Institut für Mathematik
Universität Hannover
Dr. H. Köditz

Hannover, den 18. April 2005

1. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 1 Seien $G, G^* \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : G \to G^*$ eine bijektive und holomorphe Abbildung. Man zeige, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : G^* \to G$ ebenfalls holomorph ist.
Hinweis: Gilt $G, G^* \subset \mathbb{C}$, so gilt die Aussage - wie aus Funktionentheorie I bekannt.

Betrachtet werden also G, G^* als Teilgebiete der Riemannschen Fläche $\widehat{\mathbb{C}}$.
Ist $f(\infty) = \infty$, so ist $g(z) := 1/f(1/z)$ auf einer (zunächst punktierten) Umgebung von 0 holomorph und injektiv, nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz also in 0 durch den Funktionswert 0 holomorph und injektiv (!) ergänzbar. Sie besitzt deshalb auf dieser Umgebung eine holomorphe Umkehrfunktion. $f^{-1}(z) = 1/g^{-1}(1/z)$ ist deshalb als Komposition holomorpher Abbildungen holomorph.
In den anderen Fällen verfährt man genau so.

Aufgabe 2 Bekanntlich ist die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ als Teilgebiet von $\mathbb{C}$ eine Riemann'sche Fläche mit der Karte $\iota : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\iota(z) = z$.
Man zeige, dass $\mathbb{D}$ durch die Karte $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \frac{r}{1-r}\, e^{i\vartheta}, (z = r\, e^{i\vartheta})$, ebenfalls zur Riemann'schen Fläche wird, und dass die durch ι und φ definierten Atlanten nicht äquivalent sind.

Beweis: Da φ topologisch ist, wird $\mathbb{D}$ durch obige Karte trivialerweise zur RFl., da keine Kartenwechsel zu untesuchen sind. Betrachtet man nun den Atlas $A := \{\iota, \varphi\}$, so ist der Kartenwechsel φ^{-1} zu untersuchen. Dieser ist eine nicht konstante Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$, also beschränkt, kann also nicht holomorph sein (Satz von Liouville). A ist also kein komplexer Atlas; die Ausgangsatlanten sind deshalb nicht äquivalent. □

Aufgabe 3 Man formuliere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass zwei Paare komplexer Zahlen ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' dasselbe Gitter definieren.

Die Paare komplexer Zahlen definieren genau dann dasselbe Gitter, wenn ganzzahlige Matrizen A, B existieren mit

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich gilt $B = A^{-1}$. Ganzzahlige Matrizen A haben nun bekanntlich genau dann eine ganzzahlige Inverse wenn $\det A = \pm 1$ gilt. Dies ist die ges. Bedingung. □

Aufgabe 4 Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Man zeige, dass die dadurch induzierte Abbildung $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Beweis: Die Verträglichkeit von f^* mit Addition und Multiplikation prüft man leicht nach:
$f^*(\varphi \dotplus \psi)(z) = (\varphi \dotplus \psi)(f(z)) = \varphi(f(z)) \dotplus \psi(f(z)) = f^*(\varphi)(z) \dotplus f^*(\psi)(z)$. Also ist f^* ein Ringhomomorphismus. Zum Nachweis der Injektivität genügt es zu zeigen, dass ${f^*}^{-1}(0) = 0$ gilt. Sei also $f^*(\varphi)(z) = \varphi(f(z)) \equiv 0$. Nach Korollar 1.1 ist $f(X) \subset Y$ eine offene Menge, da f nicht konstant ist. Der Identitätssatz (Satz 1.2) liefert dann sofort $\varphi \equiv 0$ □.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Dr. H. Köditz

Hannover, den 25. April 2005

2. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 5

Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Man zeige: Ist X kompakt, so ist f surjektiv und Y ebenfalls kompakt.
Bemerkung: Man beachte Korollar 1.4 der Vorlesung.

Beweis: Sei also X kompakt. Da f holomorph ist, ist $f(X)$ offen (Korollar 1.1). Da f stetig ist, ist $f(X)$ kompakt. Deshalb ist $f(X)$ offen und abgeschlossen in Y. Da Y zusammenhängend ist, folgt $f(X) = Y$ $\square$.

Aufgabe 6

Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, also eine rationale Funktion. Ist $f = p/q$ mit teilerfremden Polynomen p und q, so definiert man den Grad von f durch: $d := \text{grad } f := \max(\text{grad } p, \text{grad } q)$. Man zeige: Für alle $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt

$$d \;=\; \sum_{z \in f^{-1}(c)} \text{ord}_z(f) \;.$$

Hinweis: Vielleicht ist es naheliegend, die Behauptung zunächst für $c = 0, \infty$ zu zeigen.

Beweis: Sei $f = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden Polynomen p, q und grad $p =: n$, grad $q =: m$.
(i) Zunächst sei $c = 0$. $p(z) = 0$ gibt n Nullstellen (mit Vielfachheiten) in $\mathbb{C}$. Falls $m > n$ kommt eine Nullstelle der Ordnung $m - n$ bei ∞ hinzu. Fertig!
(ii) Ist $c = \infty$, so erhält man mit $f(z) = \infty \iff \frac{1}{f}(z) = 0$ und $\text{ord}_z f(z) = \text{ord}_z \frac{1}{f}(z)$ ebenfalls die Behauptung.
(iii) Sei nun $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da p, q teilerfremd sind, sind auch $p - cq, q$ teilerfremd!
Deshalb ist auch $d = \text{grad } \frac{p-cq}{q}$ und die Behauptung folgt hier mit (i) für die Funktion $r := \frac{p-cq}{q}$ $\square$.

Aufgabe 7

Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$, und α, β seien Wege in X, die x_0 mit x_1 verbinden. Man zeige:

$$\alpha \;\simeq\; \beta \;\Longrightarrow\; \alpha_* \;=\; \beta_* \;.$$

Ist die Umkehrung auch richtig?
Hinweis: 2. Gruppenübung.

Beweis: Es gelte $\alpha \simeq \beta \iff \alpha^{-1}\beta \simeq x_1$. Zu zeigen ist, dass für alle geschlossenen Wege γ durch x_0 stets

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha \simeq \beta^{-1}\gamma\beta \iff \alpha^{-1}\gamma\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta \simeq x_1$$

gilt. Wegen $\alpha\beta^{-1} \simeq x_0$ gilt $\gamma \simeq \gamma\alpha\beta^{-1}$ und somit $\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta \simeq \alpha^{-1}\gamma\gamma^{-1}\beta \simeq \alpha^{-1}\beta \simeq x_1$ $\square$.

Die Umkehrung ist nicht richtig. Wähle etwa $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, x_0 = 1, x_1 = -1$. Dann ist $\pi_1(X, 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$, also abelsch. Nach Gruppenübung hängt dann α_* nicht vom Verbindungsweg ab. Es gibt jedoch nichthomotope Wege, die 1 mit -1 verbinden - etwa die obere bzw untere Hälfte der Einheitskreislinie.

Aufgabe 8

Seien L, L' Gitter in $\mathbb{C}$. Man sagt, eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induziert eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$, wenn aus $z \equiv \zeta \mod L$ stets $f(z) \equiv f(\zeta) \mod L'$ folgt.
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei nun $f_\alpha(z) := \alpha z$. Sei $H(L, L') := \{\alpha \in \mathbb{C} : f_\alpha \text{ induziert ein } \tilde{f}_\alpha\}$.

a) Man zeige: $H(L, L') = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha L \subset L'\}$.

Beweis: f_α induziert ein $\tilde{f}_\alpha$ genau dann, wenn zu jedem $\omega \in L$ ein $\omega' \in L'$ existiert mit $\alpha\,(z+\omega) = \alpha\, z + \omega'$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $\alpha\,\omega = \omega' \in L'$ $\square$.

b) Sei nun $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $L = L' = \{m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Nach (a) gilt nun $\mathbb{Z} \subset H(L, L')$.
Man zeige:
$H(L, L') \neq \mathbb{Z}$ genau dann, wenn τ einer quadratischen Gleichung $\tau^2 + p\tau + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ genügt.

Beweis:
Wegen $1, \tau \in L$ gilt (mit (a)) für $\alpha \in H(L, L) :\ \alpha = a + b\,\tau,\ \alpha\,\tau = c + d\,\tau$ mit passenden $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, also

$$b\,\tau^2 \ + (a-d)\,\tau \ - \ c \ = \ 0\ .$$

Gibt es nun ein $\alpha \notin Z$, ist $b \neq 0$ für dieses α. Mit $p = \frac{a-d}{b}, q = -\frac{c}{b}$ genügt also τ einer quadratischen Gleichung wie behauptet.

Umgekehrt gelte $\tau^2 + p\,\tau + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$, also $b\,\tau^2 + A\,\tau + B = 0$ mit passenden $0 \neq b, A, B \in \mathbb{Z}$. Sei dann $\alpha := b\,\tau \in L \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha\,\tau = b\,\tau^2 = -B - A\,\tau \in L$. Nach (a) gilt also $\alpha \in H(L, L)$ $\square$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Dr. H. Köditz

Hannover, den 2. Mai 2005

3. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 9

Gegeben seien die beiden Gitter $L := \{m + n\,i : m, n \in \mathbb{Z}\}, L' := \{m + 2n\,i : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass die Riemannschen Flächen $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ nicht biholomorph äquivalent sind.

Beweis: Sei $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ eine holomorphe nicht konstante Abbildung (so was gibt es wirklich). Wir zeigen, dass f nicht injektiv sein kann. f ist induziert durch eine holomorphe Funktion $g(z) = az + b$ - Beweis in der 3.Gruppenübung. Nach HA5a gilt $aL \subset L'$, also insbesondere, da $1, i \in L$:

$$a \;=\; m + 2in \;,\; ai \;=\; k + 2il \;\Longrightarrow\; m + 2in \;=\; 2l - ki$$

mit passenden $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$. Also $a = 2j + 2in; j, n \in \mathbb{Z}, jn \neq 0$. Der Fundamentalbereich $Q = \{z = x + iy : 0 \leq x, y < 1\}$ wird also auf ein Quadrat abgebildet, dessen Kantenlänge mindestens 2 ist. Dieses Quadrat enthält dann Punkte, die modulo L' äquivalent sind, also den gleichen Punkt auf $\mathbb{C}/L'$ liefern. Die Urbilder bzgl g sind jedoch nicht mod L äquivalent, d.h. f ist nicht injektiv $\square$.

Aufgabe 10

Sind X, Y topologische Räume, $y_0 \in Y$, und ist $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so wird durch $p_*([\gamma]) := [p \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, p(y_0))$ definiert.

a) Man zeige: Ist $p : Y \to X$ eine Überlagerung der Riemannschen Flächen X, Y, so ist p_* injektiv.

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 1.11. p ist als Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus. Der Satz besagt dann, dass jede Homotopieklasse (in $\pi_1(X, p(y_0))$) zu genau einer Klasse (in $\pi_1(Y, y_0)$) geliftet wird, also ist p_* injektiv $\square$.

b) Man ermittle alle Riemannschen Flächen X für die eine Überlagerung $p : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ existiert, und beschreibe diese Überlagerungen.
Hinweis: Satz 1.11 und Satz 1.12 beachten.

Nach (a) ist X einfach zusammenhängend, da $\widehat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist. Also ist p eine universelle Überlagerung. Nach Korollar 1.6 sind alle univ. ÜL äquivalent. Da die Identität auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eine univ. ÜL ist, ist $X = \widehat{\mathbb{C}}$ (bis auf Homöomorphie). Deshalb ist X auf biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$ (warum?!). Als Überlagerungen kommen also nur rationale Funktionen in Frage. Der Beweis von Koroller 1.6 zeigt, dass p bijektiv sein muss, also grad $p = 1$. Es folgt $p(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 11

Seien X, Y Riemannsche Flächen. Eine Überlagerung $p : Y \to X$ heißt *eigentlich*, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. Man zeige:

a) Für jedes $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich.

Beweis: Nach vor. ist $p^{-1}(x)$ kompakt. Da p lokal topologisch ist, ist $p^{-1}(x)$ auch diskret, also endlich.

b) p ist surjektiv.

Beweis: Als lokal topologische Abbildung ist p offen. Ist p nicht surjektiv, so gibt es ein $c \in \partial p(Y)$, $c \notin p(Y)$. Dann kann keine Umgebung von c topologisches Bild einer Teilmenge von Y sein, da in jeder Umgebung Punkte aus $X \setminus p(Y)$ und $p(Y)$ liegen. Dies ist nach Definition der Überlagerungsabbildungen unmöglich.

c) Die Anzahl der Elemente von $p^{-1}(x)$ ist für jedes x gleich (Bedeckungszahl).

Beweis: Nach Def. der Überlagerung gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U, derart, dass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von zu U vermöge p homöomorpher Urbilder ist. Für alle $y \in U$ ist also die Bedeckungszahl gleich. Dies bedeutet, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X_n \subset X$ der $x \in X$ mit genau n Elementen in $p^{-1}(x)$ offen ist. Also ist $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von X durch paarweise disjunkte Mengen. Da X zusammenhängend ist, gilt $X = X_n$ für genau ein n. $\square$

Aufgabe 12
Man zeige: Die Abbildung $\tan : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{i, -i\}$ ist eine Überlagerung.

Beweis:
(i) $\tan z \neq \pm i$.
$\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = i \iff e^{2iz} - 1 = -e^{2iz} - 1 \iff e^{2iz} = 0$, was unmöglich ist. Analog $\tan z = -i$.
(ii) tan ist lokal topologisch.
Die Polstellenmenge ist $P = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Alle Pole sind einfach, also ist tan bei jeder Polstelle lokal topologisch. Auf $\mathbb{C} \backslash P$ ist tan als holomorphe Funktion genau dann lokal topologisch, falls $\tan' z = 1 + \tan^2 \neq 0$ gilt, was nach (i) gesichert ist.
(iii) $\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \tan z = \tan \zeta = \frac{1}{i}\frac{e^{2i\zeta}-1}{e^{2i\zeta}+1} \iff z = \zeta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, z \notin P$, wie eine leichte Rechnung. ergibt.
Zu jedem $w \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{i, -i\}$ findet man also für jedes $z \in \tan^{-1} w$ eine Umgebung z.B. $B(z, 1)$ die durch tan topologisch auf eine Umgebung von w abgebildet wird. Deshalb ist tan eine Überlagerung $\square$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Dr. H. Köditz

Hannover, den 9. Mai 2005

4. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 13

a) Man ermittle eine biholomorphe Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

$\varphi(z) := i\,\dfrac{z+1}{z-1}$ leistet dieses.

b) Man zeige: Mit $p(z) := e^{2\pi i z}$ ist $\varphi \circ p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ eine universelle Überlagerung.

p ist eine universelle Überlagerung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ - bekannt. φ ist eine biholomorphe Abbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$, also ist $\varphi \circ p$ univ. ÜL.

c) Nach HA12 ist tan ebenfalls eine Überlagerungsabbildung. Man ermittle ein $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\tan \circ \psi = \varphi \circ p$.

Mit $\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2\pi i z}-1}{e^{2\pi i z}+1}$ und $\varphi(p(z)) = i\,\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}$ erhält man

$$\psi(z) = -z + \frac{1}{2} \implies \tan(\psi(z)) = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2\pi i \psi(z)}-1}{e^{2\pi i \psi(z)}+1} = i\,\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} = \varphi(p(z)) \ .$$

Aufgabe 14

Man beweise mit HA11 die HA6.
Bemerkung: Vorsicht! Rationale Funktionen vom Grad größer als 1 sind nicht lokal topologisch.

Beweis: Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion vom Grad größer als 1 (Grad 1 ist trivial). Da f stetig und $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist das Urbild jeder kompakten Menge kompakt. Da für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Urbildmenge $f^{-1}(z)$ diskret ist, ist sie auch endlich. Die Menge der kritischen Punkte $C := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ bei } z \text{ nicht lokal injektiv }\}$ ist ebenfalls endlich (vergl. Satz 1.5), da sie isoliert und $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. Ebenso $f^{-1}(f(C))$. Deshalb ist $f_* : \widehat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(f(C)) \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus f(C)$ eine Überlagerung. Diese ist eigentlich, da das Urbild einer kompakten Menge abgeschlossen in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(f(C))$ ist und C nicht trifft, also als abgeschlossene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. HA11 zeigt nun, dass die Bedeckungszahl N (für f_*) konstant ist. Satz 1.5 besagt nun, dass die Ordnung in einem kritischen Punkt gerade die Bedeckungzahl der Einschränkung von f auf eine Umgebung dieses Punktes ist. Also summieren sich auch für $z \in f(C)$ die Ordnungen zu $N.n = d = \text{grad } f$ ist wie in HA6 direkte Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 15

Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung. Man zeige: Es gibt eine holomorphe Abbildung $g : X \to \mathbb{C}$ mit $e^g = f$, d.h. einen holomorphen Logarithmus von f.

Beweis: Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist eine universelle Überlagerung. Deshalb kann ach Satz 1.12 die Abbildung f zu $g : X \to \mathbb{C}$ mit $e^g = f$ geliftet werden. g ist also lokal ein Logarithmus von f und somit holomorph $\square$.

Aufgabe 16

a) Man zeige, dass $\exp : H := \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \to G := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ eine Überlagerung ist, und ermittle die Gruppe der Decktransformationen dieser Überlagerung.

Bekanntlich ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$. Wegen $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ folgt die Behauptung. Die Gruppe der Decktransformationen ist wieder die Gruppe der Translationen $t_k(z) = z + 2k\pi i$.

b) Gegeben seien die Wege $\alpha, \beta : [0, 1] \to G$, $\alpha(t) := 1 - \frac{1}{2}\, e^{2\pi i t}$, $\beta(t) := \frac{1}{2}\, e^{2\pi i t}$. Man skizziere die Liftungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = -\ln 2$, zeige so, dass die Liftungen von $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ nicht homotop sind und folgere, dass $\pi_1(G, \frac{1}{2})$ nicht kommutativ ist.

$\tilde{\alpha}$ ist ein Weg im Parallelstreifen $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ der den Nullpunkt mathematisch positiv einmal umrundet. $\tilde{\beta}$ ist die Verbindungsstrecke von $-\ln 2$ und $-\ln 2 + 2\pi i$. $\widetilde{\alpha\beta}$ ist die Zusammensetzung dieser Wege. Dagegen ist $\widetilde{\beta\alpha}$ der Weg der zuerst $-\ln 2$ mit $-\ln 2 + 2\pi i$ verbindet und dann im Parallelstreifen $\{z : \pi < \operatorname{Im} z < 3\pi\}$ den Punkt $2\pi i$ einmal (positiv) umrundet. Diese beiden Wege sind nicht homotop. Dies sieht man zwar, soll jedoch in den Übungen (in allgemeinerem Kontext) präzise begründet werden.

Nach Satz 1.11 werden Homotopieklassen in $\pi_1(G, \frac{1}{2})$ auf eindeutige Weise zu Homotopieklassen in $\pi_1(H, -\ln 2)$ geliftet. Da aber $\widetilde{\beta\alpha}$ nicht homotop zu $\widetilde{\alpha\beta}$ ist, kann $\alpha\beta$ nicht homotop zu $\beta\alpha$ sein; deshalb ist $\pi_1(G, \frac{1}{2})$ nicht kommutativ $\square$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Dr. H. Köditz

Hannover, den 23. Mai 2005

5. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 17 *Eulersche Gamma-Funktion*

Für $\mathrm{Re}\, z > 0$ wird durch $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\, dt$ die (holomorphe) Gamma-Funktion definiert. Man zeige $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), (\mathrm{Re}\, z > 0)$, und folgere, dass $\Gamma(z)$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden kann. Man ermittle die Polstellen nebst Polstellenordungen und Residuen.

Die lokal gleichmäßige Konvergenz des Integrals auf der Halbebene $\mathrm{Re}\, z > 0$ und damit die Holomorphie folgt aus der Abschätzung: $|e^{-t}t^{z-1}| = |e^{-t}e^{(z-1)\ln t}| \leq e^{-t}t^{x-1}$, $z = x + iy$. Mit partieller Integration erhält man:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z\, dt = -e^{-t}t^z|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}zt^{z-1}\, dt = z\,\Gamma(z)\ ,\ \mathrm{Re}\, z > 0\ .$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ folgt hieraus leicht mit Induktion: $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$. Dies gilt zunächst nur für $\mathrm{Re}\, z > 0$. Die rechte Seite ist jedoch auch für $\mathrm{Re}\, z > -n-1, z \neq 0, -1, \cdots, -n$ definiert, liefert also eine holomorphe Fortsetzung der $\Gamma-$Funktion in dieses Gebiet. Bei $-n \in \mathbb{N}_0$ erhält man Pole erster Ordnung mit den Residuen $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Aufgabe 18

Sei $\bar{g} \in \mathcal{O}_{z_0}$ Keim einer in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorphen Funktion g mit $g(z_0) =: w_0$. Man zeige:

a) Durch $\bar{g}^*(\bar{f}) := \overline{f \circ g}$ wird ein Ringhomomorphismus $\bar{g}^* : \mathcal{O}_{w_0} \to \mathcal{O}_{z_0}$ definiert.

Dies ist wegen $\bar{g}^*(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) = \overline{(f_1 + f_2) \circ g} = \overline{f_1 \circ g} + \overline{f_2 \circ g} = \bar{g}^*(\bar{f}_1) + \bar{g}^*(\bar{f}_2)$ - Multiplikation genau so - trivial.

b) $\bar{g}^*$ ist genau dann injektiv, wenn g nicht konstant ist, und genau dann surjektiv, wenn $g'(z_0) \neq 0$ gilt.

Beweis: (i) Zur Injektivität:

Zu untersuchen ist $(\bar{g}^*)^{-1}(0)$. $(\bar{g}^*(\bar{f}) := \overline{f \circ g} = 0 \Rightarrow f = 0) \iff f = 0$ gilt auf Grund des Identitätssatzes genau für nicht konstante g.

Zur Surjektivität:

$g'(z_0) \neq 0 \iff g$ injektiv auf einer Umgebung von z_0, besitzt also eien (lokale) Umkehrung $g^{-1} : U(w_0) \to U(z_0)$. Ist $\bar{h} \in \mathcal{O}_{z_0}$, so ist $k^* := \overline{h \circ g^{-1}} \in \mathcal{O}_{w_0}$ mit $\bar{g}^*(k^*) = \bar{h}$, $\bar{g}^*$ ist also surjektiv $\square$.

Aufgabe 19

Sei f ein auf einer Umgebung von 0 definierter Zweig von $\sqrt{z^2-1}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ mit Anfangs- und Endpunkt 0. Man zeige, dass f längs γ holomorph fortgesetzt werden kann und berechne die Fortsetzung in Abhängigkeit von $\mathrm{Uml}(\gamma, 1)$ und $\mathrm{Uml}(\gamma, -1)$.
Hinweis: Man kann das Fortsetzungsverhalten von $\sqrt{z}$ als bekannt voraussetzen (Gruppenübung).

Wegen $f(z) := \sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ und der unbegrenzten Fortsetzbarkeit von $\sqrt{z}$ in $\mathbb{C}^*$ kann man unseren Zweig in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ unbegrenzt fortsetzen. Da $\sqrt{z}$ bei Umlauf um $=$ das Vorzeichen wechselt, ändert jeder Umlauf um 1 und -1 das Vorzrichen unseres Zweiges. Man erhält somit somit durch Fortsetzung unserer Funktion längs eines geschlossenen Weges γ das Funktionselement $(-1)^{\mathrm{Uml}(\gamma,1)+\mathrm{Uml}(\gamma,-1)} f(z)$.

Aufgabe 20 *Klassische Form des Monodromiesatzes*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, und $\bar{f} \in \mathcal{O}_{z_0}$ ein holomorpher Funktionskeim, der sich längs jeden Weges in G holomorph fortsetzen läßt. Man zeige, dass $\bar{f}$ der Keim einer auf ganz G holomorphen Funktion ist.

Der Monodromiesatz der Vorlesung besagt: Ist $\bar{f}$ längs jedes Weges einer Monodromieklasse (von Wegen, die alle z_0 mit z in G verbinden) fortsetzbar, so erhält man für alle Wege dieser Klasse die gleiche Fortsetzung. Da G einfach zusammenhängend ist, sind alle Wege die z_0 mit z verbinden homotop, die Fortsetzung ist also nur von z ab; der Funktionswert der Fortsetzung in z def. eine auf ganz G holomorphe Funktion $\square$.

Aufgabe 21

Sei $f : \mathbb{D} := \{z : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ der Zweig von $\sqrt{1-z^2}$ mit $f(0) = 1$. Zu $X := \widehat{\mathbb{C}}$ und $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $p(z) := \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ finde man Abbildungen j und $\hat{f}$ so, dass $\widehat{\mathbb{C}}$ zur verzweigten meromorphen Fortsetzung von f wird.

Wir müssen Funktionen $j : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $p \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ und $\hat{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\hat{f} \circ j = f$ finden. Offensichtlich ist j zu p invers, also

$$w = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \iff z^2 - 2iw\,z - 1 = 0 \iff z = iw + \sqrt{1-w^2} = iw \pm f(w) \ .$$

$j(z) := iz + f(z)$ bietet sich an. Deshalb muß gelten $\hat{f}(iz + f(z)) = \hat{f}(j(z)) = f(z)$. Dies leistet natürlich $\hat{f}(z) := f \circ p(z) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(z - 1/z)^2} = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ $\square$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Dr. H. Köditz

Hannover, den 30. Mai 2005

6. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 22

Seien $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{>1}$, paarweise verschiedene Punkte und $p(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{p(z)}$ über ∞ verzweigt?

Die Riemannsche Fläche von $f(z) := \sqrt{p(z)}$ ist eine zweiblättrige verzweigte Überlagerungsfläche von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit Verzweigungspunkten über $C := \{z_1, \cdots, z_n\}$. Ist γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus C$ und u_γ die Summe aller Umlaufzahlen um alle Punkte in C, so ist die analytische Fortsetzung jedes Funktionskeimes $\bar{f}$ von $\sqrt{p(z)}$ gerade $(-1)^{u_\gamma}\bar{f}$ (wie in HA19). $\sqrt{p(z)}$ ist also genau dann über ∞ verzweigt, wenn n ungerade ist $\Box$.

Aufgabe 23

Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Jordankurve γ in X heißt *Rückkehrschnitt*, wenn sie die Fläche nicht zerlegt, d.h. wenn $X \setminus |\gamma|$ zusammenhängend ist. Die Maximalzahl paarweise disjunkter Rückkehrschnitte, deren Gesamtheit X nicht zerlegt, heißt das *Geschlecht* von X. Man ermittle das Geschlecht der Riemannschen Fläche von $\sqrt{z^4 - 1}$.

Das Geschlecht ist 1 (Torus). Wählt man einen geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\}$, so erhält man durch Liftung von γ einen Rückkehrschnitt. Man verdeutlicht sich dies durch eine Skizze wie auf S.36.

Aufgabe 24

Man ermittle die Diskriminante $\Delta(p)$ für das Polynom $p(z) := t^3 + p\,t + q$, $(p, q \in \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\Delta(p) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 0 & -2p & -3q \\ 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} = 27q^2 - 4p^3 \,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 25

a) Man zeige: Für $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, ist das Polynom $P(z,t) := t^2 + (2+az)\,t + 1 + bz \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ irreduzibel.

Für $P(z,t) = 0$ erhält man die Lösung
$t = \frac{1}{2}(-2 - az + \sqrt{(2+az)^2 - 4(1+bz)}) = -1 - \frac{a}{2}\,z + \frac{1}{2}\sqrt{a^2z^2 + 4z(a-b)}$ was für $a = b$ zur Faktorisierung $P(z,t) = (t+1)(t+1+az)$ führt. Für $a \neq b$ gilt $t = -1 - \frac{1}{2}\,az + \frac{1}{2}\sqrt{z}\sqrt{a^2z + 4(a-b)}$. Die letzte Wurzel besitzt zwei holomorphe Zweige bei $z = 0$ - keine Lösung ist bei 0 holomorph, und somit P irreduzibel.

b) Man ermittle die Puiseuxentwicklung von $P(z,t)$ für $a = 0, b = -\frac{1}{4}$ und $a = 1, b = -1$.

(i) $a = 0, b = -\frac{1}{4}$. Man erhält sofort die Puiseuxentwicklung von $P(z,t) : \varphi(\sqrt{z}) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{z}$.

(ii) $a = 1, b = -1$. Also durch

$$\varphi(\sqrt{z}) = -1 - \frac{z}{2} + \sqrt{2}\,\sqrt{z}\sqrt{1 + \frac{z}{8}} = -1 - \frac{z}{2} + \sqrt{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{z^n}{8^n}$$

die Puiseuxentwicklung.

Bemerkung: Quadratische Gleichungen kann wohl jeder lösen.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Dr. H. Köditz

Hannover, den 6. Juni 2005

7. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 26 *Satz von Liouville*
Man zeige: Ist $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Für $a \in \mathbb{C}^n, a \neq 0$, sei $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_a(z) := f(az)$ betrachtet. Diese holomorphe Funktion ist nach Voraussetzung beschränkt, und deshalb nach dem Satz von Liouville (für eine komplexe Veränderliche) konstant; und zwar $f_a(z) \equiv f(0)$. Also gilt $f(a) = f_a(1) = f(0)$ für alle $a \in \mathbb{C}^n$ $\square$.

Aufgabe 27

Für $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ betrachten wir die Potenzreihe $g(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$. Man zeige, dass diese Potenzreihe im Einheitspolyzylinder $\Delta := \Delta_{(1,\cdots,1)}(0)$ normal konvergiert und g dort also holomorph ist. Ferner zeige man:

$$g(z) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z_k} \;,\; z \in \Delta_{(1,\cdots,1)}(0) \;.$$

Beweis: Da $\{z^\nu\}$ auf Δ beschränkt ist, liefert das Lemma von Abel sofort die normale Konvergenz auf Δ, und damit auch die Holomorphie der Grenzfunktion g. Die explizite Darstellung der Funktion g gewinnt man wie folgt durch Induktion.

Für $n = 1$ handelt es sich um die geometrische Reihe. Zum Scluß $n \to n + 1$:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^{n+1}} z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n} z_{n+1}^{\nu_{n+1}} = \sum_{\nu_{n+1}=0}^{\infty} z_{n+1}^{\nu_{n+1}} \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} z_1^{\mu_1} \cdots z_n^{\mu_n} \overset{\text{IA}}{=\!=} \frac{1}{1 - z_{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - z_k} \;\square \;.$$

Aufgabe 28
Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Man zeige: Ist f in allen Punkten von U partiell nach allen Variablen $z_1, \cdots, z_n$ differenzierbar (also auf U partiell holomorph), so ist f auf U holomorph.
Hinweis: Man studiere den Beweis zu Satz 2.3. Übrigens kann auf die Voraussetzung der Stetigkeit von f verzichtet werden (ein Satz von Hartogs).

Beweis: Der Beweis von Satz 2.3 benutzt nur die partielle Holomorphie von f. Es gilt also für diese Formel die Cauchy Integralformel (CIF). Der Integrand der CIF ist eine holomorphe Funktion von $z = (z_1, \cdots, z_n)$. Nach bekannten Sätzen der Integrationstheorie folgt die Holomorphie von f $\square$.

Aufgabe 29 *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge. Man identifiziere $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ und betrachte zwei (reell) stetig differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.
Man zeige: Durch $f(z) := f_1(z) + i\, f_2(z)$, $z = (z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n)$, wird genau dann eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert, wenn

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_2(z)}{\partial y_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_j} = -\,\frac{\partial f_2(z)}{\partial x_j}\ ,\ j = 1, \cdots, n$$

gilt.

Beweis: Das ist nun (mit HA28) wirklich einfach! Für die partielle Holomorphie ist nach Funktionentheorie I die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen DGlen notwendig und hinreichend. Da nach HA28 Holomorphie und partielle Holomorphie gleichbedeutend sind, folgt die Behauptung $\square$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Dr. H. Köditz

Hannover, den 13. Juni 2005

8. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 30

Ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ der Gestalt $Q(z) = \sum_{|\nu|=m} a_\nu\, z^\nu$ heißt homogenes Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$. Betrachtet werden Polynomreihen $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ mit homogenen Polynomen Q_m von Grad m. Man zeige:

a) Gibt es zu einem $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein $M > 0$ mit $|Q_m(z_0)| < M$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ normal auf $N(z_0) := \{z = t\, z_0 \in \mathbb{C}^n : t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$.

   Beweis: Da $Q_m(z)$ ein homogenes Polynom vom Grad m ist, gilt $|Q_m(tz_0)| < M\,|t|^m$. Für $q \in (0,1)$ gilt also $|Q_m(tz_0)| < M\, q^m$ für $|t| \le q$ und erhält so normale Konvergenz auf $N(z_0)$ $\Box$.

b) Divergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ in z_0, so divergiert sie auch in jedem Punkt von $\{z = t\, z_0 \in \mathbb{C}^n : t \in \mathbb{C}, |t| > 1\}$.

   Beweis: Aus der Konvergenz der Reihe für ein $z = t_1 z_0$, $t_1 > 1$, folgt natürlich $Q_m(t_1 z_0) \to 0$ für $m \to \infty$, insbesondere ist $(Q_m(t_1 z_0))$ beschränkt. Nach (a) folgt dann die Konvergenz von $\sum Q_m(z_0)$ $\Box$.

Bemerkung: Unsere Reihe ist keine Potenzreihe.

Aufgabe 31 *Cauchy Ungleichungen*

Sei $a \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta := \Delta_r(a), r \in \mathbb{R}^n_{>0}$, ein Polyzylinder mit Zentrum a. Man zeige: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Obermenge U von $\bar{\Delta}$ holomorphe Funktion, so gelten mit $M := \max\{|f(z)| : z \in \bar{\Delta}\}$ die Cauchy-Ungleichungen

$$|\partial^\nu f(a)| = \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f(a)}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \;\le\; \frac{\nu!}{r^\nu}\, M = \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n}}\, M \;.$$

Hiermit beweise man den Satz von Liouville (HA26).

Beweis: Nach Vorl. gilt

$$\partial^\nu f(a) \;=\; \nu!\, \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_T \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{\nu_n}}\, d\zeta \;.$$

Die Substitutionen $\zeta_j = a_j + r_j e^{2\pi i t}$ ergeben mit $|\zeta_j - a_j| = r_j$ wie üblich die Behauptung. Ist nun f auf $\mathbb{C}^n$ holomorph, so gilt diese Abschätzung für jedes $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Für $|\nu| > 0$ strebt nun die Rechte Seite jeder Ungleichung gegen 0 für $r_j \to \infty$, $j = 1, \cdots, n$. Also folgt $\partial^\nu f(a) = 0$ für $|\nu| > 0$, die Funktion f ist konstant. $\Box$

Aufgabe 32

Sei $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ und $\Delta := \Delta_r(0)$. Ferner sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und zusammenhängende Umgebung von $\partial\Delta$. Man zeige: Jede in U holomorphe Funktion f ist Einschränkung einer auf $\Delta \cup U$ holomorphen Funktion $\tilde{f}$. *Hinweis:* Man weise nach, dass die Cauchy Integralformel für f die gesuchte Fortsetzung von f nach Δ liefert - siehe auch die 7. Stundenübung.

Der Beweis wurde in der 7. Stundenübung vorgestellt.

Aufgabe 33

Man zeige: Ein Ring R ist genau dann lokal, wenn seine Elemente, die keine Einheiten sind, ein Ideal I bilden. Ist R lokal, so ist I sein maximales Ideal.

Beweis: Nach Def. ist ein Ring R lokal, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt.

Sei also I ein Ideal. Da kein Ideal $J \neq R$ eine Einheit enthält, gilt also $I \supset J$ für jedes echte Ideal, und I ist deshalb das einzige maximale Ideal.

Sei R ein lokaler Ring, M sein maximales Ideal und $r \in R \backslash M$. Das Hauptideal $(r) = \{ra + na : r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\}$ ist dann der ganze Ring R, da es sonst in einem maximalen Ideal $M^* \neq M$ läge. Also ist r eine Einheit und $M = I$ $\square$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Dr. H. Köditz

Hannover, den 20. Juni 2005

9. Übungsblatt zur Funktionentheorie II (Lösungshinweise)

Aufgabe 34

Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der Ring der ganzen Funktionen.

a) Man bestimme die Einheiten und die irreduziblen Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Die Einheiten sind genau die nullstellenfreien Funktionen. Die irreduziblen Elemente sind die Funktionen mit genau einer Nullstelle die zudem von erster Ordnung ist.

b) Man zeige, dass $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ weder noethersch noch faktoriell ist.

Der Ring ist nicht faktoriell, da es Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen (z.B. $f(z) = \sin z$) gibt. Diese sind nicht endliches Produkt irreduzibler Element - vgl. (a).

Der Ring ist nicht noethersch. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : f(k) = 0 \text{ für } k \geq n\}$. I_n ist nat. ein Ideal und es gilt $I_m \subsetneqq I_n$ für $m < n$ - für $f_k(z) := \frac{\sin \pi z}{z-k}$ ist nämlich $f_k \in I_{k+1}$ und $f_k \notin I_j$ für $j \leq k$. $I := \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ ist dann ein nicht endlich erzeugtes Ideal. Gilt $f_1, \cdots, f_n \in I$, so gibt es ein I_k, das alle enthält. Kein $f \in I_{k+1} \setminus I_k$ ist dann durch unsere Funktionen darstellbar. $\Box$

Aufgabe 35

Man beweise Theorem 2.2 mit Theorem 2.1.

Beweis: Seien also f, g holomorph auf $\Delta_r(0), r = (r_1, \cdots, r_n, \rho)$, und g regulär von der Ordnung k. Nach Theorem 2.1 gibt es ein eindeutig bestimmtes Weierstraß-Polynom h und eine Einheit u mit $g = hu$. Zu zeigen ist die Existenz eines holomorphen q und eines $r \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ (mit Grad kleiner k) und $f = qg + r = qu\,h + r$. OBdA kann man also g als Weierstraß-Polynom voraussetzen. Zu $0 < \delta < \rho$ gibt es $\delta_1, \cdots, \delta_n > 0$ derart, dass für $|z_j| < \delta_j, |t| < \delta$ stets $g(z,t) \neq 0$ gilt. Die Funktion

$$q(z,t) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\delta} \frac{f(z,\tau)}{g(z,\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

iat dann holomorph auf dem Polyzylinder $\Delta_{(\delta_1,\cdots,\delta_n,\delta)}(0)$. Für $r := f - qg$ gilt dann die Darstellung

$$r(z,t) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\delta} \frac{f(z,\tau)}{g(z,\tau)} \left[\frac{g(z,\tau) - g(z,t)}{\tau - t}\right] d\tau \;.$$

Nun ist $g(z\tau) - g(z,t) = (\tau^k - t^k) + a_1(z)(\tau^{k-1} - t^{k-1} + \cdots$ ein Polynom (in t) vom Grad k das durch $\tau - t$ teilbar ist. Unser Bruch, und damit auch r ist also ein Polynom dessen Grad kleiner als k ist $\Box$.

Aufgabe 36

Seien $g_1, \cdots, g_k \in \mathbb{C}\{z\}, z = (z_1, \cdots, z_n)$. Man zeige: Das Produkt $g := g_1 \cdots g_k$ ist genau dann regulär in z_n, wenn alle Faktoren $g_1, \cdots, g_k$ regulär in z_n sind.

Beweis: Es genügt der Beweis für $k = 2$ - dann Induktion. Ist $g := g_1 g_2$ regulär in z_n, also $g(0, \cdots, z_n) \not\equiv 0$, so gilt dies nat. auch für g_1, g_2. Ist umgekehrt $g_1(0, \cdots, z_n) \not\equiv 0$ und $g_2(0, \cdots, z_n) \not\equiv 0$, so folgt auch $g(0, \cdots, z_n) \not\equiv 0$ nach dem Identitätssatz $\Box$.

Aufgabe 37

Sei $g(z,t) := t^2 - 2\,t + z \in \mathbb{C}\{z,t\}$. Man bestimme die Weierstraß-Zerlegung (nach Theorem 2.1), d.h. man ermittle ein Weierstraß Polynom h und eine Einheit u mit $g = hu$.

Offensichtlich ist $g(z,t) = (t - (1 - \sqrt{1-z}))(t - (1 + \sqrt{1-z}))$ für $|z| < 1$. Hierbei sei der Wurzelzweig mit $\sqrt{1} = 1$ gewählt. Also ist $h(z,t) = t - (1 - \sqrt{1-z})$ und $u(z,t) = t - (1 + \sqrt{1-z})$ $\Box$.