Im\log\zeta(s)\Big|_2^{2+iT}\right| = \left|\arg\zeta(s)\Big|_2^{2+iT}\right| \\
&= |\arg\zeta(2+iT)| \leq \frac{\pi}{2} \ .
\end{aligned}$$

Auf dem anderen Teil des Integrationsweges L haben wir nach Satz 7.1

$$\int\limits_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} Im\frac{\zeta'}{\zeta}(s)ds = \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\ \rho-T|<1}} Im\int\limits_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{ds}{s-\rho} + O(\log T) \ .$$

Es gilt

$$\left|Im\int\limits_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{ds}{s-\rho}\right| = \left|Im\log(s-\rho)\Big|_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\right| = \left|\arg(s-\rho)\Big|_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\right| \leq \pi \ .$$

Also erhalten wir mit Lemma 7.3(i)

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} Im\frac{\zeta'}{\zeta}(s)ds\right| &\leq \pi\cdot\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im\ \rho-T|<1}} 1+O(\log T)\\ &\ll \log T\ .\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

□

Korollar 10.1 (Riemann - von Mangoldt)

Es gilt

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)\ .$$

Bemerkung

Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich zusammen mit früheren Resultaten verwenden, um die Riemannsche Vermutung rechnerisch zu testen. Nach Lemma 5.2 ist

$$\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\in\mathbb{R}\quad \text{für}\quad t\in\mathbb{R}\ .$$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes lassen sich demnach die Nullstellen von $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$, d.h. die Nullstellen von ζ auf der kritischen Geraden, durch Untersuchung von Vorzeichenwechseln finden. Dabei werden für ξ asymptotische Entwicklungen, z.B. Integraldarstellungen wie wir sie schon früher hatten, benutzt.

Auf der anderen Seite berechnen wir $N(T)$ gemäß Satz 10.1. Läßt sich $S(T)$, etwa durch numerische Integration, mit einer Genauigkeit $<\frac{1}{2}$ bestimmen, so ist $N(T)$ exakt bekannt, da $N(T)\in\mathbb{Z}$.

Haben wir nun in $0<Im\ \rho<T$ genau $N(T)$ Nullstellen gefunden mit $Re\ \rho=\frac{1}{2}$, so ist die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung in diesem Bereich bzw. für die ersten $N(T)$ Nullstellen von ζ nachgewiesen.

Bereits Riemann selbst berechnete auf diese Weise die ersten drei Nullstellen von ζ im kritischen Streifen:

$$\begin{aligned} \rho_1 &\approx 14,13 \;, \\ \rho_2 &\approx 21,02 \;, \\ \rho_3 &\approx 25,01 \;. \end{aligned}$$

Unter starkem Einsatz von Computern konnten te Riele, van de Lune und Winter vor einigen Jahren zeigen, dass die ersten 1.500.000.001 Nullstellen von ζ im kritischen Streifen auf der kritischen Geraden liegen und alle einfach sind.

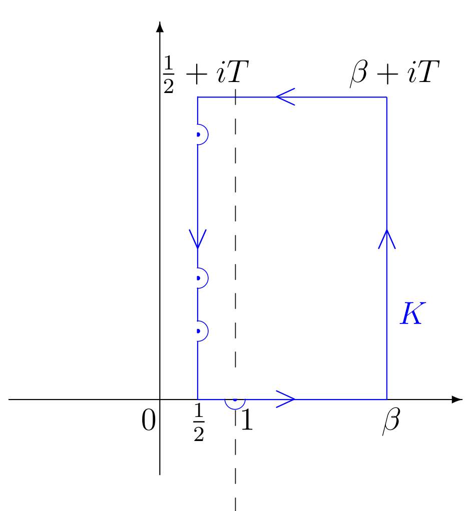
Satz 10.3 (Littlewood)

Es gilt

$$S_1(T) := \int_0^T S(t)dt = O(\log T) \;.$$

<u>**Beweis:**</u>

Sei K der in der Skizze beschriebene Weg, wobei der Pol von ζ bei $s > 1$ sowie die Nullstellen von ζ sämtlich vermieden werden. Damit ist $\log \zeta(s)$ auf K holomorph und in Innern von K meromorph.



Nach dem Residuensatz gilt also

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \log\zeta(s)\ ds = \sum Res(\log\zeta(s))\ .$$

Insbesondere haben wir

$$Re\left(\int\limits_K \log\zeta(s)ds\right) = 0\ .$$

Betrachten wir nun etwa

$$\int\limits_{1/2}^{\beta}{}' \log\zeta(s)\ ds\ ,$$

wobei der Strich die Umgebung des Poles bei $s = 1$ andeutet. Es ist

$$\int\limits_{1+\varepsilon}^{\beta} \log\zeta(s)\ ds = \int\limits_{1+\varepsilon}^{\beta} \log\frac{1}{s-1}\ ds + O(1)$$

$$\begin{aligned} &= -\int\limits_{\varepsilon}^{\beta-1} \log v\ dv + O(1) = -(v\log v - v)\big|_{\varepsilon}^{\beta-1} + O(1) \\ &= \varepsilon\log\varepsilon + O(1)\ , \end{aligned}$$

also existiert

$$\int\limits_{1}^{\beta} \log\zeta(s)\ ds\ .$$

Das gleiche gilt für $\int\limits_{1/2}^{1} \log\zeta(s)\ ds$ sowie die Integrale

$$\int\limits_{\rho}^{1/2+i\gamma} \log\zeta(s)\ ds$$

für die Nullstellen $\rho \in \mathcal{N}$.

Also können wir die Kurve K glätten und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= Re\left(\left(\int\limits_{1/2}^{\beta} + \int\limits_{\beta}^{\beta+iT} + \int\limits_{\beta+iT}^{1/2+iT} + \int\limits_{1/2+iT}^{1/2}\right)\log\zeta(s)\ ds\right) \\ &= Re\left(\int\limits_{1/2}^{\beta}\log\zeta(\sigma)\ d\sigma + i\int\limits_{0}^{T}\log\zeta(\beta+iT)\ dt + \right. \\ &- \left.\int\limits_{1/2}^{\beta}\log\zeta(\sigma+iT)\ d\sigma - i\int\limits_{0}^{T}\log\zeta(1/2+it)\ dt\right) . \end{aligned}$$

Wegen

$$|z|\cdot e^{i\arg z} = z = e^{\log z} = e^{Re\ \log z + iIm\ \log z}$$

ist $Re\ \log z = \log|z|$ und $Im\ \log z = \arg z$, also $Re\,(i\log z) = -\arg z$. Daher kommt

$$0 = \int\limits_{1/2}^{\beta}\log|\zeta(\sigma)|\ d\sigma - \int\limits_{0}^{T}\arg\zeta(\beta+it)\ dt$$

$$-\int\limits_{1/2}^{\beta}\log|\zeta(\sigma+iT)|\ d\sigma + \int\limits_{0}^{T}\arg\zeta(1/2+it)\ dt\ .$$

Für $\sigma > 1$ ist

$$|\log\zeta(\sigma+it)| = \left|\log\left(1+\frac{1}{2^{\sigma+it}}+\cdots\right)\right| \ll \frac{1}{2^{\sigma}}\ .$$

Die obigen Überlegungen ergaben

$$\begin{aligned} \int\limits_{1/2}^{\beta}\log|\zeta(\sigma)|\ d\sigma &= \int\limits_{1/2}^{2}\log|\zeta(\sigma)|\ d\sigma + \int\limits_{2}^{\beta}\log|\zeta(\sigma)|\ d\sigma \\ &\ll 1+\frac{\beta}{2^{\beta}} \ll 1\ . \end{aligned}$$

Außerdem folgt

$$\left|\int\limits_{0}^{T}\arg\zeta(\beta+it)\ dt\right| = \left|\mathrm{Im}\int\limits_{0}^{T}\log\zeta(\beta+it)\ dt\right| \ll \frac{T}{2^{\beta}}\ .$$

Schließlich ist auch

$$\int_2^\beta \log|\sigma + iT)| \ d\sigma \ll \int_2^\beta \frac{d\sigma}{2^\sigma} \ll 1 \ .$$

Mit $\beta \to \infty$ erhalten wir damit insgesamt

$$\int_0^T \arg\zeta(1/2+it)\ dt = \int_{1/2}^2 \log|\zeta(\sigma+iT)| \ d\sigma + O(1) \ .$$

Nach Definition war

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\pi}\int_L Im\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ ds = \frac{1}{\pi}\int_L (\log\zeta(s))'\ ds \\ &= \frac{1}{\pi} Im\ \log\zeta(s)\Big|_2^{1/2+it} = \frac{1}{\pi}\arg\zeta(s)\Big|_2^{1/2+it} \\ &= \frac{1}{\pi}\arg\zeta(1/2+it) \ . \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$S_1(T) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \arg\zeta(1/2+it)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{1/2}^2 \log|\zeta(\sigma+iT)|\ ds + O(1) \ .$$

Sei $s = \sigma + it$ mit $-1 \le \sigma \le 2$ und $t \notin \{\text{Im}\ \rho : \ \rho \in \mathcal{N}\}$. Nach Satz 7.1 gilt

$$\begin{aligned} \log\zeta(s) - \log\zeta(2+it) &= \int_{2+it}^s \frac{\zeta'}{\zeta}(z)\ dz \\ &= \int_{2+it}^s \left(\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\,\rho - t|<1}} \frac{1}{z-\rho} + O(\log t) \right) dz \\ &= \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\,\rho - t|<1}} (\log(s-\rho) - \log(2+it-\rho)) + O(\log t) \ . \end{aligned}$$

Da $\log\zeta(2+it)$ und $\log(2+it-\rho)$ beschränkt sind in t, folgt mit Lemma 7.3(i)

$$\begin{aligned} \log\zeta(s) &= \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\,\rho - t|<1}} \log(s-\rho) + O\left(\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\,\rho - t|<1}} 1 \right) + O(\log t) \\ &= \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N} \\ |Im\,\rho - t|<1}} \log(s-\rho) + O(\log t) \ , \end{aligned}$$

zunächst allerdings nur für $t \notin \{Im\,\rho : \ \rho \in \mathcal{N}\}$. Durch Stetigkeitsüberlegungen folgt dies dann für alle t. Daraus ergibt sich

$$\log|\zeta(s)| = Re\,(\log\zeta(s)) = \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im\,\rho - t|<1}} \log|s-\rho| + O(\log t)\ .$$

Unsere Formel für $S_1(T)$ liefert damit

$$S_1(T) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\rho\in\mathcal{N}\\ |Im\,\rho - t|<1}} \log|\sigma + iT - \rho|\ d\sigma + O(\log T)\ .$$

Nun ist

$$\log|\sigma + iT - \rho| = \log((\sigma - Re\,\rho)^2 + (T - Im\,\rho)^2) < \log(2^2+1) = \log 5\ .$$

Nach unten haben wir die Abschätzung

$$\log|\sigma + iT - \rho| \geq \log(\sigma - Re\,\rho)^2 = 2\cdot\log|\sigma - Re\,\rho|\ .$$

Also gilt

$$3/2\log 5 > \int_{1/2}^{2} \log|\sigma + iT - \rho|\ d\sigma \geq 2\int_{1/2}^{2} \log|\sigma - Re\,\rho|\ d\sigma\ ,$$

und wie weiter oben gezeigt ist auch das letzte Integral beschränkt. Also gibt die erneute Verwendung von Lemma 7.3(i)

$$S_1(T) \ll \log T\ .$$

□

Bemerkung:

Würde $S(T)$ nicht oszillieren, so erwarteten wir nach Satz 10.2 nur die Abschätzung

$$S_1(T) \ll \int_0^T \log t\ dt \ll T\log T\ .$$

Numerische Berechnungen zeigen, dass für $T < 500.000.000$ stets $|S(T)| < 2,32$. An einer Nullstelle $\rho \in \mathcal{N}$ springt $S(T)$ um die Vielfachheit von ρ, d.h. jeweils um 1, da im angegebenen Bereich bekanntlich alle Nullstellen einfach sind. Das bedeutet, dass $S(T)$ nicht genauer als bis auf einen Fehler 1 abgeschätzt werden kann. Davenport bemerkte einmal, dass $S(T) \ll \log T$ in etwa die einzige mathematische Abschätzung sein dürfte, die in diesem Jahrhundert nicht verbessert wurde.

Korollar 10.2

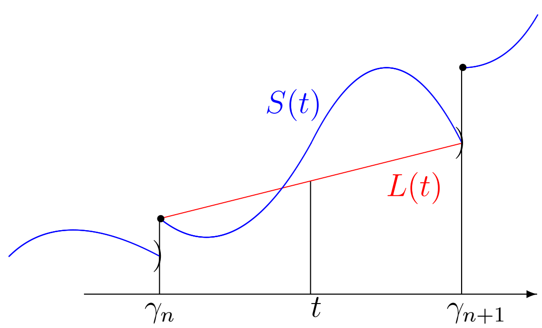
$S(T)$ wechselt unendlich oft das Vorzeichen.

Beweis:

Wir betrachten das Intervall $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ mit $\gamma_n := \operatorname{Im} \rho_n$ und $\rho_n \neq \rho_{n+1}$ aufeinander folgende $\rho \in \mathcal{N}$, d.h. für $t \in [\gamma_n, \gamma_{n+1})$ ist $N(t) = n$. Wir definieren die lineare Funktion $L(t)$ auf $[\gamma_n, \gamma_{n+1}]$ durch die beiden Werte

$$L(\gamma_n) := S(\gamma_n) \quad \text{und} \quad L(\gamma_{n+1}) = \lim_{t \to \gamma_{n+1}^-} S(t) \ .$$

(lim existiert, da $S(t)$ stetig außer bei $t = Im\,\rho$ nach Satz 10.1).



Also haben wir für $\gamma_n < t < \gamma_{n+1}$

$$\begin{aligned} L(t) &= L(\gamma_n) + \frac{L(\gamma_{n+1}) - L(\gamma_n)}{\gamma_{n+1} - \gamma_n}(t - \gamma_n) \\ &= S(\gamma_n) + (\lim_{t \to \gamma_{n+1}^-} S(t) - S(\gamma_n)) \cdot \frac{t - \gamma_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} \ . \end{aligned}$$

Da $N(t) = n$ auf (γ_n, γ_{n+1}), kommt dort mit Satz 10.1 und der Abkürzung

$$H(t) := \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8} \ ,$$

also $S(t) = N(t) - H(t) + O(1/t) = n - H(t) + O(1/t)$,

$$\begin{aligned} L(t) - S(t) &= H(t) - H(\gamma_n) - (H(\gamma_{n+1}) - H(\gamma_n)) \frac{t-\gamma_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n} + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) \\ &= H'(\eta_1)(t-\gamma_n) - H'(\eta_2)(t-\gamma_n) + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) \\ &= H''(\eta_3)(\eta_1-\eta_2)(t-\gamma_n) + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) \ . \end{aligned}$$

Dabei wurde der Mittelwertsatz für $\gamma_n < \eta_1 < t$, $\gamma_n < \eta_2 < \gamma_{n+1}$ und η_3 zwischen η_1 und η_2 verwendet.

Wir haben

$$\begin{aligned} H''(t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{t}\cdot\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right)' \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{t}\cdot\frac{1}{2\pi} \ll \frac{1}{t} \ . \end{aligned}$$

Setzen wir für den Augenblick $\Gamma := (\gamma_{n+1})/(2\pi)$, $\gamma := (\gamma_n)/(2\pi)$, so gilt nach Korollar 10.1 für $\gamma_{n+1} > \gamma_n$

$$\begin{aligned} 1 &= N(\gamma_{n+1}) - N(\gamma_N) = \Gamma\log\Gamma - \Gamma - (\gamma\log\gamma - \gamma) + O(\log\Gamma) \\ &\geq (\Gamma-\gamma)\log\Gamma + \gamma(\log\Gamma - \log\gamma) - (\Gamma-\gamma) - C\cdot\log\Gamma \\ &\geq (\Gamma-\gamma)(\log\Gamma - 1) - C\log\Gamma \\ &\geq \left(\frac{\Gamma-\gamma}{2} - C\right)\log\Gamma \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma - \gamma \ll C + \frac{1}{\log\Gamma} \ ,$$

also $\gamma_{n+1} - \gamma_n = O(1)$.

Wir erhalten also für $t \in (\gamma_n, \gamma_{n+1})$

$$L(t) - S(t) \ll \frac{1}{\gamma_n} \ .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} S(t)\ dt &= \int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} L(t)\ dt + O\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}L^2(t)\cdot\frac{1}{L'}\Bigg|_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} + O\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\cdot}L(\gamma_{n+1})-L(\gamma_N)(L^2(\gamma_{n+1})-L^2(\gamma_n)) + O\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)(\lim_{t\to\gamma_{n+1}^-} S(t)+S(\gamma_n)) + O\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}\right)
\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an $S(t) \geq 0$ für alle $t \geq t_0$.

Wegen $N(\gamma_n) \geq \lim_{t\to\gamma_n^-} N(t) + 1$ ist also für $\gamma_n > t_0$

$$S(\gamma_n) \geq \lim_{t\to\gamma_n^-} S(t) + 1 \geq 1\ .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_n}^{\gamma_{n+1}} S(t)\ dt &\geq \frac{1}{2}(\gamma_{n+1}-\gamma_n) + O\left(\frac{\gamma_{n+1}-\gamma_n}{\gamma_n}\right) \\
&\geq \frac{1}{4}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)
\end{aligned}$$

für hinreichend großes $n \geq n_0$. Das liefert für alle $N \geq n_0$

$$\int_{\gamma_{n_0}}^{\gamma_N} S(t)\ dt \geq \frac{1}{4}(\gamma_N - \gamma_{n_0})\ ,$$

also für hinreichend großes T

$$S_1(T) = \int_0^T S(t)\ dt \ll T$$

im Widerspruch zu Satz 10.3. Also muß $S(t) < 0$ für beliebig große t gezeigt ist. Das beweist das Korollar.

□