INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

14. April 2005

Analytische Zahlentheorie

1. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $f(n) := n^k$ streng multiplikativ ist. Sei τ die Funktion, die der natürlichen Zahl n die Anzahl der Teiler von n zuordnet und σ mit $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ die Teilersummenfunktion. Zeigen Sie, dass τ und σ nicht streng multiplikativ sind.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie: Zwei streng multiplikative Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $f(1) = g(1) = 1$ sind genau dann gleich, wenn für alle Primzahlen p gilt $f(p) = g(p)$.

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*

Schließen Sie aus Aufgabe 4 der Stundenübung, dass die summatorische Funktion $\sum_{d|n} f(d)$ einer multiplikativen Funktion f multiplikativ ist. Beweisen Sie damit, dass τ und für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ σ_k mit $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$ multiplikativ sind.

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie explizit für $n \leq 10$ die Funktionswerte von $(\mu * \tau)(n)$, $((\mu * \tau) * \sigma)(n)$, $(\tau * \sigma)(n)$ und $(\mu * (\tau * \sigma))(n)$.

Aufgabe 5 *(8 Punkte)*

Geben Sie für $n \leq 10$ explizit $\tau^{-1}(n)$ an und kontrollieren Sie das Resultat durch Berechnung von $(\tau^{-1})^{-1}(n)$. Berechnen Sie ferner $\varphi^{-1}(17 \cdot 31)$ und $\mathrm{id}^{-1}(11 \cdot 17 \cdot 29)$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

21. April 2005

Analytische Zahlentheorie

2. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 6 *(8 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann heißen die $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$ die n-ten Einheitswurzeln. Es gibt n n-te Einheitswurzeln, diese haben die Darstellung $z_k = e^{2\pi ik/n} = \cos(\frac{2\pi ik}{n}) + i\sin(\frac{2\pi ik}{n})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Beweisen Sie:

(i) Für $n > 1$ ist die Summe der $n-1$ von 1 verschiedenen Einheitswurzeln -1.

(ii) Ist z eine n-te Einheitswurzel, so ist auch $\frac{1}{z}$ eine n-te Einheitswurzel.

(iii) Das Produkt zweier n-ter Einheitswurzeln ist eine n-te Einheitswurzel.

(iv) Ist $n = a \cdot b$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so lässt sich jede n-te Einheitswurzel als Produkt einer a-ten Einheitswurzel darstellen.

Aufgabe 7 *(8 Punkte)*

Für $q, h \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_q(h) = \sum_{\substack{1 \le a \le q, \\ \mathrm{ggT}(a,q)=1}} \exp\left(2\pi i \frac{ah}{q}\right) = \sum_{d \mid \mathrm{ggT}(q,h)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d.$$

Aufgabe 8 *(8 Punkte)*

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $I_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $I_k(n) = n^k$. Beweisen Sie mit der Definition der Faltung, dass $\tau = \varepsilon * \varepsilon$ und $\sigma_k = I_k * \varepsilon$. Verwenden Sie $\varepsilon^{-1} = \mu$ zum Beweis von $\varphi = \mu * \mathrm{id}$.

Aufgabe 9 *(6 Punkte)*

Sei $D = \mathbb{C}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph sind. $f(z) := \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$, $g(z) := (\mathrm{Re}(z))^2 - (\mathrm{Im}(z))^2 + 2i\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$, $z \in D$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

28. April 2005

Analytische Zahlentheorie

3. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*

Schreiben Sie $f(z) := \sin(z)$ in der Gestalt $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass u und v für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** erfüllen. Geben Sie die Potenzreihenentwicklung von f und f' an.

Aufgabe 11 *(8 Punkte)*

Entwickeln Sie

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{i}{20} \cdot \frac{1}{z+2i} - \frac{i}{20} \cdot \frac{1}{z-2i} - \frac{i}{30} \cdot \frac{1}{z+3i} + \frac{i}{30} \cdot \frac{1}{z-3i}$$

an der Stelle 1 in eine Potenzreihe und geben Sie den zugehörigen Konvergenzradius an.

Aufgabe 12 *(10 Punkte)*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und W ein einfach geschlossener Integrationsweg, der mit samt seinem Innengebiet IW in G liegt, und der IW positiv (entgegen dem Urzeigersinn) umläuft. Die Funktion f sei holomorph in G bis auf isolierte Singularitäten, die nicht auf W liegen, dann gilt $\int_W f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z \in IW} \operatorname{res}(f,z)$, wobei $\operatorname{res}(f,z) = 0$, wenn z kein Pol und keine wesentliche Singularität von f ist. Berechnen Sie mit dem Residuensatz $\int_W \frac{1}{(s^2+4)(s^2+9)}\,ds$ für $W(t) := 5i + r(\cos t + i \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $r \in \left\{1, 4, \frac{15}{2}, 10\right\}$. Berechnen Sie mit dem Residuensatz das reelle Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$.

Aufgabe 13 *(6 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die **Dirichletreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$ konvergiert und genau für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

10. Mai 2005

Analytische Zahlentheorie

4. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 14 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$, die keine Nullstellen von $\cos(\pi z)$ sind, gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

Aufgabe 15 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie für alle $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $|\Gamma(iy)|^2 = \dfrac{\pi}{y\sinh(\pi y)}$.

Aufgabe 16 *(6 Punkte)*

Beweisen Sie, dass für alle $x > 0$ gilt $\int_x^{x+1} \log(\Gamma(t))\,dt = x\log(x) - x + \log(\sqrt{2\pi})$.

Aufgabe 17 *(8 Punkte)*

Zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiere die Fouriertransformierte $\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi itx}\,dt$. Sei $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto f(ax+b)$ die Fouriertransformierte $x \mapsto \frac{1}{|a|}e^{2\pi i\frac{bx}{a}}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ hat. Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := e^{-|x|}$ gilt $\widehat{g}(x) = \frac{2}{1+4x^2\pi^2}$. Geben Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ an mit $\widehat{f}(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Aufgabe 18 *(8 Punkte)*

Wenden Sie die Rechenregeln für die Fouriertransformation an, um die Fouriertransformierten der Funktionen $f_1(x) := \frac{-16x\pi^2}{(1+4x^2\pi^2)^2}$ und $f_2(x) := xe^{-4x^2}$ zu berechnen.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

24. Mai 2005

Analytische Zahlentheorie

5. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 19 *(8 Punkte)*

Sei $t > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Poissonschen Summenformel $\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-t|m|} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2t}{t^2+4\pi^2k^2}$ und zeigen Sie, dass $\frac{2}{1-e^{-t}} - 1 = \frac{2}{t} + 4t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2+4\pi^2k^2}$.

Aufgabe 20 *(6 Punkte)*

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$. Beweisen Sie mit der Eulerschen Formel, dass $1 - e^{-z} = 0$ genau dann, wenn $z = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die in dem Kreisring $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z| < 2\pi\right\}$ konvergente Laurentreihe von $\frac{2}{1-e^{-z}}$ die Gestalt $1 + \frac{2}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$ hat.

Aufgabe 21 *(8 Punkte)*

Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$. Geben Sie für $j \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j}$ exakt und näherungsweise (Taschenrechner) an.

Aufgabe 22 *(8 Punkte)*

Beweisen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)\zeta(1-s)$$

der Riemannschen Zetafunktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$. Geben Sie $\zeta(-1), \zeta(-3), \zeta(-5), \zeta(-7)$ explizit an.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

31. Mai 2005

Analytische Zahlentheorie

6. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 23 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(nx)\,dx = 0 \text{ und } \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{für } k = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 24 *(6 Punkte)*

Die Bernoullischen Polynome $B_n(x)$ sind definiert durch

$$\frac{t \cdot e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Beweisen Sie, dass $B_0(x) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$. Bestimmen Sie mit dieser Formel $B_8(x)$.

Aufgabe 25 *(8 Punkte)*

Sei $f(x) = \begin{cases} B_6(x), & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ B_6(x - [x]), & \text{sonst.} \end{cases}$
Skizzieren Sie $\big\{(x, f(x)) \bigm| -2 \le x \le 3\big\}$. Lesen Sie aus der Fourierdarstellung von $f(x)$ den Wert $\zeta(6)$ ab.

Aufgabe 26 *(8 Punkte)*

Es sei $r_0(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $r_1(x) = x \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ und $r_n(x) = x \cdot \dfrac{d}{dx}(r_{n-1}(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie explizit $r_3(x)$ und $r_4(x)$ und damit die Zahlen $\zeta(-3), \zeta(-4)$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

7. Juni 2005

Analytische Zahlentheorie

7. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 27 *(8 Punkte)*

Beweisen Sie für $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{j} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\prod_{m=0}^{2k-2} (s+m) \right) - \frac{1}{(2j+1)!} \left(\prod_{m=0}^{2j} (s+m) \right) \int_1^\infty B_{2j+1}(x-[x]) x^{-s-2j-1}\, dx.$$

Diese Darstellung setzt $\zeta(s)$ analytisch fort auf die Halbebene $\sigma := \operatorname{Re} s > -2j$. Berechnen Sie für $j = 2$ mit der angegebenen Formel $\zeta(-2)$ und $\zeta(-3)$.

Aufgabe 28 *(6 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\operatorname{ord}(z^n)$, $\operatorname{ord}(\cos z)$, $\operatorname{ord}(\exp(z^n))$.

Aufgabe 29 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie mit der Jensenschen Formel

$$\int_0^{2\pi} \log(|625e^{4it} + 125e^{3it} - 125e^{2it} + 5e^{it} - 6|)\, dt$$

Hinweis: $t^4 + t^3 - 5t^2 + t - 6 = (t^2+1)(t^2+t-6)$.

Aufgabe 30 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie mit der Jensenschen Formel

$$\int_0^{2\pi} \log(5 + 4\cos t)\, dt.$$

Hinweis: Berechnen Sie $|(3e^{it}+2)^2|$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

14. Juni 2005

Analytische Zahlentheorie

8. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 31 *(8 Punkte)*

Beweisen Sie mit dem Maximumprinzip das Minimumprinzip: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f in G nicht konstant und gibt es ein $a \in G$ mit $|f(a)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in G$, so ist $f(a) = 0$.
Verwenden Sie das Minimumprinzip zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra: Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ vom Grad ≥ 1 hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 32 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie für $f(z) := z^2 + 3z + 3$

$$\max_{|z|\leq 3} |f(z)|, \ \min_{|z|\leq 3} |f(z)| \text{ und } \min_{|z|\leq 1} |f(z)|.$$

Aufgabe 33 *(6 Punkte)*

Es sei W der geschlossene Weg, der zusammengesetzt ist aus dem geraden Weg von $-3-2i$ nach $3-2i$, dem geraden Weg von $3-2i$ nach $3+2i$, dem geraden Weg von $3+2i$ nach $-3+2i$, dem geraden Weg von $-3+2i$ nach $-3-2i$. Berechnen Sie für $f(z) := \exp(2z - i)(z^2+1)^{-1}(z^2+9)^{-1}$ das Integral

$$\int_W \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Aufgabe 34 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für eine Nullstelle des Polynoms $p(z) = z^4 + 6z + 3$ gilt $|z| < 1$ und für die anderen Nullstellen gilt $1 < |z| < 2$.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Rouché zunächst an mit $f(z) := z^4$, $g(z) := 6z + 3$, $W(t) := 2\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$ und dann mit $f(z) := 6z$, $g(z) := z^4 + 3$, $W(t) := \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof.Dr. Sander
Dr. Viergutz

21. Juni 2005

Analytische Zahlentheorie

9. Übungsblatt

Abgabe: vor der nächsten Übungsstunde

Aufgabe 35 *(8 Punkte)*

Begründen Sie, warum aus

$$\int_0^1 \frac{\zeta'(x+i)}{\zeta(x+i)}\,dx = 0.96\ldots + i\cdot 0.55\ldots, \qquad i\int_1^{15} \frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}\,dt = -0.48\ldots + i\cdot 1.84\ldots,$$
$$\int_1^0 \frac{\zeta'(x+15i)}{\zeta(x+15i)}\,dx = 0.43\ldots + i\cdot 1.07\ldots, \qquad i\int_{15}^{1} \frac{\zeta'(it)}{\zeta(it)}\,dt = -0.91\ldots + i\cdot 2.81\ldots$$

folgt, dass $\zeta(s)$ im Bereich $\left\{s\in\mathbb{C}\;\middle|\;0\le \operatorname{Re}s\le 1 \text{ und } 1\le \operatorname{Im}s\le 15\right\}$ genau eine Nullstelle ϱ hat und dass $\operatorname{Re}\varrho = \frac{1}{2}$ und $14 < \operatorname{Im}\varrho < 15$ gilt.

Aufgabe 36 *(8 Punkte)*

Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen $\le n$. Zeigen Sie, dass für alle $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ gilt $\pi(2^{k+1})\le 2^k$.
Hinweis: Überprüfen Sie die Ungleichung für $0\le k\le 3$ direkt und beweisen Sie für $k\ge 3$ die Ungleichung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 37 *(6 Punkte)*

Beweisen Sie, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P},\,n<p\le 2n} p$ ein Teiler von $\binom{2n}{n}$ ist.

Aufgabe 38 *(8 Punkte)*

Es sei

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k \ (p\in\mathbb{P}, k>0),\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

$x>2$, $T>1$, $x_1 = \min\left\{p^k \;\middle|\; p\in\mathbb{P}, k\in\mathbb{N}, p^k > x\right\}$, $c = 1+\frac{1}{\log x}$. Zeigen Sie mit den in dem Beweis von Satz 8.1 angegebenen Methoden, dass

$$\sum_{x_1<n<2x} \Lambda(n)\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^c\cdot\min\left\{1, \frac{1}{T|\log(\frac{x}{n})|}\right\} \ll \frac{x}{T}(\log x)^2.$$