Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 11. April 2005

1. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Abgabe am 18. April 2005

Aufgabe 1

Seien $G, G^* \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : G \to G^*$ eine bijektive und holomorphe Funktion. Man zeige, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : G^* \to G$ ebenfalls holomorph ist.
Hinweis: Gilt $G, G^* \subset \mathbb{C}$, so gilt die Aussage - wie aus Funktionentheorie I bekannt.

Aufgabe 2

Bekanntlich ist die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ als Teilgebiet von $\mathbb{C}$ eine Riemann'sche Fläche mit der Karte $\iota : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\iota(z) = z$.
Man zeige, dass $\mathbb{D}$ durch die Karte $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \frac{r}{1-r}\, e^{i\vartheta}, (z = r\, e^{i\vartheta})$, ebenfalls zur Riemann'schen Fläche wird, und dass die durch ι und φ definierten Atlanten nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3

Man formuliere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass zwei Paare komplexer Zahlen ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' dasselbe Gitter definieren.

Aufgabe 4

Seien X, Y Riemann'sche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Man zeige, dass die dadurch induzierte Abbildung

$$f^* \ : \ \mathcal{O}(Y) \ \to \ \mathcal{O}(X) \ , \ f^*(\varphi) \ := \ f \circ \varphi$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

---

http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~koeditz/Funk2/Funkth2.htm

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 18. April 2005

2. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Abgabe am 25. April 2005

Aufgabe 5

Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Man zeige: Ist X kompakt, so ist f surjektiv und Y ebenfalls kompakt.
Bemerkung: Man beachte Korollar 1.4 der Vorlesung.

Aufgabe 6

Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, also eine rationale Funktion. Ist $f = p/q$ mit teilerfremden Polynomen p und q, so definiert man den Grad von f durch: $d := \text{grad } f := \max(\text{grad } p, \text{grad } q)$. Man zeige: Für alle $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt

$$d = \sum_{z \in f^{-1}(c)} \text{ord}_z(f) \ .$$

Hinweis: Vielleicht ist es naheliegend, die Behauptung zunächst für $c = 0, \infty$ zu zeigen.

Aufgabe 7

Sei X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$, und α, β seien Wege in X, die x_0 mit x_1 verbinden. Man zeige:

$$\alpha \simeq \beta \implies \alpha_* = \beta_* \ .$$

Ist die Umkehrung auch richtig?
Hinweis: 2. Gruppenübung.

Aufgabe 8

Seien L, L' Gitter in $\mathbb{C}$. Man sagt, eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induziert eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$, wenn aus $z \equiv \zeta \mod L$ stets $f(z) \equiv f(\zeta) \mod L'$ folgt.
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei nun $f_\alpha(z) := \alpha z$. Sei $H(L, L') := \{\alpha \in \mathbb{C} : f_\alpha \text{ induziert ein } \tilde{f}_\alpha\}$.

a) Man zeige: $H(L, L') = \{\alpha \in \mathbb{C} \ : \ \alpha L \subset L'\}$.
b) Sei nun $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $L = L' = \{m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Nach (a) gilt nun $\mathbb{Z} \subset H(L, L')$. Man zeige:

   $H(L, L') \neq \mathbb{Z}$ genau dann, wenn τ einer quadratischen Gleichung $\tau^2 + p\tau + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ genügt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 25. April 2005

3. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Abgabe am 2. Mai 2005

Aufgabe 9

Gegeben seien die beiden Gitter $L := \{m+n\,i : m,n \in \mathbb{Z}\}$, $L' := \{m+2n\,i : m,n \in \mathbb{Z}\}$. Man zeige, dass die Riemannschen Flächen $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ nicht biholomorph äquivalent sind.

Aufgabe 10

Sind X, Y topologische Räume, $y_0 \in Y$, und ist $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung, so wird durch $p_*([\gamma]) := [p \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, p(y_0))$ definiert.

a) Man zeige: Ist $p : Y \to X$ eine Überlagerung der Riemannschen Flächen X, Y, so ist p_* injektiv.

b) Man ermittle alle Riemannschen Flächen X für die eine Überlagerung $p : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ existiert, und beschreibe diese Überlagerungen.

Hinweis: Satz 1.11 und Satz 1.12 beachten.

Aufgabe 11

Seien X, Y Riemannsche Flächen. Eine Überlagerung $p : Y \to X$ heißt *eigentlich*, wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist. Man zeige:

a) Für jedes $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich.

b) p ist surjektiv.

c) Die Anzahl der Elemente von $p^{-1}(x)$ ist für jedes x gleich (Bedeckungszahl).

Aufgabe 12

Man zeige: Die Abbildung $\tan : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{i, -i\}$ ist eine Überlagerung.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 2. Mai 2005

4. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Abgabe am 9. Mai 2005

Aufgabe 13

a) Man ermittle eine biholomorphe Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

b) Man zeige: Mit $p(z) := e^{2\pi i z}$ ist $\varphi \circ p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ eine universelle Überlagerung.

c) Nach HA12 ist tan ebenfalls eine Überlagerungsabbildung. Man ermittle ein $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\tan \circ \psi = \varphi \circ p$.

Aufgabe 14

Man beweise mit HA11 die HA6.
Bemerkung: Vorsicht! Rationale Funktionen vom Grad größer als 1 sind nicht lokal topologisch.

Aufgabe 15

Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung. Man zeige: Es gibt eine holomorphe Abbildung $g : X \to \mathbb{C}$ mit $e^g = f$, d.h. einen holomorphen Logarithmus von f.

Aufgabe 16

a) Man zeige, dass $\exp : \mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \to G := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ eine Überlagerung ist, und ermittle die Gruppe der Decktransformationen dieser Überlagerung.

b) Gegeben seien die Wege $\alpha, \beta : [0, 1] \to G$, $\alpha(t) := 1 - \frac{1}{2} e^{2\pi i t}$, $\beta(t) := \frac{1}{2} e^{2\pi i t}$. Man skizziere die Liftungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = -\ln 2$, zeige so, dass die Liftungen von $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ nicht homotop sind und folgere, dass $\pi_1(G, \frac{1}{2})$ nicht kommutativ ist.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 9. Mai 2005

5. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Abgabe am 23. Mai 2005

Aufgabe 17 *Eulersche Gamma-Funktion*

Für $\operatorname{Re} z > 0$ wird durch $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ die (holomorphe) Gamma-Funktion definiert. Man zeige $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, $(\operatorname{Re} z > 0)$, und folgere, dass $\Gamma(z)$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden kann. Man ermittle die Polstellen nebst Polstellenordungen und Residuen.

Aufgabe 18

Sei $\bar{g} \in \mathcal{O}_{z_0}$ Keim einer in $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorphen Funktion g mit $g(z_0) =: w_0$. Man zeige:

a) Durch $\bar{g}^*(\bar{f}) := \overline{f \circ g}$ wird ein Ringhomomorphismus $\bar{g}^* : \mathcal{O}_{w_0} \to \mathcal{O}_{z_0}$ definiert.

b) $\bar{g}^*$ ist genau dann injektiv, wenn g nicht konstant ist, und genau dann surjektiv, wenn $g'(z_0) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 19

Sei f ein auf einer Umgebung von 0 definierter Zweig von $\sqrt{z^2 - 1}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ mit Anfangs- und Endpunkt 0. Man zeige, dass f längs γ holomorph fortgesetzt werden kann und berechne die Fortsetzung in Abhängigkeit von $\operatorname{Uml}(\gamma, 1)$ und $\operatorname{Uml}(\gamma, -1)$.
Hinweis: Man kann das Fortsetzungsverhalten von $\sqrt{z}$ als bekannt voraussetzen (Gruppenübung).

Aufgabe 20 *Klassische Form des Monodromiesatzes*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, und $\bar{f} \in \mathcal{O}_{z_0}$ ein holomorpher Funktionskeim, der sich längs jeden Weges in G holomorph fortsetzen läßt. Man zeige, dass $\bar{f}$ der Keim einer auf ganz G holomorphen Funktion ist.

Aufgabe 21

Sei $f : \mathbb{D} := \{ z : |z| < 1 \} \to \mathbb{C}$ der Zweig von $\sqrt{1 - z^2}$ mit $f(0) = 1$. Zu $X := \widehat{\mathbb{C}}$ und $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $p(z) := \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ finde man Abbildungen j und $\hat{f}$ so, dass $\widehat{\mathbb{C}}$ zur verzweigten meromorphen Fortsetzung von f wird.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 23. Mai 2005

6. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Aufgabe 22

Seien $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{>1}$, paarweise verschiedene Punkte und $p(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{p(z)}$ über ∞ verzweigt?

Aufgabe 23

Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Jordankurve γ in X heißt *Rückkehrschnitt*, wenn sie die Fläche nicht zerlegt, d.h. wenn $X \setminus |\gamma|$ zusammenhängend ist. Die Maximalzahl paarweise disjunkter Rückkehrschnitte, deren Gesamtheit X nicht zerlegt, heißt das *Geschlecht* von X. Man ermittle das Geschlecht der Riemannschen Fläche von $\sqrt{z^4 - 1}$.

Aufgabe 24

Man ermittle die Diskriminante $\Delta(p)$ für das Polynom $p(z) := t^3 + p\,t + q$, $(p, q \in \mathbb{C})$.

Aufgabe 25

a) Man zeige: Für $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$, ist das Polynom $P(z,t) := t^2 + (2 + az)\,t + 1 + bz \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ irreduzibel.

b) Man ermittle die Puiseuxentwicklung von $P(z,t)$ für $a = 0, b = -\frac{1}{4}$ und $a = 1, b = -1$.

Bemerkung: Quadratische Gleichungen kann wohl jeder lösen.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 30. Mai 2005

7. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Aufgabe 26 *Satz von Liouville*

Man zeige: Ist $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 27

Für $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ betrachten wir die Potenzreihe $g(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$. Man zeige, dass diese Potenzreihe im Einheitspolyzylinder $\Delta := \Delta_{(1,\cdots,1)}(0)$ normal konvergiert und g dort also holomorph ist. Ferner zeige man:

$$g(z) \ = \ \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z_k} \ , \ z \in \Delta_{(1,\cdots,1)}(0) \ .$$

Aufgabe 28

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Man zeige: Ist f in allen Punkten von U partiell nach allen Variablen $z_1, \cdots, z_n$ differenzierbar (also auf U partiell holomorph), so ist f auf U holomorph.
Hinweis: Man studiere den Beweis zu Satz 2.3. Übrigens kann auf die Voraussetzung der Stetigkeit von f verzichtet werden (ein Satz von Hartogs).

Aufgabe 29 *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge. Man identifiziere $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ und betrachte zwei (reell) stetig differenzierbare Funktionen $f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$.
Man zeige: Durch $f(z) := f_1(z) + i\, f_2(z)$, $z = (z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_n = x_n + iy_n)$, wird genau dann eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert, wenn

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_2(z)}{\partial y_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_1(z)}{\partial y_j} = -\,\frac{\partial f_2(z)}{\partial x_j} \ , \ j = 1, \cdots, n$$

gilt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 6. Juni 2005

8. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Aufgabe 30

Ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ der Gestalt $Q(z) = \sum_{|\nu|=m} a_\nu z^\nu$ heißt homogenes Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}_0$. Betrachtet werden Polynomreihen $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ mit homogenen Polynomen Q_m von Grad m. Man zeige:

a) Gibt es zu einem $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein $M > 0$ mit $|Q_m(z_0)| < M$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ normal auf $N(z_0) := \{z = t\, z_0 \in \mathbb{C}^n : t \in \mathbb{C}, |t| < 1\}$.

b) Divergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z)$ in z_0, so divergiert sie auch in jedem Punkt von $\{z = t\, z_0 \in \mathbb{C}^n : t \in \mathbb{C}, |t| > 1\}$.

Bemerkung: Unsere Reihe ist keine Potenzreihe.

Aufgabe 31 *Cauchy Ungleichungen*

Sei $a \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta := \Delta_r(a), r \in \mathbb{R}^n_{>0}$, ein Polyzylinder mit Zentrum a. Man zeige: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Obermenge U von $\bar{\Delta}$ holomorphe Funktion, so gelten mit $M := \max\{|f(z)| : z \in \bar{\Delta}\}$ die CAUCHY-Ungleichungen

$$|\partial^\nu f(a)| = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(a)}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \leq \frac{\nu!}{r^\nu} M = \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n}} M .$$

Hiermit beweise man den Satz von Liouville (HA26).

Aufgabe 32

Sei $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ und $\Delta := \Delta_r(0)$. Ferner sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und zusammenhängende Umgebung von $\partial\Delta$. Man zeige: Jede in U holomorphe Funktion f ist Einschränkung einer auf $\Delta \cup U$ holomorphen Funktion $\tilde{f}$.

Hinweis: Man weise nach, dass die Cauchy Integralformel für f die gesuchte Fortsetzung von f nach Δ liefert - siehe auch die 7. Stundenübung.

Aufgabe 33

Man zeige: Ein Ring R ist genau dann lokal, wenn seine Elemente, die keine Einheiten sind, ein Ideal I bilden. Ist R lokal, so ist I sein maximales Ideal.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 13. Juni 2005

9. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Aufgabe 34

Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der Ring der ganzen Funktionen.

a) Man bestimme die Einheiten und die irreduziblen Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

b) Man zeige, dass $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ weder noethersch noch faktoriell ist.

Aufgabe 35

Man beweise Theorem 2.2 mit Theorem 2.1.

Aufgabe 36

Seien $g_1, \cdots, g_k \in \mathbb{C}\{z\}, z = (z_1, \cdots, z_n)$. Man zeige: Das Produkt $g := g_1 \cdots g_k$ ist genau dann regulär in z_n, wenn alle Faktoren $g_1, \cdots, g_k$ regulär in z_n sind.

Aufgabe 37

Sei $g(z,t) := t^2 - 2\,t + z \in \mathbb{C}\{z,t\}$. Man bestimme die Weierstraß-Zerlegung (nach Theorem 2.1), d.h. man ermittle ein Weierstraß Polynom h und eine Einheit u mit $g = hu$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. H. Köditz

Hannover, den 20. Juni 2005

10. Übungsblatt zur Funktionentheorie II

Aufgabe 38
Man zeige: Ist V Mengenkeim zum Ideal I, so ist I im Ideal $I(V(I))$ enthalten, d.h.

$$I \ \subset \ I(V(I)) \ .$$

Aufgabe 39
Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $X \subset U$. Man zeige, dass X genau dann analytisch ist, wenn X lokal analytisch und abgeschlossen in U ist. Man gebe ein Beispiel einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ und einer lokal analytischen, aber nicht analytischen Teilmenge $X \subset U$ an.

Aufgabe 40
Seien I_1, I_2 (echte) Ideale in $\mathcal{O}_{n,0}$. Man zeige:

$$I(V(I_1) + V(I_2)) \ \subset \ I(V(I_1) \cap V(I_2)) \ ,$$

und zeige, dass $I_1 := (z_1 - z_2^2)$, $I_2 := (z_1)$ (in $\mathcal{O}_{2,0}$) Beispiele für eine echte Inklusion sind.
„Geometrische“ Interpretation!?

Aufgabe 41
Man betrachte $V(f_j)$ für

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad & f_1(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 - z_2 z_3 \ , \\ f_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad & f_2(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2 - z_3^3 \ . \end{aligned}$$

Man skizziere $V(f_j) \cap \mathbb{R}^3$ (d.h. $z_j = x_j \in \mathbb{R}$) und bestimme die Codimension von $V(f_j) \subset \mathbb{C}^3$ im Nullpunkt.