Funktionentheorie

Sommersemester 2004

W. Ebeling

Literatur

- L. Ahlfors: Complex Analysis, McGraw-Hill, 1966.
- H. Cartan: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexer Veränderlichen. BI Wissenschaftsverlag, 1966.
- W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie. 6. Auflage, Vieweg, 1992.
- W. Forst, D. Hoffmann: Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer, 2002.
- E. Freitag, R. Busam: Funktionentheorie 1. 3. Auflage, Springer, 2000.
- K. Jänich: Funktionentheorie. 5. Auflage, Springer, 1999.
- R. Remmert, G. Schumacher: Funktionentheorie 1. 5. Auflage, Springer, 2002.

1 Die komplexen Zahlen

Funktionentheorie ist die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen komplexer Veränderlicher. Die komplexen Zahlen wurden bereits in Analysis I eingeführt. Man kann sie auf verschiedene Weise konstruieren. Um die folgenden Ausführungen nicht ganz zur Wiederholung werden zu lassen, hier eine andere Art:

Es sei

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Dabei ist $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ der Ring der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

Für Matrizen sind bekanntlich Addition und Multiplikation erklärt, damit auch auf $\mathbb{C}$.

Satz 1.1 *Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper. Er heißt* Körper der komplexen Zahlen*.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit der Menge $\mathbb{C}$ gegenüber den genannten Operationen kann man ohne Mühe nachrechnen. Die multiplikative Invertierbarkeit von Elementen $\neq 0$ ergibt sich so: Es gilt

$$a^2 + b^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0 \text{ für } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0,$$

also ist in diesem Fall die Matrix invertierbar. □

Offenbar ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und besitzt als solcher die $\mathbb{R}$-Basis

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jedes Element von $\mathbb{C}$ kann also so geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot 1 + b \cdot i, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & a \cdot 1 \end{array}$$

ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Deshalb ist $\varphi(\mathbb{R})$ ein zu $\mathbb{R}$ isomorpher Unterkörper von $\mathbb{C}$. Wir fassen damit $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf und schreiben a statt $a \cdot 1$.

Jede komplexe Zahl z lässt sich also auf eindeutige Weise schrieben als

$$z = x + y \cdot i = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Aus dieser Definition lässt sich leicht berechnen, wie in der neuen Schreibweise die Addition und Multiplikation aussehen: Für $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ist

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $i^2 = -1$.

Wir haben daher mit $\mathbb{C}$ einen $\mathbb{R}$ enthaltenden Körper konstruiert, in dem die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ Lösungen hat, nämlich $\pm i$.

Bemerkung 1.1 Die komplexen Zahlen wurden im 16. Jahrhundert von Cardano und Bombelli eingeführt. Das Symbol i (für *imaginär*) stammt von L. Euler (1707–1783). Der Körper $\mathbb{C}$ ist der (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Körper, der $\mathbb{R}$ als Unterkörper enthält und als $\mathbb{R}$-Vektorraum endliche Dimension hat.

Zur Bezeichnung komplexer Zahlen verwenden wir oft die Buchstaben z oder w:

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl $\mathrm{Re}(z) := x$ heißt *Realteil*, $\mathrm{Im}(z) := y$ *Imaginärteil* von z.

Geometrisch veranschaulichen lassen sich die komplexen Zahlen mit Hilfe der *Gaußschen* (oder *komplexen*) *Zahlenebene*. Die x-Achse repräsentiert den Unterkörper $\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$, sie heißt daher auch *reelle Achse*; die y-Achse repräsentiert die Zahlen von der Form iy mit $y \in \mathbb{R}$, die wir *rein imaginär* nennen; sie heißt die *imaginäre Achse*. Der Addition komplexer Zahlen entspricht die Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.

Der Körper $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper. Es gibt aber keine Ordnungsrelation $<$, bezüglich der $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper ist. Denn: In einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv (siehe Analysis I). Wäre $\mathbb{C}$ bezüglich $<$ angeordnet, so müsste $0 < 1^2 = 1$ und $0 < i^2 = -1$ und damit auch $0 < 1 + (-1) = 0$ gelten.

Dagegen lässt sich der Begriff des Betrages von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen. Vorher führen wir noch die komplexe Konjugation ein. Unter *komplexer Konjugation* versteht man die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \bar{\cdot}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = x + iy & \longmapsto & \overline{z} = x - iy \end{array}.$$

Die komplexe Zahl $\overline{z}$ heißt auch die *konjugiert komplexe Zahl* zu z. Geometrisch bedeutet die komplexe Konjugation die Spiegelung an der reellen Achse.

Satz 1.2 *Die komplexe Konjugation hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\bar{\cdot}$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-linearer Automorphismus von* $\mathbb{C}$.

(ii) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\overline{\overline{z}} = z$, *d.h.* $\bar{\cdot}$ *ist involutorisch.*

(iii) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(iv) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \overline{z}_1 + \overline{z}_2 &= \overline{z_1 + z_2}, \\ \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 &= \overline{z_1 \cdot z_2}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2 Die Aussagen (iii) und (iv) besagen, dass $\bar{\cdot}$ ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ist, d.h. einer, der $\mathbb{R}$ festlässt.

Weitere Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\ \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}). \end{aligned}$$

Falls $z = x + iy$,

$$\overline{z}z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen nun für $z = x + iy$

$$|z| = ||(x, y)||_{\text{eukl}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Die reelle Zahl $|z|$ heißt der *Betrag* von z. Der Betrag in $\mathbb{C}$ hat die schon vom Betrag reeller Zahlen bekannten Eigenschaften.

Satz 1.3 *Für komplexe Zahlen z, z_1, z_2 gilt:*

(i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(ii) $|\alpha z| = |\alpha||z|$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung).*

(iv) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Bemerkung 1.3 (i)–(iii) sind die Eigenschaften einer Norm, (i)–(iii) besagen also, dass $\mathbb{C}$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Beweis. (i)–(iii) gelten, da $|z| = ||(x, y)||$ euklidisch.
Zu (iv):

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

□

Wir halten noch fest:

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}} \overline{z} = \frac{1}{|z|^2} \overline{z}.$$

Aufgrund der Eigenschaften der komplexen Konjugation können Gleichungen in x, y umgeschrieben werden in Gleichungen in z und $\overline{z}$.

Beispiel 1.1 Kreis um $a = a_1 + ia_2$ vom Radius r:

$$\begin{aligned} D_r(a) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a|^2 = r^2\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, (z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = r^2\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2\} \end{aligned}$$

In der Ebene kann man bekanntlich *Polarkoordinaten* einführen (siehe Analysis I). Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lassen sich in der Form

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi \text{ Winkel zur } x\text{-Achse},$$

schreiben. Sieht man die Ebene als komplexe Zahlenebene an, so ergibt das die Darstellung

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Dabei fassen wir $e^{i\varphi}$ zunächst als abkürzende Schreibweise auf. Später werden wir auch die komplexe Exponentialfunktion einführen.

Der Winkel ist leider nicht eindeutig bestimmt, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}.$$

Für $z = e^{i\varphi} \neq 0$ definiert man das *Argument*

$$\arg(z) := [\varphi] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Das Argument $\arg(z)$ ist also eine Restklasse und sie enthält alle möglichen Winkel φ, für die $z = re^{i\varphi}$ ist.

In dieser Schreibweise erhalten wir für das Produkt von $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\quad + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Dabei wurden die Additionstheoreme verwendet. Damit ist auch die geometrische Interpretation der Multiplikation klar: Man multipliziert zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Argumente addiert und ihre Beträge multipliziert.

Für das Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} \left|z^{-1}\right| &= \frac{1}{|z|}, \\ \arg(z^{-1}) &= -\arg(z). \end{aligned}$$

Als Anwendung bestimmen wir die n-ten Einheitswurzeln. Eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$ nennt man eine *n-te Einheitswurzel.* Es sei $z = re^{i\varphi}$. Es gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = 1 \Leftrightarrow r^n = 1, \text{d.h.}\, r = 1, \text{ und } n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Es gilt also

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die aufgezählten Elemente sind aber nicht alle paarweise verschieden; vielmehr ist

$$e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.4 *Es gibt genau n n-te Einheitswurzeln, nämlich*

$$e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aufgabe 1.1 Man skizziere die n-ten Einheitswurzeln für $n \leq 6$!

Aufgabe 1.2 Wie sehen die Lösungen der Gleichung

$$z^n = a, \quad a = re^{i\varphi} \neq 0,$$

aus?

2 Holomorphe Funktionen

Es sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. In Analysis II haben wir Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^m$ betrachtet. In der Funktionentheorie beschränken wir uns auf den Fall $n = m = 2$, und wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir werden im Folgenden stets $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{C}$ auffassen.

Wir können damit alle Begriffe der Topologie für die Menge der komplexen Zahlen übernehmen. Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, so ist definiert, was eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist.

Andererseits kann man eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ nun als eine Funktion einer komplexen Veränderlichen auffassen und damit Begriffe aus Analysis I auf solche Funktionen übertragen. Das geschieht beim Begriff der komplexen Differenzierbarkeit, den wir nun betrachten wollen.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in U$.

Definition Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in z_0 *komplex differenzierbar* genau dann, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert.}$$

Dabei ist der Grenzwert über alle $z \in U$ mit $z \neq z_0$ zu bilden. (Der Grenzwert ist wohldefiniert, denn wir wissen ja, wie man Grenzwerte in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bildet, und der Quotient ist der Quotient zweier komplexer Zahlen.)

Existiert der genannte Limes, so wird er mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

Eine äquivalente Formulierung ist: f ist in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine in z_0 stetige Funktion $r : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + \alpha \cdot (z - z_0) + r(z)(z - z_0)$$

und

$$r(z_0) = 0.$$

Diese Formulierung entspricht der Formulierung in Analysis II. Sie besagt, dass es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ geben muss, so dass die Funktion

$$r(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \alpha & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0, \end{cases}$$

in z_0 stetig ist, d.h. es muss ein $\alpha \in \mathbb{C}$ geben, so dass gilt

$$\lim_{z \to z_0} r(z) = 0.$$

Das ist aber gerade die Bedingung der obigen Definition.

Eine weitere Formulierung: f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$$

für alle $z \in U$ gibt.

Diese Formulierung erhält man, indem man

$$\Delta(z) := \alpha + r(z)$$

setzt.

Erinnern wir uns nun an die Definition der Differenzierbarkeit aus Analysis II. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann heißt f differenzierbar in $z_0 \in U$ genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine in z_0 stetige Abbildung $r : U \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + T(z - z_0) + r(z)||z - z_0||$$

und

$$r(z) = 0.$$

Zum Vergleich mit der obigen Definition betrachten wir den Fall $n = m = 2$. Der wesentliche Unterschied zu der obigen Definition (wenn man von der Norm absieht, die aber keine Rolle spielt) besteht darin, dass hier die Existenz einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gefordert wird.

Wir haben $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ definiert. Die Menge $\mathbb{C}$ ist ein 1-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$; jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist daher die Multiplikation mit einem komplexen Skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ (warum?). Komplexe Differenzierbarkeit bedeutet also die Approximierbarkeit durch eine $\mathbb{C}$-*lineare Abbildung.*

Wann ist eine reell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar? Dazu untersuchen wir die Frage, welche der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, also der Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$\mathbb{C}$-linear sind.

Wir identifizieren im Folgenden die komplexe Zahl $x+iy$ mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{C}$-linear genau dann, wenn für jede komplexe Zahl $\lambda + i\mu$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \left[(\lambda + i\mu) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = (\lambda + i\mu) \cdot \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\cdot$ die Multiplikation in $\mathbb{C}$! Da das Herausziehen reeller Skalare unproblematisch ist, reduziert sich das Problem auf: Wann ist

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \left[i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = i \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2?$$

Wegen

$$i \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sind vertauschbar.}$$

Damit erhalten wir:

Lemma 2.1 *Die durch die Matrix*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

beschriebene $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $d = a$ und $c = -b$ gilt.

Anders ausgedrückt: Die Menge der $\mathbb{C}$-linearen $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Menge ist gerade wieder $\mathbb{C}$, siehe §1. Dies sind alle $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, da jede solche $\mathbb{C}$-lineare Abbildung automatisch $\mathbb{R}$-linear ist.

Durch Vergleich der Definitionen von komplexer und reeller Differenzierbarkeit erhalten wir:

Satz 2.1 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f in $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar und die Ableitung $f'(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear ist.*

Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar. Schreiben wir $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

so lautet die Jacobimatrix von f in z_0:

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir aus Lemma 2.1 den folgenden Satz.

Satz 2.2 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ wie oben. Dann ist f genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und folgende* Cauchy-Riemann-Gleichungen *gelten:*

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Definition Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt genau dann *holomorph in U*, wenn sie in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist.

Satz 2.3 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^2$ sei als reelle Funktion stetig partiell differenzierbar und es gelten die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x \text{ in ganz } U.$$

Dann ist f holomorph in U.

Beweis. Aus der Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen folgt die reelle Differenzierbarkeit (Analysis II). Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.2. □

Beispiele 2.1 (i) Konstante Funktionen f sind holomorph auf $\mathbb{C}$.

(ii) Die Identität $f(z) = z = x + iy$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

(iii) Die Funktion

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3,$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Man rechnet nach, dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt sind.

(iv) Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist nirgends komplex differenzierbar: Es gilt überall $u_x \neq v_y$. (Die komplexe Konjugation ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.)

Die *komplexe Exponentialfunktion* definieren wir wie folgt:

$$\exp z := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Also ist exp holomorph in $\mathbb{C}$.

Wir berechnen nun die komplexen Ableitungen. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man als Ableitung einer holomorphen Funktion $f(z) = u + iv$:

$$f'(z) = u_x + iv_x.$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}(z^3)' &= 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3(x+iy)^2 = 3z^2,\\ (e^z)' &= e^z,\end{aligned}$$

wie im Reellen.

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned}\cos z &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\\ \sin z &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}e^{iz} &= e^{-y}(\cos x + i\sin x),\\ e^{-iz} &= e^{y}(\cos x - i\sin x).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x + \frac{i}{2}(e^{-y} - e^y)\sin x,\\ \sin z &= \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)\sin x + \frac{i}{2}(e^y - e^{-y})\cos x.\end{aligned}$$

Für reelle z ergibt sich damit die alte Definition. Die Funktionen cos und sin sind holomorph in $\mathbb{C}$ und es gelten die üblichen Regeln:

$$\begin{aligned}(\cos z)' &= -\sin z,\\ (\sin z)' &= \cos z.\end{aligned}$$

Die folgenden Differentiationsregeln beweist man wie in Analysis I.

Satz 2.4 *Die Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion $f + g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(ii) *Die Funktion $f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit*

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

Satz 2.5 (Kettenregel) *Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(U) \subset V$; f sei in $z_0 \in U$ und g in $f(z_0) \in V$ komplex differenzierbar.*

Dann ist $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(Z_0).$$

Satz 2.6 *Ist $f : U \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar und $f(z_0) \neq 0$, so ist $\frac{1}{f}$ in einer Umgebung von z_0 erklärt, in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. Ist $z = x + iy$, so gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

also

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Daher ist

$$u_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Daraus leitet man sofort $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ in U ab. Daher ist die obige Funktion holomorph in U und es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z}\right)' &= u_x + iv_x = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(y + ix)^2}{(y - ix)(y + ix)(y - ix)(y + ix)} = \frac{1}{i^2(x + iy)^2} = -\frac{1}{z^2}.\end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt daher aus der Kettenregel. □

Satz 2.7 (Quotientenregel) *Sind $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : U \to \mathbb{C}$ beide in z_0 komplex differenzierbar und ist $g(z_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Korollar 2.1 *Komplexe Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und es gilt*

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

Rationale Funktionen sind in ihrem jeweiligen Definitionsbereich holomorph; die Ableitung einer rationalen Funktion ist wieder rational.

Bemerkung 2.1 Wir geben noch einen anderen naiven Beweis für die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $z_0 \in U$. Nach Definition gilt dann

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Dies besagt: Durchläuft z irgendeine gegen z_0 konvergente Folge in U, so durchläuft der Differenzenquotient eine gegen $f'(z_0)$ konvergente Folge. Dabei kann die gegen z_0 konvergente Folge ganz beliebig sein.

1) Wir können z.B. nur reelle Werte für die Differenz $z - z_0$ zulassen:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0,\, h\,\text{reell}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

2) Wir können aber auch nur rein imaginäre Werte für $z - z_0$ zulassen:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0,\, h\,\text{reell}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0),$$

da aus $z_0 = x_0 + iy_0$ folgt: $z_0 + ih = x_0 + i(y_0 + h)$. Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil der beiden Darstellungen von $f'(z_0)$ zeigt, dass in z_0 die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x$$

gelten.

Wir brauchen für das Folgende einen Satz, der zur Linearen Algebra gehört. Dazu noch eine Definition.

Definition Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$-*antilinear* genau dann, wenn für alle $z_1,\, z_2,\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(\lambda z_1 + \mu z_2) = \overline{\lambda} f(z_1) + \overline{\mu} f(z_2).$$

Bemerkung 2.2 Aus

$$f(z) = f(z \cdot 1) = \overline{z} \cdot f(1)$$

folgt, dass eine $\mathbb{C}$-antilineare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $f(z) = a\overline{z}$ für ein $a \in \mathbb{C}$ ist.

Satz 2.8 *Jede* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung*

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

lässt sich auf genau eine Weise als Summe einer $\mathbb{C}$-linearen und einer $\mathbb{C}$-antilinearen Abbildung schreiben, d.h.: Zu A gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen A_1 und A_2, so dass für alle $z \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$Az = A_1 \cdot z + A_2 \cdot \overline{z}.$$

(Dabei steht links die Anwendung der Matrix A auf den Vektor z und rechts die Multiplikation in $\mathbb{C}$.)

Beweis. Sind $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ gegeben, so ist die Abbildung $z \mapsto A_1 \cdot z + A_2 \cdot \overline{z}$ $\mathbb{R}$-linear:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \lambda z &= \lambda A_1 \cdot z, \\ A_2 \cdot \overline{\lambda z} &= \lambda A_2 \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$, da $\lambda = \overline{\lambda}$.

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist aber eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf einer Basis, z.B. auf

$$1 = (1, 0) \text{ und } i = (0, 1).$$

Die behauptete Gleichung gilt also genau dann wenn

$$\begin{aligned} a + ib &= A_1 + A_2, \\ c + id &= i(A_1 - A_2). \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent zu

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2}, \\ A_2 &= \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3 Die Abbildung A ist offenbar genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $A_2 = 0$ ist.

Lemma 2.2 *Ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $Az = A_1 \cdot z + A_2 \cdot \overline{z}$, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $Bz = B_1 \cdot z + B_2 \cdot \overline{z}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{C}$, so wird $C = B \circ A$ gegeben durch $Cz = C_1 z + C_2 \overline{z}$ mit*

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1 A_1 + B_2 \overline{A}_2, \\ C_2 &= B_1 A_2 + B_2 \overline{A}_1. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} B(Az) &= B(A_1 \cdot z + A_2 \cdot \overline{z}) \\ &= B_1(A_1 \cdot z + A_2 \cdot \overline{z}) + B_2(\overline{A_1 \cdot z} + \overline{A_2} \cdot z) \\ &= (A_1B_1 + B_2\overline{A}_2)z + (B_1A_2 + B_2\overline{A}_1)\overline{z}. \end{aligned}$$

□

Wenden wir Satz 2.8 auf die lineare Abbildung T aus der Definition der reellen Differenzierbarkeit von $f : U \to \mathbb{C}$ an, so erhalten wir:

Satz 2.9 *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist in z_0 genau dann reell differenzierbar, wenn es $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ und eine in z_0 stetige Funktion $r : U \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $r(z_0) = 0$ und für alle $z \in U$ gilt:*

$$f(z) = f(z_0) + A_1 \cdot (z - z_0) + A_2 \cdot (\overline{z} - \overline{z}_0) + r(z)|z - z_0|.$$

Definition Die eindeutig bestimmten Zahlen $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ aus Satz 2.9 heißen *Wirtinger-Ableitungen* von f in z_0 und werden wie folgt bezeichnet:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := A_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := A_2.$$

Mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus dem Beweis von Satz 2.8:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{u_x + v_y}{2} + i\frac{v_x - u_y}{2} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{u_x - v_y}{2} + i\frac{v_x + u_y}{2} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) \tag{2}$$

Aus Satz 2.3 ergibt sich damit die komplexe Form der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

Satz 2.10 *Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:*

(i) *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

(ii) *f ist in z_0 reell differenzierbar und es ist*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Zusatz Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Man kann die obigen Gleichungen (1) und (2) auch noch anders einsehen: Der Übergang von $x + iy$ nach $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ entspricht einer Koordinatentransformation mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}). \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen folgen dann aus der Kettenregel (z, $\overline{z}$ als reelle Variable aufgefasst):

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + i\left(v_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + v_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right).$$

Aus

$$\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{2i}$$

folgen dann die obigen Gleichungen.

Als Folgerung aus Satz 2.10 erhalten wir:

Satz 2.11 *Ist f auf einer offenen und wegzusammenhängenden Menge G holomorph und gilt $f' \equiv 0$, so ist f konstant.*

Beweis. Dann ist nämlich nach Satz 2.10 nebst Zusatz

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f' = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$$

also sind die reellen Ableitungen von f alle Null, und f ist damit nach Analysis II, Satz 5.12, konstant. □

Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen

1. $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sind lineare Operatoren.

2. **Produktregel**: Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ in z_0 reell differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial z}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \cdot g(z_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) \cdot f(z_0), \\ \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial \overline{z}}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot g(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0) \cdot f(z_0). \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + A_1 \cdot (z - z_0) + A_2 \cdot (\overline{z} - \overline{z_0}) + r(z)|z - z_0|, \\ g(z) &= g(z_0) + B_1 \cdot (z - z_0) + B_2 \cdot (\overline{z} - \overline{z_0}) + s(z)|z - z_0|, \\ & \quad r(z_0) = s(z_0) = 0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(z)\cdot g(z) &= f(z_0)\cdot g(z_0) \\ &\quad + [g(z_0)\cdot A_1 + f(z_0)\cdot B_1](z-z_0) \\ &\quad + [g(z_0)\cdot A_2 + f(z_0)\cdot B_2](\overline{z}-\overline{z}_0) \\ &\quad + R(z)|z-z_0| \end{aligned}$$

mit $R(z_0)=0$, R stetig in z_0. □

3.
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}.$$

4.
$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$$

(3. + 4. folgen aus den Gleichungen (1) und (2).)

5. **Kettenregel**: Gegeben seien $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$, $f(U) \subset V$ und $z_0 \in U$. Ist f in z_0 und g in $f(z_0)$ reell differenzierbar, so ist $g \circ f$ in z_0 reell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z_0))\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}(z_0), \\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial \overline{z}}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z_0))\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_0). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 2.2. □

Aus diesen Rechenregeln folgt: Wir können Polynome in z, $\overline{z}$ betrachten:

$$f(z) := \sum_{\kappa=0}^{k}\sum_{\lambda=0}^{\ell} a_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda.$$

Diese Funktionen sind reell-differenzierbar, also partiell nach z und $\overline{z}$ differenzierbar. Das Polynom $f(z)$ ist genau dann holomorph, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $\overline{z}$ nicht in f vorkommt.

3 Kurvenintegrale

Das wesentliche Werkzeug der Funktionentheorie ist der Kalkül der Kurvenintegrale.

Bevor wir diese Integrale erklären, stellen wir einige Tatsachen über die Integration komplexwertiger Funktionen auf reellen Intervallen zusammen.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Gegeben sei eine stetige Funktion

$$g : [a, b] \to \mathbb{C}.$$

Wir erklären das Integral von g durch

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt.$$

Allgemeiner können wir dadurch das Integral für eine stückweise stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ von $[a, b]$ gibt, so dass $g|_{(t_{j-1}, t_j)}$ stetig ist und auf $[t_{j-1}, t_j]$ stetig fortgesetzt werden kann für jedes $j = 1, \ldots, k$. Man setzt dann

$$\int_a^b g(t)\,dt := \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t)\,dt.$$

Das Integral hat folgende Eigenschaften: Es ist ein reeller $\mathbb{C}$-linearer Operator: Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und stückweise stetige Funktionen $g, g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t))\,dt &= \lambda_1 \int_a^b g_1(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b g_2(t)\,dt, \\
\int_a^b \overline{g(t)}\,dt &= \overline{\int_a^b g(t)\,dt}.
\end{aligned}$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bleibt gültig: Ist $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $G : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $G' = g$, so gilt

$$\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

Man beweist diese Behauptungen leicht durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil. Auch die Substitutionsregel hat eine Verallgemeinerung. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn g stetig ist und es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ von [a,b] gibt, so dass $g|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig differenzierbar ist für $j = 1, \ldots, k$ (d.h. Real- und Imaginärteil sind in $[t_{j-1}, t_j]$ differenzierbar und g' ist dort stetig).

Substitutionsregel: Ist φ eine reelle, monotone, stückweise stetig differenzierbare Funktion, $\varphi : [a,b] \to [c,d]$, und ist $h : [c,d] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int_a^b h(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_c^d h(t)\,dt.$$

Lemma 3.1 *Es sei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig. Dann ist*

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Bemerkung 3.1 Links steht der Betrag einer komplexen Zahl, rechts das Integral einer nicht negativen reellwertigen Funktion. Daher ist die Behauptung nicht restlos trivial.

Beweis. Wegen der Dreiecksungleichung für den Betrag reicht es, die Behauptung für eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ zu beweisen.

Nach Analysis I kann das Integral einer stetigen Funktion beliebig genau durch Riemannsche Summen approximiert werden:

$$\sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j)(t_{j+1} - t_j),$$

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ Zerlegung von $[a,b]$, $t_j \leq \xi_j < t_{j+1}$ Zwischenstellen. Durchläuft nun die Zerlegung $t_0 < \ldots < t_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, deren Feinheit ($:= \max |t_{j+1} - t_j|$) gegen 0 konvergiert, so konvergiert jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen gegen das Integral der Funktion. Das gilt natürlich auch, wenn die Funktion komplexe Werte annimmt.

Aus der Dreiecksungleichung für den Betrag komplexer Zahlen folgt nun

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} g(\xi_j)(t_{j+1} - t_j)\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |g(\xi_j)|(t_{j+1} - t_j).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas. □

Es sei nun wieder U offen in $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Es soll jetzt das Integral von f über eine Kurve (oder einen Weg) definiert werden. Im Folgenden bezeichnen wir mit *Weg* (oder *Kurve*) immer einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, d.h. eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ein *Weg in U* ist ein Weg $\gamma : [a,b] \to U$.

Definition Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg in U. Man setzt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Der Integrand des rechten Integrals ist eine stückweise stetige Funktion auf $[a, b]$, da γ stückweise stetig differenzierbar ist. Das rechte Integral ist also wohldefiniert.

Die Funktion f interessiert in diesem Integral nur auf dem Bild von γ. Aber bei der Definition des Integrals kommt es sehr wohl auf die Parametrisierung des Weges an und nicht bloß auf die Bildmenge $\gamma([a, b])$. Wir werden später zeigen, in welchem Sinne das Integral von der Parametrisierung abhängt.

Man beachte: Ausgegangen sind wir von einer komplexwertigen Funktion einer *reellen* Variablen. Wir haben nun das Kurvenintegral einer komplexwertigen Funktion einer *komplexen* Variablen erklärt!

Nun spalten wir $f : U \to \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil auf:

$$f(z) = u(z) + iv(z).$$

Außerdem schreiben wir $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= x(t) + iy(t), \\ \gamma'(t) &= x'(t) + iy'(t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot y'(t))\, dt \\ &\quad + i \int_a^b (u(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + v(x(t), y(t)) \cdot x'(t))\, dt. \end{aligned}$$

Wir stellen nun Eigenschaften des Kurvenintegrals zusammen. Aus der Linearität des gewöhnlichen Integrals ergibt sich die Linearität des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))\, dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)\, dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)\, dz.$$

Aus Lemma 3.1 erhalten wir die folgende Standardabschätzung:

Satz 3.1 *Es sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein Weg der Länge $L(\gamma)$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|.$$

Beweis. Nach Lemma 3.1 gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\, dt.$$

Ist M das Maximum von f auf $\gamma([a,b])$, so gilt

$$|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M|\gamma'(t)|,$$

und wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt &\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\ dt \\ &= M\cdot L(\gamma) \qquad \text{(Analysis II, Satz 4.3).}\end{aligned}$$

□

Wir untersuchen nun das Verhalten unter Parametertransformationen.

Es sei $[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ ein weiteres Intervall und $\varphi : [\widetilde{a},\widetilde{b}] \to [a,b]$ eine bijektive Abbildung mit $\varphi(\widetilde{a}) = a$, $\varphi(\widetilde{b}) = b$, und es seien φ und φ^{-1} stetig differenzierbar. Eine solche Abbildung φ nennt man auch eine *orientierungstreue Parametertransformation.*

Satz 3.2 (Verhalten bei Parameterwechsel A) *Es sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg in U und $\varphi : [\widetilde{a},\widetilde{b}] \to [a,b]$ eine orientierungstreue Parametertransformation. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Beweis. Dies folgt aus der Substitutionsregel: Setze $\widetilde{\gamma} = \gamma\circ\varphi$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz &= \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)\,dt \\ &= \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f((\gamma\circ\varphi)(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)\,dt \\ &= \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \quad \text{(Kettenregel)} \\ &= \int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)\,d\tau \quad \text{(Substitution } \tau = \varphi(t)\text{)} \\ &= \int_\gamma f(z)\,dz.\end{aligned}$$

□

Ebenso beweist man:

Satz 3.3 (Verhalten bei Parameterwechsel B) *Ist $\psi : [\widetilde{a},\widetilde{b}] \to [a,b]$ eine bijektive Abbildung mit $\psi(\widetilde{a}) = b$, $\psi(\widetilde{b}) = a$, und ψ, ψ^{-1} sind stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\gamma\circ\psi} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Wege kann man zusammensetzen: Sind $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei Wege derart, dass der Endpunkt $\gamma_1(b)$ von γ_1 mit dem Anfangspunkt $\gamma_2(c)$ von γ_2 übereinstimmt, so erklärt man den aus γ_1 und γ_2 *zusammengesetzten Weg* $\gamma_1\gamma_2$ durch

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1\gamma_2 : & [a, b + (d-c)] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b], \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{für } t \in [b, b+d-c]. \end{cases} \end{array}$$

Analog kann man n Wege $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ zusammensetzen, falls für $k = 1, \ldots, n-1$ der Endpunkt von γ_k mit dem Anfangspunkt von γ_{k+1} zusammenfällt. Ohne (den einfachen) Beweis notieren wir:

Satz 3.4 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Wege in U, die sich zu einem Weg γ zusammensetzen. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Wir betrachten nun Stammfunktionen zu holomorphen Funktionen.

Definition Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion von f*, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

Kennt man eine Stammfunktion von f, so kann man Kurvenintegrale über f leicht berechnen:

Satz 3.5 *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt, $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg in U mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

(Das Kurvenintegral hängt also in diesem Fall nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab, nicht von seinem sonstigen Verlauf.)

Beweis. Es sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ derart, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar ist ($j = 1, \dots, n$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F \circ \gamma)'(t)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^n ((F \circ \gamma)(t_j) - (F \circ \gamma)(t_{j-1})) = F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt. □

Korollar 3.1 *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in U*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beispiel 3.1 Ein Polynom über $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j = 0, \dots, n,$$

hat die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} a_j z^{j+1}.$$

Für jeden geschlossenen Weg γ in $U = \mathbb{C}$ ist also

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beispiel 3.2 Anders ist es bei rationalen Funktionen:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

hat in $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion: Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann gilt

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i \neq 0.$$

Wir setzen nun voraus, dass der Definitionsbereich U von f offen und wegzusammenhängend ist.

Definition Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte aus G durch einen Weg in G verbinden lassen. Eine offene und wegzusammenhängende Menge nennt man auch ein *Gebiet*.

In Umkehrung des Korollars haben wir:

Satz 3.6 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

so hat f auf G eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei a ein fester Punkt von G. Zu jedem $z \in G$ wählen wir einen Weg $\gamma_z : [0,1] \to G$ in G von a nach z und setzen

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

a) Wir zeigen, dass die Definition dieser Funktion nicht von der Wahl von γ_z abhängt. Ist nämlich $\widetilde{\gamma}_z : [0,1] \to G$ ein anderer Weg von a nach z,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma}_z^{-1}: & [0,1] & \longrightarrow & G \\ & t & \longmapsto & \gamma_z(1-t) \end{array},$$

so ist $\gamma_z \widetilde{\gamma}_z^{-1}$ geschlossen, also

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\widetilde{\gamma_z}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_z \widetilde{\gamma}_z^{-1}} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

b) Wir zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, d.h. dass $F'(z_0) = f(z_0)$ für beliebiges $z_0 \in G$ gilt.

Ist z ein hinreichend nahe bei z_0 gelegener Punkt, so ist die Verbindungsstrecke

$$\begin{array}{rccc} [z_0, z]: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & tz + (1-t)z_0 \end{array}$$

von z_0 und z ganz in G enthalten, und $\gamma = \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$ (γ_z^{-1} der in umgekehrter Richtung durchlaufene Weg wie oben) ist ein geschlossener Weg in G. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)\,dt \\ &= (z-z_0)\Delta(z) \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))\,dt.$$

Es ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$. Noch zu zeigen: Δ ist stetig in z_0. Dies folgt aus

$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| \leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(z_0 + t(z-z_0)) - f(z_0)|$$

und der Stetigkeit von f. □

Wir beschäftigen uns nun weiter mit dem obigen Beispiel 3.2.

Es sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz 3.7 (Umlaufszahl) *Für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

eine ganze Zahl.

Beweis. Da wir vom Logarithmus einer komplexen Zahl noch nichts wissen, behelfen wir uns so:

Es gilt nach Definition

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,d\tau.$$

Wir betrachten die Funktion

$$h(t) := \int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)}\,d\tau.$$

Zu zeigen: $h(1)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$, d.h. $h(1) \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Würden wir den Logarithmus einer komplexen Zahl kennen, so müsste gelten

$$h'(t) = \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} = (\log\gamma(t))',$$

also

$$e^{h(t)} = \gamma(t), \quad \text{d.h. } 1 = e^{-h(t)}\gamma(t).$$

Deswegen betrachten wir die Funktion $e^{-h(t)}\gamma(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(e^{-h(t)}\gamma(t))' &= -h'(t)e^{-h(t)}\gamma(t) + e^{-h(t)}\gamma'(t)\\ &= -\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}e^{-h(t)}\gamma(t) + e^{-h(t)}\gamma'(t)\\ &\equiv 0.\end{aligned}$$

Also ist

$$e^{-h(t)}\gamma(t) = \text{konst.} = e^{-h(0)}\gamma(0) = \gamma(0) = \gamma(1),$$

da γ geschlossen. Andererseits ist

$$e^{-h(t)}\gamma(t) = e^{-h(1)}\gamma(1) = \gamma(1).$$

Daraus folgt

$$e^{h(1)} = 1.$$

Wir haben aber bereits in §1 bemerkt, dass die einzigen Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^w = 1$ die Zahlen $w = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, sind. $\square$

Definition Für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nennt man die ganze Zahl

$$\mathrm{Uml}(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

die *Umlaufszahl des Weges* γ um 0.

Allgemeiner sei $a \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Dann heißt die ganze Zahl

$$\mathrm{Uml}(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

die *Umlaufszahl des Weges* γ um a.

Bemerkung 3.2 Satz 3.7 ergibt sich auch aus der folgenden Plausibilitätsbetrachtung (vgl. Analysis III).

Schreiben wir $z = re^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten, so erhalten wir für das Differential

$$\begin{aligned}\frac{dz}{z} &= \frac{dre^{i\varphi} + ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}\\ &= \frac{dr}{r} + id\varphi.\end{aligned}$$

Man kann φ als wohldefinierte Funktion in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ erklären, indem man $\varphi \in (0, 2\pi)$ wählt. Dann hat $\frac{dz}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion, nämlich

$$F(z) = \ln r + \varphi.$$

Das Integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

misst also unter anderem die Änderung des Winkels φ, wenn man den Weg γ durchläuft. Läuft der Weg z.B. einmal um 0 herum, so werden die „Winkelelemente $d\varphi$“ aufsummiert, bis man am Ausgangspunkt bei 2π angekommen ist.

Wir wollen noch eine Folgerung aus Satz 3.7 notieren. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $g : U \to N$ eine Funktion mit Wertebereich in einer Menge N. Die Funktion g heißt *lokal konstant*, wenn jeder Punkt $z \in U$ eine Umgebung besitzt, auf der g konstant ist.

Satz 3.8 *Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann ist* $\mathrm{Uml}(\gamma, a)$ *eine lokal konstante Funktion von a, wenn a im Komplement des Bildes von γ variiert.*

Beweis. Die auf dem Komplement des Bildes von γ definierte Funktion $a \mapsto \mathrm{Uml}(\gamma, a)$ ist stetig, da der Integrand von

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

stetig ist. Da sie nach Satz 3.7 nur ganzzahlige Werte annimmt, muss sie daher lokal konstant sein. □

4 Der Cauchysche Integralsatz

Der folgende Satz mit seinen Konsequenzen ist grundlegend für die gesamte Funktionentheorie.

Satz 4.1 (Satz von Goursat) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und R ein Rechteck, das ganz in G liegt. Dann gilt*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Wir geben zunächst einen *falschen Beweis* mit Analysis III:

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial R} (udx - vdy) + i \int_{\partial R} (vdx + udy).$$

Der Satz von Stokes für das Rechteck, den wir in Analysis III bewiesen haben, lautet nun

$$\int_{\partial R} (\alpha dx + \beta dy) = \int_R \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dxdy.$$

Wenden wir diesen Satz an, so folgt

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt damit

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

Was ist daran falsch?

Wir wissen überhaupt noch nicht, ob die Integranden überhaupt integrierbar sind, ob beispielsweise u_x, u_y, v_x, v_y stetig sind.

Dieses Problem hatten auch die Schöpfer der Funktionentheorie Gauß (1811), Cauchy (1825) und Weierstraß (1842). Sie setzten deshalb auch stets zusätzlich die Stetigkeit von u_x und u_y (und damit auch von v_x und v_y) voraus. Erst Goursat gab 1900 einen Beweis, der ohne diese Voraussetzung auskommt. Diesen Beweis wollen wir nun geben.

Beweis von Satz 4.1. Wir teilen das vorgegebene Rechteck R in 4 kongruente Teilrechtecke $R_1^1, \ldots, R_1^4$. Der Rand jedes Rechtecks wird zum Weg in $\mathbb{C}$, wenn wir ihn gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Dann ist

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \sum_{l=1}^{4} \int_{\partial R_1^l} f(z)\,dz,$$

denn die Wegintegrale über gemeinsame Randstücke der Rechtecke R_1^l heben sich gegenseitig weg, da diese gegenläufig orientiert sind.

Insbesondere gilt also die Abschätzung

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{l=1}^{4} \left|\int_{\partial R_1^l} f(z)\,dz\right| \leq 4 \max_l \left|\int_{\partial R_1^l} f(z)\,dz\right|.$$

Unter den Rechtecken R_1^l wählen wir eines aus, für das

$$\left|\int_{\partial R_1^l} f(z)\,dz\right|$$

maximal ist; wir nennen es R_1. Dann ist also

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right|.$$

Auf R_1 wenden wir nun die gleiche Konstruktion an; wir erhalten so ein Rechteck R_2 mit

$$\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial R_2} f(z)\,dz\right|.$$

In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge von Rechtecken

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_k \supset \ldots$$

mit den Eigenschaften

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4^k \left|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz\right|,$$

$$L(\partial R_k) = \frac{1}{2}L(\partial R_{k-1}) = \ldots = 2^{-k}L(\partial R).$$

Die Rechtecke bilden nun eine Intervallschachtelung. Genauer: Ist

$$R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k],$$

so bilden die Intervallränder Intervallschachtelungen

$$\begin{aligned} a_k \leq a_{k+1} \leq \quad \ldots \quad \leq b_{k+1} \leq b_k, \\ c_k \leq c_{k+1} \leq \quad \ldots \quad \leq d_{k+1} \leq d_k, \end{aligned}$$

und es existieren

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} b_k =: x_0, \\ \lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty} d_k =: y_0. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$z_0 := x_0 + iy_0.$$

Nach Voraussetzung ist f in z_0 komplex differenzierbar. Wir können daher

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion r mit $r(z_0) = 0$ schreiben.

Die Funktion $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ist ein lineares Polynom in z und hat daher eine Stammfunktion. Nach Korollar 3.1 ist daher

$$\int_{\partial R_k} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,dz = 0.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\partial R_k} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,dz + \int_{\partial R_k} r(z)(z - z_0)\,dz\right| \\ &= \left|\int_{\partial R_k} r(z)(z - z_0)\,dz\right| \\ &\leq L(\partial R_k) \cdot \max_{z\in\partial R_k} (|z - z_0||r(z)|) \\ &\leq (L(\partial R_k))^2 \cdot \max_{z\in\partial R_k} |r(z)|. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| &\leq 4^k \frac{(L(\partial R))^2}{4^k} \cdot \max_{z\in\partial R_k} |r(z)| \\ &= (L(\partial R))^2 \cdot \max_{z\in\partial R_k} |r(z)|.\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{z\to z_0} r(z) = 0$ gibt es nun für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von z_0, so dass für alle $z \in U$ gilt: $|r(z)| \leq \varepsilon$. Da die Seiten der Rechtecke R_k eine Intervallschachtelung bilden, kann man einen Index k_0 finden, so dass für alle $k \geq k_0$ das Rechteck R_k ganz in U liegt. Daraus folgt

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq (L(\partial R))^2 \cdot \varepsilon.$$

Also kann das Integral nur verschwinden. □

Wir wollen den Satz von Goursat nun verallgemeinern und zeigen, dass man auf die Holomorphie in endlich vielen Punkten verzichten kann.

Dazu sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in G$ und

$$f : G \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \to \mathbb{C}.$$

Wir setzen voraus, dass für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\lim_{z\to\zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0.$$

Dies gilt zum Beispiel für beschränkte Funktionen f. Man nennt einen solchen Ausnahmepunkt, für den die obige Bedingung gilt, auch eine *hebbare Singularität*, da der *Riemannsche Hebbarkeitssatz*, den wir später zeigen werden, besagt, dass eine holomorphe Funktion f in solche Punkte holomorph fortsetzbar ist, d.h. diese Ausnahmepunkte sind in Wirklichkeit gar keine. Diesen Satz wollen wir jetzt aber nicht benutzen.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Goursat.

Satz 4.2 *Es sei $R \subset G$ ein Rechteck im Gebiet G, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \overset{\circ}{R}$, $f : G \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte*

$$\lim_{z\to\zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$$

für alle j. Dann ist

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung nur für einen Ausnahmepunkt ζ zu zeigen, denn das Rechteck R lässt sich so in kleinere Rechtecke zerlegen, dass jedes ζ_j im offenen Kern eines solchen Teilrechtecks liegt.

Außerdem können wir annehmen, dass der Ausnahmepunkt ζ der Mittelpunkt eines Quadrates R_0 ist.

Wegen
$$\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)f(z)=0$$
kann man zu $\varepsilon>0$ eine Umgebung U von ζ finden, so dass für alle $z\in U$ gilt
$$|f(z)|\leq\frac{\varepsilon}{|z-\zeta|}.$$

O.B.d.A. kann man weiter annehmen, dass das Quadrat R_0 ganz in U liegt: Es lässt sich nämlich zeigen, dass, wenn man ein Quadrat R_1 mit Mittelpunkt ζ in neun gleich große Teilquadrate einteilt, wobei das mittlere R_2 sei, gilt:
$$\int_{\partial R_1}f(z)\,dz=\int_{\partial R_2}f(z)\,dz.$$

Also kann folgendermaßen abgeschätzt werden:
$$\left|\int_{\partial R_0}f(z)\,dz\right|\leq\varepsilon\int_{\partial R_0}\frac{dz}{|z-\zeta|}\leq\varepsilon L(\partial R_0)\max_{z\in\partial R_0}\frac{1}{|z-\zeta|}.$$
Es sei $z_0\in\partial R_0$ ein Punkt minimalen Abstands zu ζ. Dann gilt
$$\frac{1}{|z-\zeta|}\leq\frac{1}{|z_0-\zeta|}\text{ und }L(\partial R_0)=8|z_0-\zeta|.$$
Wir erhalten also
$$\left|\int_{\partial R_0}f(z)\,dz\right|\leq 8\varepsilon.$$
Da $\varepsilon>0$ beliebig war, ist der Satz damit bewiesen. □

Es ist nicht wahr, dass das Integral einer holomorphen Funktion über eine geschlossene Kurve immer verschwindet. Wir haben z.B. gesehen, dass
$$\int_{S^1}\frac{dz}{z}=2\pi i.$$
Um sicher zu gehen, dass das Integral immer verschwindet, muss man geeignete Voraussetzungen an das Gebiet G, auf dem f holomorph ist und in dem γ liegt, stellen. Wir betrachten zunächst einen ganz speziellen Fall: f sei holomorph auf einer Kreisscheibe Δ, $\Delta=\{z\,|\,|z-\xi_0|<\rho\}$, $\rho\leq\infty$.

Satz 4.3 (Cauchyscher Integralsatz) *Es sei Δ eine (offene) Kreisscheibe, $f:\Delta\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in Δ*
$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Beweis. Wir beweisen Satz 4.3, indem wir eine Stammfunktion von f angeben:

E sei $a = x_a + iy_a$ der Mittelpunkt von Δ und γ_z der Weg zu $z = x + iy \in \Delta$, den man erhält, indem man erst horizontal zum Punkt $x + iy_a$ und dann vertikal zu z läuft (Skizze!). Wir setzen

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Es sei $z_0 = x_0 + iy_0$ und $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass das Rechteck R mit den Eckpunkten

$$x_0 + iy_a, \quad x_0 + h + iy_a, \quad z := x_0 + h + iy_0, \quad z_0$$

ganz in Δ enthalten ist. Dann gilt nach Satz 4.1

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial R} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt wie im Beweis von Satz 3.6, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = f(z_0).$$

Nach dem bereits zitierten Satz 3.1 gilt ebenfalls

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\sigma_z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei σ_z der Weg ist, der von a zunächst vertikal zum Punkt $x_a + iy$ und dann horizontal zum Punkt z verläuft. Betrachten wir nun Punkte z_0, $z = z_0 + ih$, $h \in \mathbb{R}$ genügend klein, so folgt wie oben

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = if(z_0).$$

Also erfüllen die partiellen Ableitungen von $F = P + iQ$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, F ist also holomorph und es gilt $F' = f$. Die Funktion F ist also eine Stammfunktion von f. Satz 4.3 folgt damit aus Korollar 3.1. □

Verallgemeinerung:

Satz 4.4 *Es sei Δ eine offene Kreisscheibe wie oben, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \Delta$, $f : \Delta \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte*

$$\lim_{z \to \zeta_j} (z - \zeta_j) f(z) = 0$$

für alle j. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in $\Delta \setminus \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$.

Beweis. als Übung. □

Aus dem Cauchyschen Integralsatz mit Ausnahmepunkten erhalten wir eine für den ganzen weiteren Aufbau der Funktionentheorie fundamentale Aussage:

Satz 4.5 (Cauchysche Integralformel) *Es sei $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < \rho\}$ eine offene Kreisscheibe, $f : \Delta \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, γ ein geschlossener Weg in Δ. Dann gilt für jeden Punkt $a \in \Delta$, der nicht auf dem Bild von γ liegt,*

$$f(a) \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Dieser Satz besagt Folgendes: Eine holomorphe Funktion f hat eine Art Fernwirkung. Der Wert von f an der Stelle a lässt sich berechnen, wenn man a nur mit einem Weg γ umschließt (mit $\mathrm{Uml}(\gamma, a) \neq 0$) und die Funktionswerte von f nur auf diesem Weg bekannt sind. Ist z.B. γ eine Kreislinie in Δ, so sind bei einer holomorphen Funktion f alle Werte von f innerhalb der Kreislinie durch die Werte von f auf der Kreislinie bestimmt.

Für eine reelle C^∞-Funktion stimmt das natürlich nicht: Selbst wenn deren Werte auf der Kreislinie vorgeschrieben sind, kann sie innerhalb der Kreislinie noch (fast) beliebig verbeult werden, ohne dass sich an den Randwerten etwas ändert.

Beweis von Satz 4.5. Satz 4.5 folgt unmittelbar aus Satz 4.4: Wir wenden Satz 4.4 auf die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

an. Diese Funktion ist holomorph für $z \neq a$. Für $z = a$ ist sie nicht definiert, aber es gilt

$$\lim_{z \to a} g(z)(z - a) = \lim_{z \to a} (f(z) - f(a)) = 0,$$

also ist die Bedingung von Satz 4.4 erfüllt. Es folgt

$$0 = \int_\gamma g(z)\, dz = f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z - a} - \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Damit folgt die Behauptung aus der Definition der Umlaufszahl. □

Wir wollen nun Anwendungen der Cauchyschen Integralformel betrachten. Zunächst behandeln wir höhere Ableitungen. Wir wollen die Cauchysche Integralformel

$$\mathrm{Uml}(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

nach z differenzieren. Wenn man das Integral unter dem Integralzeichen differenzieren kann, so erhält man, da die Umlaufszahl konstant ist,

$$\mathrm{Uml}(\gamma, z) \cdot f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Durch Iteration erhält man daraus

$$\mathrm{Uml}(\gamma, z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Die Rechtfertigung für dieses Vorgehen kommt aus einem allgemeinen Satz über parameterabhängige Kurvenintegrale, den wir nun beweisen wollen. Dazu benötigen wir ein Lemma.

Lemma 4.1 *Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und (f_ν) eine Folge stetiger Funktionen $f_\nu : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_\gamma f_\nu(z)\ dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_\nu(z)\ dz - \int_\gamma f(z)\ dz \right| &= \left| \int_\gamma (f_\nu(z) - f(z))\ dz \right| \\ &\le L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a,b])} |f_\nu(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt aber

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\max_{z \in \gamma([a,b])} |f_\nu(z) - f(z)| \right) = 0.$$

□

Satz 4.6 (Parameterabhängige Kurvenintegrale) *Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $M \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \gamma([a,b]) \times M \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.*

(i) *Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta, z)\, d\zeta$$

stetig auf M.

(ii) *Ist $f(\zeta, z)$ für jedes $\zeta \in \gamma([a,b])$ nach z komplex differenzierbar mit auf $\gamma([a,b]) \times M$ stetiger Ableitung $f_z(\zeta, z)$, so ist $F(z)$ holomorph auf M und es gilt*

$$F'(z) = \int_\gamma f_z(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Beweis.

Zu (i): Wir müssen zeigen: Ist $z_0 \in M$ und $(z_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ eine Folge aus M mit $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0$, so gilt $\lim_{\nu\to\infty} F(z_\nu) = F(z_0)$.

Es sei $z_0 \in M$ und (z_ν) eine solche Folge. Wir setzen

$$f_\nu(\zeta) = f(\zeta, z_\nu), \quad \zeta \in \gamma([a,b]).$$

Dann ist (f_ν) eine Folge stetiger Funktionen, die wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von $\gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen die Funktion f_0 mit $f_0(\zeta) = f(\zeta, z_0)$ konvergiert. Aus Lemma 4.1 folgt

$$\lim_{\nu\to\infty} F(z_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \int_\gamma f_\nu(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f_0(\zeta)\, d\zeta = F(z_0).$$

Zu (ii): Es sei $z_0 \in M$ und (z_ν) eine Folge aus M mit $z_\nu \neq z_0$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0$. Wir nehmen an, dass alle z_ν in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{\Delta}$ um z_0 enthalten sind. Wegen der Linearität des Integrals gilt dann:

$$\frac{F(z_\nu) - F(z_0)}{z_\nu - z_0} = \int_\gamma \frac{f(\zeta, z_\nu) - f(\zeta, z_0)}{z_\nu - z_0}\, d\zeta.$$

Wir setzen

$$\widetilde{f_\nu}(\zeta) = \frac{f(\zeta, z_\nu) - f(\zeta, z_0)}{z_\nu - z_0}.$$

Dann ist $(\widetilde{f_\nu})$ nach Voraussetzung eine Folge stetiger Funktionen auf $\gamma([a,b])$, die gleichmäßig gegen die Funktion $\zeta \mapsto f_z(\zeta, z_0)$ konvergiert. Nach Lemma 4.1 gilt: F ist holomorph und

$$F'(z_0) = \lim_{\nu\to\infty} \int_\gamma \widetilde{f_\nu}(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f_z(\zeta, z_0)\, d\zeta.$$

□

Man beachte, dass der Beweis analog zum Beweis der entsprechenden Sätze der reellen Integrationstheorie verlief, die wir in Analysis III bewiesen haben.

Da in der Cauchyschen Integralformel der Integrand

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

nach dem Parameter z stetig komplex differenzierbar ist, können wir Satz 4.6 anwenden und sehen so, dass die obige Rechnung gerechtfertigt ist. Wir erhalten damit:

Satz 4.7 (Cauchysche Integralformel für die höheren Ableitungen) *Es sei Δ wieder eine offene Kreisscheibe und $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Ist außerdem $\gamma : [a, b] \to \Delta$ ein geschlossener Weg und $z \in \Delta$ ein Punkt, der nicht auf $\gamma([a, b])$ liegt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Uml}(\gamma, z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Insbesondere ist $f^{(n)}$ wieder holomorph.

Satz 4.8 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede ihrer Ableitungen ist wieder holomorph.*

Beweis. Jedes $z \in U$ liegt in einer offenen Kreisscheibe $\Delta \subset U$. Auf Δ können wir Satz 4.7 anwenden. □

Satz 4.8 zeigt wieder, wie stark sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: In der reellen Analysis braucht die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht einmal stetig zu sein.

Wir wollen nun weitere Folgerungen aus diesen Sätzen notieren.

Satz 4.9 (Satz von Morera) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt*

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G, so ist f holomorph.

Beweis. Gilt die Voraussetzung, so hat f nach Satz 3.6 eine Stammfunktion F; F ist holomorph, daher nach Satz 4.8 beliebig oft komplex differenzierbar, also ist auch $f = F'$ holomorph. □

Wir erhalten damit eine neue Charakterisierung holomorpher Funktionen: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn f stetig ist und

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G gilt. Als Folgerung erhalten wir eine weitere Charakterisierung:

Definition Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir sagen, f *besitzt lokale Stammfunktionen* auf U, wenn es zu jedem Punkt $z \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von z gibt, so dass $f|V$ eine Stammfunktion hat.

Satz 4.10 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn f stetig ist und lokale Stammfunktionen besitzt.*

Beweis.
"$\Rightarrow$": Es sei $z \in G$ und Δ_z eine ganz in G liegende Kreisscheibe mit Mittelpunkt z. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in Δ_z. Nach Satz 3.6 hat f in Δ_z eine Stammfunktion.

"$\Leftarrow$": Es sei $z \in G$. Besitzt f in der Umgebung V von z eine Stammfunktion, so ist f holomorph in V (nach Satz 4.8). Zu jedem z aus G gibt es also eine Umgebung V von z, in der f holomorph ist. Folglich existiert für jedes $z \in G$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

denn für genügend kleines $|h|$ liegt $z+h$ in einer solchen Umgebung V. Also ist f holomorph in G (Holomorphie ist eine lokale Eigenschaft). □

Es sei nun G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $z \in G$. Es sei $r \in \mathbb{R}$, so dass für

$$\Delta_r(z) := \{\zeta \in G \,|\, |\zeta - z| < r\}$$

gilt: $\overline{\Delta_r(z)} \subset G$. Bezeichnet nun C den Rand der Kreisscheibe $\Delta_r(z)$, genauer: den Weg $[0,1] \to G$, $t \mapsto z + re^{2\pi i t}$, so ist $\mathrm{Uml}(C, z) = 1$ und wir erhalten aus der Cauchyschen Integralformel das Korollar:

Satz 4.11 *Mit diesen Bezeichnungen gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Daraus erhalten wir als weitere Folgerung:

Satz 4.12 (Cauchysche Ungleichungen) *Es sei f eine in einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe*

$$\overline{\Delta_r(z)} = \{\zeta \in G \,|\, |\zeta - z| \le r\}$$

holomorphe Funktion, $M_r(z)$ sei das Maximum von $|f|$ auf dem Rand C von $\overline{\Delta_r(z)}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{r^n} M_r(z).$$

Beweis. Es ist nach Satz 4.11

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} L(C) \cdot \frac{M_r(z)}{r^{n+1}}$$

und $L(C) = 2\pi r$. □

Folglich gilt

Satz 4.13 (Satz von Liouville) *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis. Ist f auf der ganzen komplexen Zahlenebene holomorph, so gelten die Cauchyschen Ungleichungen für alle r. Ist f zusätzlich beschränkt, so gilt

$$M_r(z) \leq M = \text{konst.}$$

für alle r und z. Also folgt $|f'(z)| = 0$, also $f'(z) = 0$, also ist f konstant. □

Definition Eine in der ganzen komplexen Zahlenebene holomorphe Funktion heißt *ganze Funktion.*

Damit kann man Satz 4.13 auch so formulieren: *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beispiele 4.1 Die Funktionen exp, sin und cos sind ganze Funktionen. Die Exponentialfunktion exp ist in $\mathbb{C}$ unbeschränkt, da sie auch schon in $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist. Die Funktionen sin und cos sind in $\mathbb{R}$ beschränkt, aber in $\mathbb{C}$ unbeschränkt. Das folgt aus dem Satz von Liouville, man kann es aber auch direkt einsehen: Für $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, ist nämlich etwa

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

für große $|t|$ also

$$\cos it \approx \frac{1}{2} e^{|t|}.$$

Der Satz von Liouville führt zu einem einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz 4.14 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom*

$$p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

das in $\mathbb{C}$ keine Nullstelle hat, ist konstant, also vom Grad 0.

Beweis. O.B.d.A. sei $a_n = 1$.

Wir zeigen: Hat $p(z)$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist $\frac{1}{p(z)}$ holomorph in $\mathbb{C}$ (klar!) und beschränkt. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass $\frac{1}{p}$ und damit auch p konstant ist.

Nun zur Beschränktheit von $\frac{1}{p}$: Es sei

$$M := \max\{1, 2n \cdot |a_{n-1}|, \ldots, 2n \cdot |a_0|\}.$$

Da $\frac{1}{p}$ stetig ist, ist $\frac{1}{p}$ auf dem abgeschlossenen Kreis

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq M\}$$

beschränkt. Es sei daher $|z| \geq M$. Dann ist

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z^n| \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| \\ &\geq M \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| \\ &\geq M \cdot \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| - \ldots - \left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right) \\ &\geq \frac{M}{2} \quad \left(\text{da nach Voraussetzung } \left|\frac{a_i}{z^{n-i}}\right| \leq \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Also folgt für $|z| \geq M$

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \frac{2}{M}.$$

□

Korollar 4.1 *Jedes komplexe Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, zerfällt über $\mathbb{C}$ in n Linearfaktoren, d.h. es gibt $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$, so dass*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \xi_i).$$

Die ξ_i sind genau die Nullstellen des Polynoms.

Beweis. Wir beweisen das Korollar durch Induktion nach dem Grad n des Polynoms.

Nach dem Euklidischen Algorithmus lässt sich für jedes $\xi \in \mathbb{C}$ das Polynom $p(z)$ schreiben als

$$p(z) = g(z)(z - \xi) + p(\xi), \tag{3}$$

wobei $g(z)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Ist ξ_1 eine Nullstellle von $p(z)$, so gilt

$$p(z) = g(z)(z - \xi_1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung für $g(z)$. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. □

Die verwendete Darstellung (3) lässt sich auch aus der Taylorentwicklung von $p(z)$ gewinnen, die wir im nächsten Abschnitt diskutieren werden.

5 Potenzreihen

In Analysis I haben wir die reelle Exponentialfunktion und die reellen trigonometrischen Funktionen durch Potenzreihen eingeführt. Wir werden nun Potenzreihen im Komplexen betrachten. Zunächst aber eine Wiederholung aus Analysis I:

Dort war eine *Potenzreihe* ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$. Fasst man x als reelle Variable auf, so hatten wir zum Konvergenzverhalten Folgendes festgestellt:

Satz 5.1 (i) *Es gibt eine Zahl ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$,*

$$\rho = \sup \left\{ x \;\middle|\; x \geq 0 \text{ und } \sum |a_n| x^n \text{ konvergent} \right\},$$

Konvergenzradius *der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ genannt, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(a) *Für $|x| < \rho$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut. Auf jeder kompakten Teilmenge des Intervalls $(-\rho, \rho)$ konvergiert sie sogar gleichmäßig.*

(b) *Für $|x| > \rho$ divergiert die Reihe.*

(c) *Am Rand des Konvergenzintervalls $(-\rho, \rho)$ kann alles Mögliche passieren.*

(ii) *Angenommen, $\rho > 0$. Dann ist die Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-\rho, \rho)$ differenzierbar (und somit auch stetig) und hat die Ableitung*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Die Ableitung entsteht also durch gliedweises Differenzieren der Reihe. Die abgeleitete Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe selbst.

Korollar 5.1 *Die oben definierte Funktion f ist beliebig oft differenzierbar und es ist*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Wir wollen noch eine Formel zur Berechnung des Konvergenzradius ρ nachtragen.

Definition Für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definieren wir den *Limes superior* $\overline{\lim}\, b_n$ durch

$$\overline{\lim}\, b_n := \lim_{n\to\infty}(\sup\{b_n, b_{n+1}, \dots\}).$$

Satz 5.2 (Formel von Cauchy-Hadamard) *Für den Konvergenzradius ρ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt*

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Wurzelkriterium.

Satz 6.12 aus Analysis I lautete: Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Gibt es ein q, $0 \leq q < 1$, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

ist, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Mit dem Limes superior erhalten wir folgende äquivalente Formulierung:

Wurzelkriterium Ist $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Das Wurzelkriterium wurde aus dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe abgeleitet. Wie wir bereits damals bemerkt haben, erhält man aus dem Majorantenkriterium auch ein Divergenzkriterium und daraus den folgenden Zusatz zum Wurzelkriterium:

Zusatz Ist $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Das Wurzelkriterium samt Zusatz wenden wir nun auf eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

an. Es sei

$$a := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\, \sqrt[n]{|a_n|}$$

folgt nun: Wenn $|x| \cdot a < 1$, liegt Konvergenz, wenn $|x| \cdot a > 1$ Divergenz vor. Also gilt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{a} = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

□

Noch eine Erinnerung: Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, so heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *reell analytisch* genau dann, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ eine Umgebung V

von x_0 gibt, in der sich f in eine Potenzreihe entwickeln lässt, d.h. es gibt $a_n \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Nach Korollar 5.1 stimmt diese Potenzreihe mit der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0 überein:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Klassisches Beispiel für eine nicht reell analytische Funktion ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Ihre Taylorreihe im Nullpunkt ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n = 0,$$

denn sämtliche Ableitungen von g in 0 verschwinden. Dieses Beispiel wirft die Frage auf, welche (wie g) unendlich oft differenzierbaren Funktionen reell analytisch sind.

Als reell analytisch haben wir bereits kennengelernt:

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \rho = \infty, \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \rho = \infty, \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \rho = \infty, \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \rho = 1, \\
\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \rho = 1 :
\end{aligned}$$

Obwohl arctan auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt und sogar reell analytisch ist, hat die Taylorreihe im Nullpunkt nur ein beschränktes Konvergenzintervall!

Nun wollen wir komplexe Potenzreihen betrachten. Zunächst zu Reihen komplexer Zahlen:

Eine *Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $b_n \in \mathbb{C}$, von komplexen Zahlen heißt *konvergent* gegen die komplexe Zahl b, wenn die Folge der Partialsummen $\sum_{n=0}^{k} b_n$ gegen b konvergiert. Man schreibt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b.$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ der Beträge konvergiert.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, bilden die b_n eine Nullfolge, sind also beschränkt. Konvergiert die Reihe absolut, so konvergiert sie auch. In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Summanden umordnen, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert.

Alle Beweise verlaufen wörtlich wie in Analysis I.

Da $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ eine Reihe nichtnegativer reeller Zahlen ist, hat man als Tests für absolute Konvergenz die üblichen Tests für reelle Reihen, z.B. das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium.

Eine *komplexe Potenzreihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei $z_0 \in \mathbb{C}$, jedes $a_n \in \mathbb{C}$ und z als komplexe Variable aufzufassen ist. Der Punkt z_0 heißt *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe.

Wir interessieren uns natürlich für die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert. Für dieses Problem genügt es, den Fall $z_0 = 0$ zu betrachten.

Lemma 5.1 *Für $z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für jedes z mit $|z| < |z_1|$ absolut. Die Konvergenz ist absolut gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von

$$\Delta_{|z_1|} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |z_1|\}.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $z_1 \neq 0$.

Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $a_n z_1^n$ beschränkt. Also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|a_n z_1^n| < M$ für alle n. Nun ist für $|z| < |z_1|$

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| =: r < 1,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left| a_n z_1^n \cdot \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \right| \\ &= |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \\ &\leq M \cdot r^n. \end{aligned}$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ wegen $r < 1$ durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

In dieser Abschätzung taucht z überhaupt nicht mehr auf, es wurde nur $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ verwendet.

Ist also r irgendeine feste Zahl < 1, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $\{z \mid |z| \leq r|z_1|\}$. Da man jede kompakte Teilmenge von $\Delta_{|z_1|}$ in eine solche Kreisscheibe einschließen kann, ist der Beweis vollständig. $\square$

Aus diesem Lemma folgt

Satz 5.3 *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe. Dann gibt es ein ρ, $0 \leq \rho \leq \infty$, so dass gilt:*

(a) *Für z mit $|z| < \rho$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut, und die Konvergenz ist absolut gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\Delta_\rho = \{z \mid |z| < \rho\}$.*

(b) *Auf $\{z \mid |z| > \rho\}$ divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Definition Die Zahl ρ heißt der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Beweis. Es sei

$$\rho := \sup\{|z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}.$$

Dieses ρ hat nach Lemma 5.1 die gewünschte Eigenschaft (a). Gäbe es ein z mit $|z| > \rho$, für das die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert, so wäre ρ nicht das Supremum obiger Menge, also gilt auch (b). $\square$

Außerdem gilt für ρ

$$\begin{aligned} \rho &= \sup\{|z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\} \\ &= \sup\{|z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \text{ konvergiert}\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist dieses ρ also der Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$. Automatisch haben wir also das

Korollar 5.2 (Formel von Cauchy-Hadamard)

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Beispiel 5.1 Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Für die Partialsummen $s_k = \sum_{n=0}^{k} z^n$ gilt:

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + z + \ldots + z^k, \\ zs_k &= z + z^2 + \ldots + z^{k+1}, \end{aligned}$$

also

$$s_k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}, \quad \text{falls } z \neq 1.$$

Für $|z| < 1$ ist $\lim_{k \to \infty} z^{k+1} = 0$, also hat man

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Aus der Formel von Cauchy-Hadamard erhält man den Konvergenzradius

$$\rho = 1.$$

Eine konvergente Potenzreihe definiert auf ihrem Konvergenzkreis eine stetige Funktion. Für die Funktionentheorie von Interesse ist nun der folgende Satz:

Satz 5.4 *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist die Funktion $f : \Delta_\rho \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, holomorph in Δ_ρ; ihre Ableitung berechnet sich durch gliedweise Differentiation:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist ebenfalls ρ.

Beweis.

(a) Dass der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ebenfalls ρ ist, folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard zusammen mit dem entsprechenden Teil des Satzes vom reellen Analogon:

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n-1]{n |a_n|}.$$

(b) Die Funktion $f_k(z) := \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ ist ein Polynom, also holomorph. Die Folge (f_k) konvergiert punktweise gegen f. Auf kompakten Teilmengen des Konvergenzkreises ist die Konvergenz nach Satz 5.3 sogar gleichmäßig. Die Behauptung folgt also aus dem folgenden Satz. $\square$

Satz 5.5 (Satz von Weierstraß) *Es sei (f_n) eine Folge holomorpher, auf einem Gebiet G definierter Funktionen, die punktweise und auf kompakten Teilmengen von G sogar gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert.*

Dann ist f holomorph, und die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiert in G punktweise und auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig gegen f'.

Beweis.
(a) f ist holomorph:
Jedenfalls ist f stetig, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt.

Nach Satz 4.10 ist nur noch zu zeigen, dass f lokale Stammfunktionen besitzt. Zu jedem $z \in G$ gibt es aber eine Kreisscheibe Δ, die samt Rand in G liegt. Dort gilt die Cauchysche Integralformel für die f_n. Ist nun γ ein geschlossener Weg in Δ, so ist die Konvergenz von (f_n) auf dem Bild von γ gleichmäßig, also gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = 0,$$

was hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion in Δ ist.
(b) (f_n') konvergiert punktweise gegen f':
Es sei $z \in G$ und Δ eine Kreisscheibe um z mit $\overline{\Delta} \subset G$. Aus der Cauchyschen Integralformel für die f_n erhalten wir

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta.$$

Außerdem gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta.$$

Da $\partial\Delta$ kompakt ist, ist auf $\partial\Delta$ die Konvergenz $f_n \to f$ und somit auch die Konvergenz

$$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \to \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

gleichmäßig (warum?). Daher folgt

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta,$$

was zu zeigen war.

(c) (f_n') konvergiert auf kompakten Teilmengen von G sogar gleichmäßig gegen f':

Da man jede kompakte Teilmenge von G mit endlich vielen kompakten Kreisscheiben überdecken kann, genügt es, die Behauptung für kompakte Kreisscheiben $\overline{\Delta}$, die ganz in G liegen, zu zeigen.

Es sei also eine offene Kreisscheibe Δ mit $\overline{\Delta} \subset G$ gegeben. Dann gibt es eine konzentrische offene Kreisscheibe Δ', für die

$$\overline{\Delta} \subset \Delta' \subset \overline{\Delta'} \subset G$$

gilt. Der Radius von Δ' ist also größer als der von Δ. Die Radiendifferenz sei d, also $d > 0$.

Für $\zeta \in \partial\Delta'$ und $z \in \overline{\Delta}$ gilt also

$$\left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{\max_{\xi \in \partial\Delta'} |f_n(\xi) - f(\xi)|}{d^2} =: K_n.$$

Deshalb gilt

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq L(\partial\Delta') \cdot K_n,$$

und die rechte Seite geht gegen 0 für $n \to \infty$. Da K_n unabhängig von z ist, konvergiert (f_n') gleichmäßig auf $\overline{\Delta}$ gegen f'. □

Durch Iteration erhalten wir als Folgerung:

Korollar 5.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.5 gilt für die höheren Ableitungen $f_n^{(k)}$, $f^{(k)}$: Die Folge $(f_n^{(k)})$ konvergiert auf G punktweise und auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.*

Eine Illustration zum unterschiedlichen Konvergenzverhalten von Folgen holomorpher bzw. beliebig oft differenzierbarer Funktionen: Die Folge (f_n) mit

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge der Ableitungen (f_n') mit $f_n'(x) = \cos nx$ konvergiert nicht einmal mehr punktweise für jedes x, z.B. nicht für $x = \pi$.

Wir wollen nun (komplex) analytische Funktionen betrachten. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, so heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ um $z_0 \in U$ *in eine Potenzreihe entwickelbar*, wenn es eine Umgebung V von z_0 und eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt z_0 gibt, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in V$$

gilt. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* genau dann, wenn sich f um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

Da Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen, kommt als Potenzreihenentwicklung um einen Punkt z_0 nur die Taylorreihe in Frage. Also: Wenn f analytisch ist, dann ist lokal

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Das reelle Analogon des folgenden Satzes ist wieder falsch.

Satz 5.6 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $z_0 \in G$. Ferner sei $\Delta(z_0)$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, die ganz in G liegt.*

Dann gilt für alle $z \in \Delta(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Der Satz besagt also: Jede holomorphe Funktion ist analytisch, und die zu $z_0 \in G$ zu findende Umgebung kann als (offene) Kreisscheibe gewählt werden, die ganz bis an den Rand von G heranragt.

Korollar 5.4 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.6 ist der Konvergenzradius der dortigen Taylorreihe*

$$\begin{aligned} \rho &\geq \sup\{r \mid \Delta_r(z_0) \subset G\} \\ &= \operatorname{dist}(z_0, \partial G) = \inf_{\zeta \in \partial G} |\zeta - z_0|. \end{aligned}$$

($\Delta_r(z_0)$: offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius r)

Beweis von Satz 5.6. Es sei also $z \in \Delta(z_0)$ gegeben und es sei Δ' eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, für die

$$z \in \Delta' \subset \overline{\Delta'} \subset \Delta(z_0)$$

gilt. Nach der Cauchyschen Integralformel ist also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}$$

und es gilt für $\zeta \in \partial \Delta'$

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1.$$

Aufgrund der Summenformel für die geometrische Reihe erhalten wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial\Delta'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \cdot (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

da die geometrische Reihe für $\zeta \in \partial\Delta'$ gleichmäßig konvergiert. Nach der Cauchyschen Integralformel für die höheren Ableitungen ist also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

□

Damit haben wir eine neue Charakterisierung holomorpher Funktionen gefunden:

Satz 5.7 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist holomorph.*

(ii) *f ist analytisch.*

(iii) *f ist stetig und besitzt lokale Stammfunktionen.*

(iv) *f ist reell differenzierbar und genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.*

Um diesen Satz zu beweisen verwendeten wir also im Wesentlichen die Cauchysche Integralformel, die eine leichte Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz war. Dieser wiederum beruhte auf dem Satz von Goursat. Dieser ist also die Basis der bisherigen Theorie.

Wieso hat die Reihe von arctan nur den Konvergenzradius 1? Man sieht es an der Ableitung

$$\arctan'(z) = \frac{1}{1 + z^2} .$$

Die Reihe
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots$$
lässt sich analytisch auf die offene Einheitskreisscheibe „fortsetzen“, also auch die Ableitung $\arctan'(x)$. Diese lässt sich aber nicht in die Punkte $\pm i$ der Einheitskreisscheibe fortsetzen. Also ist $\rho = 1$ der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe und damit auch der Potenzreihe von arctan.

Wir wollen nun Potenzreihenentwicklungen zur systematischen Untersuchung holomorpher Funktionen benutzen.

Satz 5.8 *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei analytisch und nicht identisch 0. Dann besitzt f nur isolierte Nullstellen, d.h. ist $f(z_0) = 0$, so hat z_0 eine Umgebung V, so dass für $z \in V \setminus \{z_0\}$ $f(z) \neq 0$ ist.*

Beweis. Es sei $f(z_0) = 0$. Da f analytisch ist, können wir in einer Umgebung von z_0 schreiben:
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$
Es sei nun
$$n_1 := \min\{n \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\},$$
die Ordnung der kleinsten in z_0 nicht verschwindenden Ableitung von f. Es ist also $1 \le n_1 < \infty$ nach unseren Voraussetzungen. Dann gilt
$$f(z) = (z - z_0)^{n_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n_1+n)}(z_0)}{(n_1 + n)!}(z - z_0)^n := (z - z_0)^{n_1} g(z).$$
Nach Wahl von n_1 ist $g(z_0) \neq 0$, also verschwindet g auf einer Umgebung V von z_0 nicht. Das Polynom $(z - z_0)^{n_1}$ hat nur z_0 als Nullstelle, also ist z_0 die einzige Nullstelle von f in V. □

Korollar 5.5 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_1, \rho_2 > 0$. Die Menge*
$$\left\{ z \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right\}$$
habe einen Häufungspunkt $\zeta \in \Delta_{\rho_1} \cap \Delta_{\rho_2}$. Dann ist $a_n = b_n$ für alle n.

Beweis. Wir betrachten die Menge der Nullstellen von
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n.$$
Nach Voraussetzung hat sie den Häufungspunkt ζ. Wegen der Stetigkeit der obigen Potenzreihe in ζ ist auch ζ eine Nullstelle von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)z^n$, aber sie ist nicht isoliert. Also bleibt nur $0 = a_n - b_n$ für alle n übrig. □

Beispiel 5.2 Die Definitionen, die wir für $\exp(z)$, $\cos(z)$ und $\sin(z)$ als komplexe Funktionen gegeben haben, mögen anfangs sehr willkürlich ausgesehen haben. Jetzt zeigt sich aber, dass dies die einzig möglichen Fortsetzungen der reellen Funktionen $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$ waren, um analytische Funktionen auf $\mathbb{C}$ zu erhalten: Je zwei in $\mathbb{C}$ analytische Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen, müssen nämlich gleich sein: Ihre Taylorreihen im Nullpunkt stimmen auf $\mathbb{R}$ überein, und $\mathbb{R}$ hat mehr als genug Häufungspunkte.

Beispiel 5.3 In jeder gelochten Umgebung des Nullpunkts (d.h. Umgebung ohne den Nullpunkt) ist nach dem Identitätssatz die Funktion

$$z \mapsto \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

die einzige analytische Fortsetzung der entsprechenden C^∞-Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Sie ist aber nicht analytisch, ja nicht einmal stetig nach 0 fortsetzbar, da

$$\lim_{t\in\mathbb{R}, t\to 0} \exp\left(-\frac{1}{(it)^2}\right) = \lim_{t\to 0} \exp\left(\frac{1}{t^2}\right) = \infty \neq 0.$$

Wir beweisen nun als Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes:

Satz 5.9 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in G$, $f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte*

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0.$$

Dann existiert $\lim_{z\to a} f(z)$. Setzt man $f(a) := \lim_{z\to a} f(z)$, so ist die so definierte Fortsetzung von f auf ganz G holomorph.

Beweis. Es sei Δ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und $\overline{\Delta} \subset G$.

(a) Wir zeigen zunächst, dass die Cauchysche Integralformel für f in $\Delta \setminus \{a\}$ gilt:

Es sei $z \in \Delta$, $z \neq a$. Die Funktion

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

ist in $\Delta \setminus \{z, a\}$ definiert und holomorph und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta\to z} g(\zeta)(\zeta - z) &= 0, \\ \lim_{\zeta\to a} g(\zeta)(\zeta - a) &= \lim_{\zeta\to a} \left(\frac{f(\zeta)(\zeta-a)}{\zeta - z} - \frac{f(z)}{\zeta - z}(\zeta - a) \right) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz mit Ausnahmepunkten (Satz 4.4) gilt also für jeden geschlossenen Weg γ in $\Delta \setminus \{z, a\}$:

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, z).$$

Ist insbesondere γ der Rand einer kleineren konzentrischen Kreisscheibe Δ', die z und a enthält, so ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

(b) Durch

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =: \widehat{f}(z)$$

wird eine in Δ' holomorphe Funktion erklärt, die nach (a) für $z \neq a$ mit f übereinstimmt. Daher existiert

$$\lim_{z \to a} f(z) \Big(= \lim_{z \to a} \widehat{f}(z) = \widehat{f}(a) \Big)$$

und die Fortsetzung ist holomorph. $\square$

Definition Wegen dieses Satzes bezeichnet man einen Punkt a wie in Satz 5.9 als eine *hebbare Singularität*.

Die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen soll nun verwendet werden, um Nullstellen und Pole zu klassifizieren.

Dazu sei wie immer $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. In einer gewissen Umgebung von z_0 lässt sich $f(z)$ schreiben als:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad c_k := \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Nach Definition ist z_0 genau dann eine Nullstelle von f, wenn $f(z_0) = 0$ ist, d.h. $c_0 = 0$ ist.

Definition Die Funktion f hat in z_0 eine *Nullstelle der Ordnung* ν, wenn

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{\nu - 1} = 0 \text{ und } c_\nu \neq 0$$

ist. Die Zahl ν heißt auch *Vielfachheit* der Nullstelle z_0.

Hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ν, so gibt es eine holomorphe Funktion f_ν auf G mit $f_\nu(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^\nu f_\nu(z) \text{ in } G.$$

Denn z_0 ist eine hebbare Singularität von

$$\begin{aligned} f_\nu(z) &:= \frac{f(z)}{(z-z_0)^\nu} = c_\nu + c_{\nu+1}(z-z_0) + \dots \\ &= \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-\nu}. \end{aligned}$$

Definition Es sei $z_0 \in G$ und f sei definiert und holomorph in $G \setminus \{z_0\}$. Dann heißt z_0 *isolierte Singularität* von f. Der Punkt z_0 heißt *Pol von f* genau dann, wenn

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$$

ist, d.h. wenn es für alle $M > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in G \setminus \{z_0\}$ gilt

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Ist U eine (offene) Umgebung von z_0, so nennen wir $U \setminus \{z_0\}$ auch eine *punktierte Umgebung* von z_0.

Ist z_0 Pol von f, so gibt es eine punktierte Umgebung $U \setminus \{z_0\}$ von z_0, auf der f nicht verschwindet. Auf $U \setminus \{z_0\}$ ist $\frac{1}{f}$ definiert und holomorph und es gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Insbesondere ist also z_0 eine hebbare Singularität von $\frac{1}{f}$; also ist $\frac{1}{f}$ holomorph fortsetzbar und man hat in $U \setminus \{z_0\}$ die Darstellung

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^\nu h(z), \quad h(z_0) \neq 0,$$

mit einer in U holomorphen, in z_0 nicht verschwindenden Funktion h und einer eindeutig bestimmten Zahl $\nu \geq 1$. Die Zahl ν ist dabei die Ordnung der Nullstelle von $\frac{1}{f}$. Wir können dafür auch schreiben

$$f(z) = (z-z_0)^{-\nu} \widetilde{h}(z),$$

wobei $\widetilde{h}$ holomorph in einer Umgebung von z_0 ist und $\widetilde{h}(z_0) \neq 0$ gilt. Formal sieht also ein Pol wie eine Nullstelle der Ordnung $-\nu < 0$ aus.

Definition Die Zahl ν heißt die *Ordnung des Pols z_0*.

Bevor wir zur Klassifikation von Singularitäten kommen, müssen wir noch einen kleinen Exkurs in die Topologie machen:

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Wir hatten definiert: U heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte von U durch einen Weg verbindbar sind.

Definition Die Menge U heißt *(mengentheoretisch) zusammenhängend* genau dann, wenn aus $U = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 offen, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$ (wenn es also unmöglich ist, U als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen zu schreiben).

Satz 5.10 *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, so ist U genau dann wegzusammenhängend, wenn U mengentheoretisch zusammenhängend ist.*

Zunächst einige Vorbemerkungen zum Beweis dieses Satzes.

Bemerkung 5.1 Eine Menge U ist genau dann nicht mengentheoretisch zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Funktion $U \to \{0,1\}$ gibt. Dabei habe $\{0,1\}$ die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$, d.h. insbesondere sind $\{0\}$ und $\{1\}$ offene Mengen.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir sagen, $a, b \in U$ seien *verbindbar*, wenn es einen Weg $\gamma : [0,1] \to U$ gibt, der a und b verbindet.

Lemma 5.2 *„Verbindbar" ist eine Äquivalenzrelation in U und alle Äquivalenzklassen sind offen.*

Beweis. Dass „verbindbar" eine Äquivalenzrelation in U ist, ist klar.

Ist $a \in U$, so sei U_a die Äquivalenzklasse von a, also die Menge aller mit a verbindbaren Punkte. Ist nun $b \in U_a$ und B eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt b, die ganz in U liegt, so ist auch $B \subset U_a$. □

Definition Die Äquivalenzklassen nennt man auch die *Wegekomponenten* von U.

Beweis von Satz 5.10.

„$\Rightarrow$": Angenommen, U sei nicht mengentheoretisch zusammenhängend. Dann existiert eine stetige surjektive Funktion $f : U \to \{0,1\}$. Es gibt also $a, b \in U$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$. Dann sind a und b nicht verbindbar. Denn andernfalls gäbe es einen Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = b$ und $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ wäre eine stetige Funktion, die genau die Werte 0 und 1 annimmt. Dies steht im Widerspruch zum Zwischenwertsatz.

„$\Leftarrow$": Angenommen, U sei nicht wegzusammenhängend. Dann hat U mindestens zwei Wegekomponenten. Ist also U_1 eine Wegekomponente und U_2 die Vereinigung aller übrigen Wegekomponenten, so sind U_1 und U_2 nicht leer und offen und es ist $U = U_1 \cup U_2$, also U nicht mengentheoretisch zusammenhängend. □

Satz 5.10 besagt also, dass für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ die Begriffe „wegzusammenhängend" und „zusammenhängend" äquivalent sind. Ein Gebiet ist demnach eine offene zusammenhängende Menge.

Es sei nun G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f \not\equiv 0$, so sind nach Satz 5.8 die Nullstellen von f isolierte Punkte, d.h. jede Nullstelle von f besitzt eine Umgebung, in der keine weiteren Nullstellen von f zu finden sind. Ist nun z_0 eine Nullstelle von f der Ordnung ν, so verschwinden die ersten ν Ableitungen von f in z_0. Verschwinden alle Ableitungen von f in z_0, so ist f nicht bloß in einer Umgebung von z_0, sondern sogar in ganz G identisch 0.

Satz 5.11 *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt entweder für alle $z \in G$*

(1) *$f^{(n)}(z) = 0$ für alle $n \geq 0$,*

oder für alle $z \in G$ gilt:

(2) *für mindestens ein $n \geq 0$ ist $f^{(n)}(z) \neq 0$.*

Beweis. Es sei

$$U_1 := \{z \in G \,|\, (1)\}, \quad U_2 := \{z \in G \,|\, (2)\}.$$

Dann sind U_1 und U_2 offen und es gilt $U_1 \cup U_2 = G$. Da G zusammenhängend ist, ist entweder $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. □

Es sei nun G ein Gebiet und $z_0 \in G$ eine isolierte Singularität von $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$. Als Singularitäten haben wir bereits hebbbare Singularitäten und Pole kennengelernt. Bei Polen und Nullstellen lässt sich stets eine Potenz der Form $(z - z_0)^\nu$ ausklammern, es war $\nu < 0$ bei Polstellen.

Wir können also so klassifizieren:

(i) Hebbare Singularitäten:
Dort ist f holomorph fortsetzbar.

(ii) Pole:
Dort ist $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ und $\frac{1}{f}$ hat eine Nullstelle in z_0.

(iii) *Wesentliche Singularitäten*: alle übrigen.

Definition Eine isolierte Singularität z_0 einer holomorphen Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ heißt *wesentlich*, wenn z_0 weder hebbare Singularität noch Pol von f ist.

Für das Verhalten einer Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität hat man:

Satz 5.12 (Casorati-Weierstraß) *Es sei G ein Gebiet und $z_0 \in G$ eine wesentliche Singularität der Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Dann kommt f in jeder Umgebung von z_0 jeder komplexen Zahl beliebig nahe, d.h. es gibt zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$, zu jedem $\delta > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in G \setminus \{z_0\}$, so dass*

$$|z - z_0| < \delta \text{ und } |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $w_0 \in \mathbb{C}$, ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in G \setminus \{z_0\}$ gilt

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| \geq \varepsilon.$$

Dann wäre für $z \in G \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$\left|\frac{1}{f(z) - w_0}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

also

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

auf $\Delta_\delta \setminus \{z_0\}$ beschränkt, also z_0 hebbare Singularität von g. Dann hat

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0$$

in z_0 eine hebbare Singularität (falls $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$) oder einen Pol (falls $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$), aber jedenfalls keine wesentliche Singularität im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Zusatz Die Funktion f kommt auch in jeder Umgebung der wesentlichen Singularität dem „Wert" ∞ beliebig nahe, d.h. für alle $\delta > 0$ und alle $M > 0$ gibt es ein $z \in G \setminus \{z_0\}$, so dass $|z - z_0| < \delta$ und $|f(z)| > M$ gilt.

Beweis. Andernfalls würde gelten: Es gibt ein $\delta > 0$ und ein $M > 0$, so dass für alle $z \in G \setminus \{z_0\}$ gilt:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| \leq M,$$

f wäre also in einer Umgebung von z_0 beschränkt und damit z_0 hebbare Singularität. □

Die Behauptung des Satzes von Casorati-Weierstraß kann auch wie folgt formuliert werden:

Wir erinnern zunächst an einige Begriffe aus der Topologie: Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von M, wenn in jeder Umgebung von z ein Punkt von $w \in M$ liegt mit $w \neq z$. Die Menge

$$\overline{M} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$$

heißt die *(abgeschlossene) Hülle* von M. Ist $\overline{M} = \mathbb{C}$, so sagt man: *$M$ liegt dicht in* $\mathbb{C}$. Demnach gilt

Bemerkung 5.2 Ist z_0 eine wesentliche Singularität der Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, so gilt für jede Umgebung U von z_0, $U \subset G$:

$$\overline{f(U \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C},$$

d.h. das Bild jeder punktierten Umgebung von z_0 liegt dicht in $\mathbb{C}$.

Beispiel 5.4 Wir zeigen, dass 0 eine wesentliche Singularität der in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion $f(z) = e^{1/z}$ ist:

Man beachte zunächst, dass aus der im Satz von Casorati-Weierstraß angegebenen Eigenschaft bereits folgt, dass z_0 eine wesentliche Singularität ist (warum?).

Wir zeigen also:

$$\forall w_0 \in \mathbb{C}\ \forall \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ (|z| < \delta \text{ und } |e^{\frac{1}{z}} - w_0| < \varepsilon).$$

Äquivalent dazu ist:

$$\forall w_0 \in \mathbb{C}\ \forall M > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in \mathbb{C}\ (|z| > M \text{ und } |e^z - w_0| < \varepsilon).$$

Nun gilt:

(a) e^z hat die Periode $2\pi i$, denn

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{z+2\pi i}.$$

(b) Auf jedem Streifen

$$T_k = \{x + i(y + 2\pi k) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le y < 2\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

liefert e^z eine Bijektion $T_k \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Polarkoordinaten).

Ist uns also ein $w_0 \in \mathbb{C}$ gegeben, so kommt die Funktion e^z beliebig weit draußen dem Wert w_0 beliebig nahe, nimmt sogar jeden Wert $w_0 \neq 0$ beliebig oft an.

6 Der Cauchysche Integralsatz für beliebige Gebiete

Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Außerdem sei γ ein geschlossener Weg in G. In diesem Abschnitt soll uns die Frage beschäftigen, welche Werte $\int_\gamma f(z)\,dz$ annehmen kann.

Frage Für welche geschlossenen Wege γ ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede in G holomorphe Funktion f?

Zu $a \notin G$ betrachte man die holomorphe Funktion $\frac{1}{z-a}$. Ist nun γ so ein „guter“ Weg, für den $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f gilt, so gilt insbesondere

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0 = 2\pi i \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, a).$$

Wir sehen also: Ist γ „gut“, so ist $\mathrm{Uml}(\gamma, a) = 0$ für alle $a \in G$.

Gute Wege bekommen einen Namen.

Definition Ein geschlossener Weg γ heißt *nullhomolog in* G, wenn für jeden Punkt $a \notin G$ gilt: $\mathrm{Uml}(\gamma, a) = 0$.

Nur nullhomologe Wege haben also überhaupt die Chance, dass für sie der Cauchysche Integralsatz in voller Allgemeinheit gilt. Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend.

Da jeder Weg in der Kreisscheibe nullhomolog ist, taucht dieser Begriff im früher bewiesenen Cauchyschen Integralsatz nicht auf.

Nun also Vorarbeiten für den Cauchyschen Integralsatz in allgemeiner Form.

Als Verallgemeinerung des Begriffs *Weg* führen wir jetzt Ketten ein.

Eine *Kette* ist eine formale Summe

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j, \quad m_j \in \mathbb{Z},$$

wobei die γ_j (stückweise stetig differenzierbare) Wege sind.

Die Summe zweier solcher Ketten, in denen genau dieselben Wege γ_j vorkommen,

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} m_j \gamma_j, \quad \gamma' = \sum_{j=1}^{n} n_j \gamma_j,$$

ist

$$\gamma + \gamma' = \sum_{j=1}^{n} (m_j + n_j)\gamma_j.$$

Man kann stets erreichen, dass in zwei Ketten dieselben Wege auftreten: Fehlt etwa in einer Kette η, so addiere man 0η.

Beispiel 6.1

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_2 &= 1\gamma_1 - 1\gamma_2 + 0\gamma_3, \\ (\gamma_1 - \gamma_2) + (\gamma_2 - 3\gamma_3) &= (\gamma_1 - \gamma_2 + 0\gamma_3) + (0\gamma_1 + \gamma_2 - 3\gamma_3) = \gamma_1 - 3\gamma_3. \end{aligned}$$

Die Menge aller Ketten hat also eine Gruppenstruktur. Die Gruppe heißt die *von den Wegen erzeugte freie abelsche Gruppe.*

Das Integral über eine Kette $\gamma = \sum m_j \gamma_j$ ist wie folgt definiert:

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum m_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Unter dem *Träger* der Kette $\gamma = \sum m_j \gamma_j$ versteht man die Menge

$$\operatorname{Tr}\gamma := \bigcup_{m_j \neq 0} \operatorname{Bild}\gamma_j.$$

Eine Kette heißt *geschlossen*, wenn alle γ_j geschlossene Wege sind.

Es sei γ eine geschlossene Kette und $a \notin \operatorname{Tr}\gamma$. Dann ist die *Umlaufszahl* von γ um a gegeben durch

$$\operatorname{Uml}(\gamma, a) = \sum m_j \operatorname{Uml}(\gamma_j, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Ist G ein Gebiet und $\gamma = \sum m_j \gamma_j$ eine Kette mit Träger in G, so heißt γ *nullhomolog in G*, wenn γ geschlossen und

$$\operatorname{Uml}(\gamma, a) = 0$$

ist für alle $a \notin G$.

Zwei Ketten γ und η heißen *homolog in G* (in Zeichen $\gamma \sim \eta$), wenn ihre Differenz $\gamma - \eta$ nullhomolog in G ist.

Ist γ ein Weg, $\gamma : [a, b] \to G$ und $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so heißt jede Kette der Form $\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j$ eine *Unterteilung* von γ, sofern jedes η_j aus $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ durch endlich viele Prozesse folgender zwei Typen hervorgeht:

(i) Durch Umparametrisierung

(ii) Durch Ersetzung eines so entstandenen η_j durch $-\eta_j^{-1}$, worin η_j^{-1} aus η_j durch Orientierungsumkehr entsteht: Ist $\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gegeben, so ist $\eta^{-1} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ durch $\eta^{-1}(t) = \eta(\alpha + \beta - t)$ definiert.

Ist allgemeiner $\gamma = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \gamma_j$ eine Kette, so nennen wir jede Kette der Form

$$\eta = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \left(\sum_{k=1}^{k_j} \nu_{jk} \right)$$

eine *Unterteilung* von γ, sofern alle Ketten $\sum_{k=1}^{k_j} \nu_{jk}$ Unterteilungen der Wege γ_j sind.

Bemerkung 6.1 Ist die Kette η eine Unterteilung der Kette γ, so gilt für stetige f

$$\int_\eta f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

nach Definition.

Es soll nun eine neue Methode zur Berechnung von Umlaufszahlen dargestellt werden.

Es sei $\gamma : [a,b] \to G$ ein Weg und $z_0 \notin \operatorname{Tr}\gamma$. Wir betrachten einen Strahl S mit Fußpunkt z_0, d.h.

$$S = \{z_0 + tw \,|\, t \geq 0\},$$

wobei $w \in \mathbb{C}$ die Richtung von S definiert. Wir nehmen nun an, dass es nur endlich viele Punkte $a < t_1 < \ldots < t_n < b$ gibt, für die $\gamma(t_j)$ auf S liegt. Allen Punkten t_j sollen nun Indizes τ_j zugeordnet werden, aus denen sich $\operatorname{Uml}(\gamma, z_0)$ berechnen lässt. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned}
\tau_j \quad &:= +1, \quad \text{falls es ein } \varepsilon > 0 \text{ gibt, so dass für alle } \delta > 0 \text{ gilt:} \\
&\qquad\quad \delta < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Im}\frac{\gamma(t_j+\delta) - z_0}{w} > 0 \text{ und } \operatorname{Im}\frac{\gamma(t_j-\delta) - z_0}{w} < 0, \\
&:= -1, \quad \text{falls es ein } \varepsilon > 0 \text{ gibt, so dass für alle } \delta > 0 \text{ gilt:} \\
&\qquad\quad \delta < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Im}\frac{\gamma(t_j+\delta) - z_0}{w} < 0 \text{ und } \operatorname{Im}\frac{\gamma(t_j-\delta) - z_0}{w} > 0, \\
&:= 0, \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

Satz 6.1 *Unter den genannten Voraussetzungen gilt*

$$\operatorname{Uml}(\gamma, z_0) = \sum_{j=1}^{n} \tau_j,$$

d.h. die Umlaufszahl ist die Summe der Schnittpunktindizes.

Beweis. O.B.d.A. sei $z_0 = 0$.

Es sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass die Intervalle $[t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]$ paarweise disjunkt sind und die Punkte a, b nicht enthalten.

Nun ist

$$2\pi i \cdot \operatorname{Uml}(\gamma, 0) = \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Die Idee des Beweises besteht darin den Weg an den Punkten $t_j - \varepsilon$ und $t_j + \varepsilon$ zu unterteilen, die Integrale über die Teilwege zu betrachten und dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ zu vollziehen:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} =$$

$$\int_{\gamma|_{[a,t_1-\varepsilon]}} \frac{dz}{z} + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma|_{[t_j-\varepsilon,t_j+\varepsilon]}} \frac{dz}{z} + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_j+\varepsilon,t_{j+1}-\varepsilon]}} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma|_{[t_n+\varepsilon,b]}} \frac{dz}{z}.$$

In $\mathbb{C}\backslash S$ besitzt $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion, nämlich einen *Zweig des Logarithmus*

$$\log(z) := \ln|z| + i \arg z,$$

wobei

$$\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + 2\pi, \quad w = re^{i\varphi_0}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \log(\gamma(t_1-\varepsilon)) - \log(\gamma(a)) + \log(\gamma(b)) - \log(\gamma(t_n+\varepsilon)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1}[\log(\gamma(t_{j+1}-\varepsilon)) - \log(\gamma(t_j+\varepsilon))] + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma|_{[t_j-\varepsilon,t_j+\varepsilon]}} \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

Da die Umlaufszahl ganz ist, ist das Integral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ rein imaginär. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= i\mathrm{Im}\int_\gamma \frac{dz}{z} \\ &= i\sum_{j=1}^{n}[\arg(\gamma(t_j-\varepsilon)) - \arg(\gamma(t_j+\varepsilon))] + i\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma|_{[t_j-\varepsilon,t_j+\varepsilon]}} \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ konvergieren die Integrale gegen 0, da die Weglängen gegen 0 konvergieren. Die Argumentsdifferenzen konvergieren gegen $2\pi\tau_j$. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 6.1 *Es sei $\gamma = \sum_{j=1}^n m_j\gamma_j$ eine geschlossene Kette, $z_0 \notin \mathrm{Tr}\,\gamma$. Weiter sei S ein in z_0 beginnender Strahl, der jeden der Wege γ_j mit $m_j \neq 0$ nur zu endlich vielen Zeitpunkten $t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j}$ trifft, die nicht Anfangs- oder Endpunkt des Weges definieren. Definiert man nun wie oben Schnittpunktindizes $\tau_{j,k}$, so gilt*

$$\mathrm{Uml}(\gamma, z_0) = \sum_{j=1}^n m_j \left(\sum_{k=1}^{n_j}\tau_{j,k}\right).$$

Satz 6.2 (Cauchyscher Integralsatz für nullhomologe Ketten) *Es sei G ein Gebiet und γ eine geschlossene nullhomologe Kette in G. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Übergang zu immer schöneren Ketten. Schließlich brauchen wir nur noch den Satz von Goursat anzuwenden!

(a) Zunächst ersetzen wir die Kette $\gamma = \sum_{j=1}^N \alpha_j\gamma_j$ durch eine Rechteckskette $\eta = \sum_{j=1}^N \alpha_j\eta_j$, d.h. eine, in der alle auftretenden Wege η_j aus endlich vielen achsenparallelen Geradenstücken bestehen:

Wir ersetzen jeden Weg γ_j durch einen Rechtecksweg. Die folgenden Überlegungen gelten für einen beliebigen Weg $\gamma_j : [a, b] \to G$.

Da das Bild von γ_j kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jede Kreisscheibe $\Delta_\varepsilon(\gamma_j(t))$ für $t \in [a, b]$ noch ganz in G liegt. Da $[a, b]$ kompakt ist, ist γ_j insbesondere gleichmäßig stetig. Zu obigem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass für alle $t, t' \in [a, b]$ gilt:

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma_j(t) - \gamma_j(t')| < \varepsilon.$$

Wir unterteilen nun das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Punkte

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b,$$

so dass $|t_{k+1} - t_k| < \delta$ für $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, und wir setzen $a_k := \gamma_j(t_k)$.

Nach Konstruktion kann man für $k = 0, \ldots, n-1$ einen achsenparallelen Weg η_j^k von a_k nach a_{k+1} finden, der ganz in $\Delta_\varepsilon(a_k)$ verläuft (Skizze!). Es sei η_j der Weg von a_0 nach a_n, der durch Zusammensetzung aller Wege η_j^k entsteht.

Es sei nun f eine holomorphe Funktion in G. Wegen des Cauchyschen Integralsatzes für die Kreisscheibe gilt für alle k

$$\int_{\eta_j^k} f(z)\, dz = \int_{\gamma_j|_{[t_k, t_{k+1}]}} f(z)\, dz,$$

und damit auch

$$\int_{\eta_j} f(z)\, dz = \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Ist γ_j geschlossen, so auch η_j. Aus der obigen Formel folgt, dass dann $\gamma_j - \eta_j$ in G nullhomolog ist, d.h. γ_j und η_j sind homolog in G, und es ist γ genau dann nullhomolog in G, wenn η nullhomolog in G ist.

(b) Es bleibt nur noch zu zeigen:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede in G nullhomologe geschlossene „Rechteckskette“ γ und jede in G holomorphe Funktion f.

Dazu sei $\gamma = \sum_{j=1}^N \alpha_j \gamma_j$ eine geschlossene Rechteckskette. Wir konstruieren nun ein Rechtecksnetz, indem wir durch jeden Eckpunkt von γ Geraden parallel zu den beiden Koordinatenachsen zeichnen (Skizze!). Dabei treten sowohl echte Rechtecke R_j als auch einige unbeschränkte Gebiete R_k auf, die wir als unbeschränkte Rechtecke ansehen können.

In jedem Rechteck R_j wählen wir einen inneren Punkt $a_j \in \mathring{R}_j$. Wir setzen $m_j := \mathrm{Uml}(\gamma, a_j)$.

Wir zeigen nun

(i) Ist $m_j \neq 0$, so ist $R_j \subset G$.

(ii) Durch geeignete Unterteilung entsteht aus der Kette γ die Kette $\sum m_j \partial R_j$. (Man beachte, dass für ein unbeschränktes Rechteck R_k $m_k = 0$ ist.)

Aus (i) und (ii) folgt der Satz, denn dann ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{m_j \neq 0} \int_{\partial R_j} f(z)\, dz = 0$$

nach dem Satz von Goursat.

Zu (i): Es sei R_j ein Rechteck mit $m_j \neq 0$. Ist $z \in R_j \setminus \operatorname{Tr}\gamma$, so ist

$$\operatorname{Uml}(\gamma, z) = \operatorname{Uml}(\gamma, a_j) = m_j \neq 0,$$

da die Verbindungsstrecke von z und a_j den Träger von γ nicht trifft. Da γ nullhomolog in G ist, folgt $z \in G$. Ist $z \in R_j \cap \operatorname{Tr}\gamma$, so gilt natürlich auch $z \in G$.

Zu (ii): Nach Unterteilung können wir sowohl γ als auch alle ∂R_j als Ketten von lauter Wegen auffassen, die alle Seiten irgendwelcher Rechtecke sind. Die Seiten der Rechtecke seien wie folgt orientiert: stets nach oben oder nach rechts.

Wir zeigen nun die Identität

$$\gamma = \sum m_j \partial R_j$$

durch Koeffizientenvergleich. Es sei σ ein Geradenstück von γ, so dass also

$$\gamma = \ell\sigma + \gamma',$$

wobei γ' eine Kette ist, in der σ nicht mehr vorkommt. Die Rechtecke R_1 und R_2 seien die beiden wohlbestimmten Rechtecke des Rechtecknetzes, die σ als gemeinsames Randstück haben. Dabei sei

$$\begin{aligned} \partial R_1 &= \sigma + \text{ übrige Randstücke}, \\ \partial R_2 &= -\sigma + \text{ übrige Randstücke}, \end{aligned}$$

wodurch die Indizierung der Rechtecke festgelegt ist. Also ist

$$\sum m_j \partial R_j = m_1\sigma - m_2\sigma + \eta',$$

wobei η' eine Kette ist, in der σ nicht mehr auftritt.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $m_1 - m_2 = \ell$, d.h. dass gilt:

$$\operatorname{Uml}(\gamma, a_1) = \operatorname{Uml}(\gamma, a_2) + \ell.$$

Das ist aber nach Konstruktion klar: Es sei S der von a_1 ausgehende Strahl, der durch den Punkt a_2 geht. Nach Korollar 6.1 ist $\operatorname{Uml}(\gamma, a_1) - \operatorname{Uml}(\gamma, a_2)$

die Summe der Indizes von Schnittpunkten auf der Verbindungsstrecke $\overline{a_1a_2}$ von a_1 und a_2. Nach Konstruktion schneidet die Kette γ die Strecke $\overline{a_1a_2}$ aber nur in σ mit Schnittpunktindex $+1$, die genannte Summe von Schnittpunktindizes von $\gamma = \ell\sigma + \gamma'$ ist also ℓ.

Damit ist Satz 6.2 bewiesen. □

Korollar 6.2 (Allgemeine Cauchysche Integralformel) *Es sei G ein Gebiet, γ eine geschlossene nullhomologe Kette in G , $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jedes $a \notin \operatorname{Tr}\gamma$*

$$\operatorname{Uml}(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Beweis. Wende Satz 6.2 an auf die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

die nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph in G ist. □

Der Cauchysche Integralsatz kann auch so formuliert werden:

Satz 6.3 *Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in G. Gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für alle „Musterfunktionen" $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $a \notin G$, so gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für jede in G holomorphe Funktion.*

7 Der Residuensatz

Der Residuensatz ist die Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und f sei eine in $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Für die Kreisscheibe $\Delta = \{z \,|\, |z-a| < r\}$ gelte $\overline{\Delta} \subset U$. Der Rand $\partial\Delta$ der Kreisscheibe habe die übliche Parametrisierung.

Definition Unter dem *Residuum von f an der Stelle a* versteht man die Zahl

$$\operatorname{Res}_a f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz.$$

Da f im Allgemeinen nicht holomorph in ganz in U ist, sondern nur in $U \setminus \{a\}$ können wir nicht erwarten, dass $\operatorname{Res}_a f(z) = 0$ ist! Beispielsweise ist

$$\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z} = 1.$$

Wir müssen noch zeigen, dass das Residuum unabhängig von der Wahl der Kreisscheibe Δ ist.

Dazu seien Δ_1, Δ_2 zwei Kreisscheiben um a, die mit ihrem Abschluss in einer Kreisscheibe Δ' um a mit $\overline{\Delta'} \subset U$ enthalten sind. Dann ist die Kette $\partial\Delta_1 - \partial\Delta_2$ nullhomolog in $\Delta' \setminus \{a\}$ und f ist holomorph in $\Delta' \setminus \{a\}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist also

$$0 = \int_{\partial\Delta_1 - \partial\Delta_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz - \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz.$$

Das Residuum ist also unabhängig von der gewählten Kreisscheibe.

Wir betrachten nun ein Beispiel für die Berechnung des Residuums: f habe in a einen Pol der Ordnung m. Dann wissen wir, dass

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m \neq 0$$

ist und die Funktion $f(z)(z-a)^m$ in U holomorph ist. Aus der Potenzreihenentwicklung von $f(z)(z-a)^m$,

$$f(z)(z-a)^m = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots,$$

erhalten wir durch Division durch $(z-a)^m$ die in $U \setminus \{a\}$ gültige Entwicklung

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + g(z).$$

Darin ist offenbar $c_j = a_{j+m}$, $c_{-m} \neq 0$, und die Funktion $g(z)$ ist holomorph in U.

Definition Der Teil

$$c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} = f(z) - g(z)$$

heißt auch *Hauptteil von f um a.*

Satz 7.1 *Ist a ein Pol der Ordnung m der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, so gilt*

$$\mathrm{Res}_a f(z) = c_{-1}.$$

Beweis. Wir brauchen nur zu integrieren: Da g holomorph in U ist, gilt

$$\int_{\partial\Delta} g(z)\,dz = 0.$$

Für $\nu = -m, \dots, -2$ hat $c_\nu(z-a)^\nu$ eine Stammfunktion in $U \setminus \{a\}$, also ist auch in diesen Fällen

$$\int_{\partial\Delta} c_\nu(z-a)^\nu\,dz = 0.$$

Also gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} c_{-1}\frac{dz}{z-a} = c_{-1}\mathrm{Uml}(\partial\Delta, a) = c_{-1}.$$

□

Satz 7.2 *Hat $f(z)$ in a einen Pol der Ordnung 1, so gilt*

$$\mathrm{Res}_a f(z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

Beweis. Der Hauptteil hat in diesem Fall die Form $c_{-1}(z-a)^{-1}$: $f(z)(z-a)$ ist unter den genannten Voraussetzungen holomorph und es existiert

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \lim_{z\to a}(c_{-1} + g(z)(z-a)) = c_{-1} = \mathrm{Res}_a f(z).$$

□

Wir formulieren nun den Residuensatz.

Satz 7.3 (Residuensatz) *Es sei G ein Gebiet, $a_1, \dots, a_n \in G$, $f : G \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine geschlossene nullhomologe Kette in G, deren Träger keins der a_j trifft. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathrm{Uml}(\gamma, a_j) \cdot \mathrm{Res}_{a_j} f(z).$$

Man beachte dabei, dass γ als nullhomolog in G vorausgestzt ist und nicht in $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. In letzterem Fall wäre $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$!

Beweis. Wir bilden die neue Kette

$$\eta = \gamma - \sum_{j=1}^n \mathrm{Uml}(\gamma, a_j)\partial\Delta_j,$$

wobei die Δ_j kleine Kreise in G mit Mittelpunkt a_j seien. Alle Δ_j seien paarweise disjunkt. Wir zeigen, dass η nullhomolog in $G' := G\setminus\{a_1, \dots, a_n\}$ ist.

Zu zeigen ist also: $\mathrm{Uml}(\eta, a) = 0$ für $a \notin G'$.

Es sei zunächst $a = a_j$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta_k} \frac{dz}{z-a_j} = 0 \text{ für } k \neq j.$$

Also folgt schon

$$\int_\eta \frac{dz}{z-a_j} = \int_\gamma \frac{dz}{z-a_j} - \mathrm{Uml}(\gamma, a_j)\int_{\partial\Delta_j} \frac{dz}{z-a_j} = 0.$$

Ist nun $a \notin G$, so gilt $\mathrm{Uml}(\gamma, a) = 0$ (da γ nullhomolog in G) und $\mathrm{Uml}(\partial\Delta_j, a) = 0$ (da $\partial\Delta_j$ nullhomolog in G), $j = 1, \dots, n$. Also ist auch $\mathrm{Uml}(\eta, a) = 0$.

Da η nullhomolog in G' ist und $f : G' \to \mathbb{C}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\eta f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Uml}(\gamma,a_j)\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Uml}(\gamma,a_j)\cdot\mathrm{Res}_{a_j}f(z) \end{aligned}$$

nach Definition des Residuums. □

Die schon in §6 bewiesene Cauchysche Integralformel kann auch als Spezialfall des Residuensatzes angesehen werden:

Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, γ eine geschlossene nullhomologe Kette in G, deren Träger einen bestimmten Punkt $a \in G$ nicht enthält. Dann besagt die Cauchysche Integralformel

$$\mathrm{Uml}(\gamma,a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Zum Beweis dieser Formel betrachten wir die Funktion

$$\begin{array}{rccc} g: & G\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{f(z)}{z-a} \end{array}.$$

Sie ist in $G\setminus\{a\}$ holomorph und hat im schlimmsten Fall in a einen Pol 1. Ordnung.

Laut Residuensatz gilt nun

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \mathrm{Uml}(\gamma,a)\cdot\mathrm{Res}_a g(z).$$

Hat also g in a einen Pol, so hat dieser die Ordnung 1, da f in G holomorph ist. Nach Satz 7.2 gilt damit

$$\mathrm{Res}_a g(z) = \lim_{z\to a} g(z)(z-a) = \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

und damit die obige Formel.

Hat g keinen Pol in a, so kann das nur daran liegen, dass $f(a) = 0$ ist. Dann ist a eine hebbare Singularität von g und g ist holomorph nach a fortsetzbar. Damit folgt

$$\mathrm{Res}_a g(z) = 0 = f(a)$$

und damit ebenfalls die obige Formel.

Mit dem Residuenkalkül lassen sich reelle Integrale ausrechnen. Das Prinzip dabei ist, das reelle Integrationsinterval in Beziehung zu setzen zu einem geschlossenen Integrationsweg in der komplexen Ebene, für den sich dann Integrale mit Hilfe des Residuensatzes auswerten lassen. Wir geben nun Beispiele an.

Beispiel 7.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.
Dazu betrachten wir die in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ holomorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. In i und $-i$ hat sie Pole 1. Ordnung.

Nach Satz 7.2 ist demnach

$$\mathrm{Res}_i f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Analog erhält man

$$\mathrm{Res}_{-i} f(z) = -\frac{1}{2i}.$$

Als Weg nehmen wir den Rand eines Halbkreises vom Radius R um 0:

$$\begin{array}{rccl} \gamma_R: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} Re^{it} & \text{für } 0 \le t \le \pi, \\ \frac{R}{\pi}(2t - 3\pi) & \text{für } \pi \le t \le 2\pi. \end{cases} \end{array}$$

Der Weg γ_R ist nullhomolog in $\mathbb{C}$. Also gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Es sei nun γ'_R der obere Halbkreisbogen. Dann ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma'_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$$

Nun lassen wir R gegen ∞ gehen:

$$\left| \int_{\gamma'_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \le L(\gamma'_R) \max_{|z|=R} \frac{1}{|1+z^2|} = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \to 0.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$$

(Dieses einfache Beispiel hätte man natürlich auch dadurch erschlagen können, dass man sich erinnert, dass $\arctan x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist.)

Mit Hilfe des Residuensatzes sollen nun weitere Integrale rationaler Funktionen bestimmt werden.

Im Folgenden sei $R(z)$ eine *rationale Funktion*, d.h. ein Quotient aus zwei Polynomen $P(z)$ und $Q(z)$. Wir zeigen folgenden Satz:

Satz 7.4 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat; der Grad des Nennerpolynoms von R sei um mindestens zwei größer als der Grad des Zählerpolynoms.*

Dann existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ im Sinne von Lebesgue und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{a_j \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}_{a_j} R(z).$$

In der genannten Summe durchläuft a_j die (endlich vielen) Pole von $R(z)$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

(Weil das Polynom $Q(z)$ im Nenner nur endlich viele Nullstellen hat, hat $R(z)$ nur endlich viele Pole!)

Zum Beweis von Satz 7.4 brauchen wir einen Hilfssatz.

Lemma 7.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.4 gilt: Es gibt eine Konstante $c > 0$ und ein $M > 0$, so dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$|z| \geq M \Rightarrow |R(z)| \leq c|z|^{-2}.$$

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{a_n z^n + \ldots + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_0} \quad (m \geq n+2) \\ &= \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}}{z^{m-n}\left[b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m}\right]} \\ &=: \frac{F(z)}{z^{m-n}} \end{aligned}$$

Für $z \to \infty$ gilt aber

$$F(z) := z^{m-n} R(z) \to \frac{a_n}{b_m},$$

also ist F insbesondere beschränkt. Also gibt es ein $c > 0$ und ein $M > 0$, so dass für alle z mit $|z| \geq M$ gilt:

$$|R(z)| \leq c\left|\frac{1}{z^{m-n}}\right|.$$

Da nach Voraussetzung $m \geq n+2$, gilt dann auch

$$|R(z)| \leq c|z|^{-2}.$$

□

Beweis von Satz 7.4.

(a) Wir zeigen zunächst die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$:

Nach Lemma 7.1 existieren $c > 0$ und $M > 0$, so dass auf $[M,\infty) \subset \mathbb{R}$ gilt: $|R(x)| \leq cx^{-2}$. Ist $N > M$, so gilt also

$$\left|\int_M^N R(x)\,dx\right| \leq c\int_M^N \frac{dx}{x^2} \leq c\int_M^\infty \frac{dx}{x^2} = c\frac{1}{M}.$$

(Nach Analysis I existiert für jedes $s > 1$ auch

$$\int_M^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{M^{s-1}}.)$$

Nach dem Satz von Lebesgue (Analysis III, Satz 5.2) folgt, dass auch

$$\int_M^\infty R(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_M^N R(x)\,dx$$

und damit auch

$$\int_{-\infty}^\infty R(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M R(x)\,dx$$

existiert.

(b) Die im Satz angegebene Formel für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ beweisen wir wie die Behauptung in Beispiel 7.1:

Wie dort wählen wir einen Halbkreisweg γ_M (M ist jetzt der Radius), der alle Pole a_j von R in der oberen Halbebene umfasst. Mit γ'_M bezeichnen wir wieder den oberen Halbkreisbogen. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{\gamma_M} R(z)\,dz = 2\pi i\sum_{a_j\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j} R(z) = \int_{-M}^M R(x)\,dx + \int_{\gamma'_M} R(z)\,dz.$$

Ist c wie in Lemma 7.1 und M genügend groß, so gilt

$$\left|\int_{\gamma'_M} R(z)\,dz\right| \leq \pi M\frac{c}{M^2}.$$

Für $M\to\infty$ gilt also $\int_{\gamma'_M} R(z)\,dz \to 0$. Der Grenzübergang $M\to\infty$ liefert also die Behauptung. □

Beispiel 7.2 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Die Funktion

$$R(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$$

erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes. Die Pole sind genau die Nullstellen des Nenners.

Wie sehen die Nullstellen des Nenners aus? Es gilt

$$z^8 - 1 = \prod_{j=0}^{7} (z - \alpha^j),$$

wobei

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

eine 8-te Einheitswurzel ist. Nun ist $z^8 - 1 = (z^4 + 1)(z^4 - 1)$, also ist offenbar

$$z^4 + 1 = (z - \alpha)(z - \alpha^3)(z - \alpha^5)(z - \alpha^7).$$

Von diesen 4 Nullstellen liegen nur α und α^3 in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Da dies Pole erster Ordnung von R sind, können wir zur Berechnung der Residuen Satz 7.2 heranziehen:

$$\mathrm{Res}_\alpha \frac{z^2}{z^4 + 1} = \lim_{z \to \alpha} \frac{z^2 (z - \alpha)}{z^4 + 1} = \lim_{z \to \alpha} \frac{z^2}{\frac{z^4+1}{z-\alpha}} = \frac{1}{4\alpha},$$

denn es ist $\frac{z^4+1}{z-\alpha} = \frac{z^4-\alpha^4}{z-\alpha}$ nichts anderes als ein Differenzenquotient von z^4.

$$\mathrm{Res}_{\alpha^3} \frac{z^2}{z^4 + 1} = \lim_{z \to \alpha^3} \frac{z^2 (z - \alpha^3)}{z^4 + 1} = \frac{\alpha^5}{4}.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha^5 \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Wir betrachten nun Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx$, wobei R eine rationale Funktion ist.

Satz 7.5 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat, der Grad des Nenners sei größer als der Grad des Zählers. Dann existiert das reelle Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx$ und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{a_j \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j} (R(z) e^{iz}),$$

wobei a_j die Pole von $R(z)$ in $\mathbb{H}$ durchläuft.

Bemerkung 7.1 (für Hörerinnen und Hörer der Vorlesung Analysis III) Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix}\, dx$ braucht nicht im Sinne von Lebesgue zu existieren: Denn wenn $R(x) e^{ix}$ über $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, so muss nach Analysis III, Satz 3.7, auch $|R(x) e^{ix}| = |R(x)|$ über $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sein, also das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(x)|\, dx$$

existieren. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x}$ existiert aber beispielsweise nicht.

Deshalb *definieren* wir hier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx := \lim_{r_1,r_2\to\infty} \int_{-r_1}^{r_2} R(x)e^{ix}\,dx.$$

Das Integral hinter dem Limes existiert, da der Integrand stetig ist. Der Beweis des Satzes wird zeigen, dass der Limes in der Tat existiert und den verlangten Wert hat.

Beweis von Satz 7.5. Es seien r_1, r_2, s positiv und so groß, dass alle in $\mathbb{H}$ gelegenen Pole von $R(z)$ in dem von den folgenden Wegen eingeschlossenen Rechteck liegen:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0,s] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = r_2 + it,\\
\gamma_2 &: [-r_1,r_2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = (r_2 - r_1 - t) + is,\\
\gamma_3 &: [0,s] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = -r_1 + i(s-t),\\
\gamma_4 &: [-r_1,r_2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_4(t) = t.
\end{aligned}$$

Der Weg $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ ist nullhomolog in $\mathbb{C}$. Nach dem Residuensatz ist also

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(z)e^{iz}\,dz &= \int_{-r_1}^{r_2} R(x)e^{ix}\,dx + \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} R(z)e^{iz}\,dz\\
&= 2\pi i \sum_{a_j\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j}(R(z)e^{iz}),
\end{aligned}$$

wobei die Summe über die Polstellen a_j von $R(z)$ in der oberen Halbebene genommen wird.

Wir schätzen nun die Integrale $\int_{\gamma_\nu} R(z)e^{iz}\,dz$, $\nu = 1,2,3$, ab. Wie in Lemma 7.1 können wir eine Konstante $c > 0$ und ein $M > 0$ finden, so dass $|R(z)| < c|z|^{-1}$ für alle $|z| \geq M$ gilt. Außerdem gilt

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}||e^{-y}| = |e^{-y}|.$$

Für γ_2 und für genügend großes s liefert die Standardabschätzung:

$$\left|\int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}\,dz\right| \leq (r_1+r_2)cs^{-1}e^{-s}.$$

Bei genügend großem r_2 gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_1} R(z)e^{iz}\,dz\right| &= \left|\int_0^s R(r_2+iu)e^{i(r_2+iu)}i\,du\right|\\
&\leq \int_0^s |R(r_2+iu)|\left|e^{i(r_2+iu)}\right|du\\
&\leq cr_2^{-1}\int_0^s e^{-u}\,du \leq cr_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für genügend großes r_1

$$\left|\int_{\gamma_3} R(z)e^{iz}\,dz\right| \le cr_1^{-1}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir zunächst r_1, r_2, s so groß, dass auf γ_1, γ_2, γ_3 gilt:

$$|R(z)| \le c|z|^{-1}.$$

Sodann vergrößern wir nötigenfalls r_1 und r_2 so weit, dass

$$r_1, r_2 > \frac{3c}{\varepsilon}$$

gilt. Schließlich vergrößern wir s, so dass

$$(r_1 + r_2)cs^{-1}e^{-s} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

ist. Damit erreichen wir, dass

$$\left|\int_{-r_1}^{r_2} R(x)e^{ix}\,dx - 2\pi i \sum_{a_j\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j}(R(z)e^{iz})\right| < \varepsilon$$

wird. Offensichtlich gilt diese Abschätzung auch für alle größeren r_1 und r_2: Eine Vergrößerung von r_1 und r_2 erhält die Abschätzung

$$cr_1^{-1} + cr_2^{-1} < \frac{2}{3}\varepsilon;$$

wenn man die Vergrößerung von r_1 und r_2 durch eine passende Vergrößerung von s kompensiert, bleibt auch die Abschätzung (4) erhalten.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Eine Verallgemeinerung: Wir wollen nun auch Integrale betrachten, bei denen ein Pol auf dem Integrationsweg liegt.

Definition Die rationale Funktion $R(x)$ habe auf $\mathbb{R}$ genau einen Pol a erster Ordnung. Falls

$$\lim_{r_1,r_2\to\infty,\rho\to 0}\left(\int_{-r_1}^{a-\rho} R(x)e^{ix}\,dx + \int_{a+\rho}^{r_2} R(x)e^{ix}\,dx\right)$$

existiert, so heißt er *Hauptwert des Integrals* (von $R(x)e^{ix}$ von $-\infty$ bis ∞) und wird mit

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx$$

bezeichnet.

Hier ist es ganz wesentlich, dass die Polstelle a beim Integrieren von beiden Seiten gleichmäßig approximiert wird, durch ρ nämlich. Hingegen dürfen r_1 und r_2 ganz unabhängig voneinander gegen ∞ gehen.

Satz 7.6 *Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion mit Nennergrad $>$ Zählergrad. Außerdem habe $R(x)$ auf $\mathbb{R}$ höchstens einen Pol a erster Ordnung.*

Dann existiert

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{a_j\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j}(R(z)e^{iz}) + \pi i \mathrm{Res}_a(R(z)e^{iz}).$$

Die Summe durchläuft die Pole a_j von R in $\mathbb{H}$.

Auch hier braucht $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,dx$ nicht im Lebesgueschen Sinne zu existieren.

Beweis von Satz 7.6. Wir modifizieren den im Beweis von Satz 7.5 benutzten Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen γ_ρ vom Radius ρ um a: Wir betrachten die Kette

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_\rho.$$

Wie im Beweis von Satz 7.5 erhalten wir, dass

$$\int_{-r_1}^{a-\rho} R(x)e^{ix}\,dx + \int_{a+\rho}^{r_2} R(x)e^{ix}\,dx + \int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}\,dz - 2\pi i \sum_{a_j\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{a_j}(R(z)e^{iz})$$

für hinreichend große r_1, r_2, s beliebig klein wird.

Es bleibt zu zeigen:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}\,dz = -\pi i \mathrm{Res}_a(R(z)e^{iz}).$$

Es sei $c_{-1} := \mathrm{Res}_a(R(z)e^{iz})$. Da a ein einfacher Pol von $R(z)$ ist, gibt es eine Umgebung U von a, in der $R(z)e^{iz}$ die folgende Darstellung hat:

$$R(z)e^{iz} = \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z),$$

wobei $h(z)$ holomorph in U ist. Also ist

$$\int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}\,dz = \int_{\gamma_\rho} h(z)\,dz + c_{-1}\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-a}.$$

Da h holomorph ist, besitzt h in einer genügend kleinen Kreisscheibe Δ um a eine Stammfunktion. Da wir nur am Limes interessiert sind, können wir o.B.d.A. annehmen, dass γ_ρ ganz in Δ liegt. Dann ist $\int_{\gamma_\rho} h(z)\,dz$ die

Differenz der Werte einer Stammfunktion von h an den Endpunkten von γ_ρ. Da eine Stammfunktion stetig ist, gilt

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} h(z)\,dz = 0.$$

Nun bestimmen wir

$$\int_{\gamma_\rho}\frac{dz}{z-a}:$$

Es sei S der Strahl, der von a ausgehend parallel zur negativen imaginären Achse verläuft. Dann hat $\frac{1}{z-a}$ in $\mathbb{C}\setminus S$ als Stammfunktion einen Zweig von

$$\log(z-a) = \ln|z-a| + i\arg(z-a),$$

mit (zum Beispiel)

$$\arg(z-a)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\rho}\frac{dz}{z-a} &= \log(a+\rho-a)-\log(a-\rho-a)\\ &= \ln|\rho| + i\arg\rho - (\ln|-\rho| + i\arg(-\rho)) = i(0-\pi) = -\pi i.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. □

Bemerkung 7.2 Der Satz lässt sich in offensichtlicher Weise auf den Fall, dass $R(z)$ mehrere einfache Pole auf $\mathbb{R}$ hat, verallgemeinern.

Beispiel 7.3 $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$.
In Analysis III wurde gezeigt, dass $\frac{\sin x}{x}$ zwar nicht Lebesgue-integrierbar über $(-\infty,\infty)$ ist, aber das uneigentliche Integral (wie in Analysis I definiert) existiert. Wir zeigen jetzt die Existenz dieses Integrals und berechnen den Wert des Integrals mit der gerade gelernten Methode:

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi i\sum_{a_j\in\mathbb{H}}\mathrm{Res}_{a_j}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) + \pi i\mathrm{Res}_0\frac{e^{iz}}{z} = \pi i,$$

da die Summe verschwindet, weil es in $\mathbb{H}$ keine Pole von $\frac{1}{z}$ gibt, und

$$\mathrm{Res}_0\frac{e^{iz}}{z} = 1.$$

Wegen $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ gilt nun

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Im}\,\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi,$$

denn

$$\begin{aligned}
&\lim_{r_1,r_2\to\infty,\rho\to 0} \operatorname{Im}\left(\int_{-r_1}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\rho}^{r_2} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right)\\
&= \operatorname{Im} \lim_{r_1,r_2\to\infty,\rho\to 0} \left(\int_{-r_1}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\rho}^{r_2} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right).
\end{aligned}$$

8 Laurentreihen

Wir wollen nun Laurentreihen einführen. Zunächst eine Wiederholung:

Es sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $f : \operatorname{Tr}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert das Integral

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Tr}\gamma \to \mathbb{C}$. Es gilt

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Beispielsweise sei $\gamma = C_r$, ein Kreis vom Radius r um 0. Dann zerfällt $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Tr}\gamma = \mathbb{C} \setminus C_r$ in zwei Gebiete

$$\Delta_r(0), \quad \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_r(0) = \{z \mid |z| > r\}.$$

In der Kreisscheibe $\Delta_r(0)$ haben wir eine Potenzreihenentwicklung für $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{für } |z| < r,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta. \tag{5}$$

Wir werden nun sehen, dass sich F auch auf dem Äußeren des Kreises in eine Potenzreihe entwickeln lässt, allerdings nicht in eine Reihe in z, sondern in eine in $\frac{1}{z}$. Eine solche Reihe, ein Spezialfall einer Laurentreihe, ist auch nichts wesentlich Neues: Durch die Transformation $w = \frac{1}{z}$ übertragen sich alle unsere Sätze über komplexe Potenzreihen in w auf solche in $\frac{1}{z} = z^{-1}$, z.B.: Konvergiert die Potenzreihe $\sum c_\ell w^\ell$ für $|w| < \rho$, so konvergiert die Reihe $\sum c_\ell \frac{1}{z^\ell}$ für $|z| > \frac{1}{\rho}$ (denn

$$|w| < \rho \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{1}{w}\right| > \frac{1}{\rho}).$$

Satz 8.1 *Es sei $r > 0$, γ ein Weg in $\mathbb{C}$, dessen Träger in der kompakten Kreisscheibe $\overline{\Delta}_r(0)$ liege, $f : \operatorname{Tr}\gamma \to \mathbb{C}$ sei stetig, $0 \notin \operatorname{Tr}\gamma$.*

Dann lässt sich die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

wie folgt in eine Potenzreihe in $\frac{1}{z}$ entwickeln: Setzt man

$$a_{-n} := -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\,d\zeta \quad \textit{für } n > 0,$$

so gilt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad \textit{für } |z| > r.$$

Beweis. Durch Einführung der neuen Variablen $w = \frac{1}{z}$ gewinnen wir eine in $|w| < \frac{1}{r}$ holomorphe Funktion:

$$\widetilde{F}(w) = \widetilde{F}(\frac{1}{z}) := F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Durch die Substitution $\omega = \frac{1}{\zeta}$, $d\zeta = -\frac{1}{\omega^2}d\omega$, $\widetilde{\gamma}(t) := \frac{1}{\gamma(t)}$ erhält man daraus

$$\widetilde{F}(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(\frac{1}{\omega})\omega^{-2}}{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{w}} d\omega = \frac{w}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(\frac{1}{\omega})\omega^{-1}}{\omega - w} d\omega.$$

Die Funktion

$$\widetilde{\widetilde{F}}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(\frac{1}{\omega})\omega^{-1}}{\omega - w} d\omega$$

ist nun in $|w| < \frac{1}{r}$ holomorph, kann also um 0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\geq \frac{1}{r}$ entwickelt werden: Für $|w| < \frac{1}{r}$ gilt

$$\widetilde{\widetilde{F}}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^{n-1},$$

wobei

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(\frac{1}{\omega})\omega^{-1}}{\omega^n} d\omega.$$

Also gilt

$$F(z) = \widetilde{F}(w) = w\widetilde{\widetilde{F}}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \text{ für } |z| > r$$

und
$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} f(\frac{1}{\omega})\omega^{-n-1}\,d\omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}d\zeta.$$
Man beachte insbesondere die – bis aufs Vorzeichen – genaue Analogie dieser Formel mit der Formel (5). □

Man merke sich also: Ist C_r ein Kreis vom Radius r um $z_0 = 0$, setzt man
$$\begin{aligned} F(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \\ a_n &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{für } n \geq 0, \\ a_n &:= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{für } n < 0, \end{aligned}$$
so ist
$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{für } |z| < r, \\ F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad \text{für } |z| > r. \end{aligned}$$

Für einen allgemeinen Entwicklungspunkt z_0 notieren wir:

Satz 8.2 *Ist C_r die Kreislinie vom Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : C_r \to \mathbb{C}$ stetig und*
$$\begin{aligned} F(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \\ a_n &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \quad \textit{für } n \geq 0, \\ a_n &:= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \quad \textit{für } n < 0, \end{aligned}$$
so gilt
$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \textit{für } |z - z_0| < r, \\ F(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad \textit{für } |z - z_0| > r. \end{aligned}$$

Diese Sätze wollen wir nun anwenden, um die Laurent-Entwicklung einer holomorphen Funktion herzuleiten. Diese ist eine Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion.

Nehmen wir also an, wir hätten eine in einer gelochten Umgebung eines Punktes z_0 holomorphe Funktion. Auch diese kann um z_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden. Da aber z_0 ein Pol oder gar eine wesentliche Singularität sein kann, müssen wir auf eine Potenzreihe in $z - z_0$ und $(z - z_0)^{-1}$ gefasst sein:

Satz 8.3 *Es sei* $0 < r < R$ *und* $z_0 \in \mathbb{C}$*,* G *sei ein Gebiet, das den Kreisring* $\{z \,|\, r \leq |z - z_0| \leq R\}$ *ganz enthält,* $f : G \to \mathbb{C}$ *sei holomorph. Weiter sei* C_s *die Kreislinie um* z_0 *mit Radius* s*,* $r \leq s \leq R$*.*

Setzt man

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \quad \textit{für } n \in \mathbb{Z},$$

so gilt im Kreisring $K := \{z \,|\, r < |z - z_0| < R\}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Beweis. Es sei C_r bzw. C_R die Kreislinie um z_0 vom Radius r bzw. R.

Dann ist die Kette $\gamma = C_R - C_r$ nullhomolog in G, denn für alle $z \notin G$ gilt $\mathrm{Uml}(\gamma, z) = 0$.

Es sei nun $z \in G$ mit $r < |z - z_0| < R$, also $z \in K$. Dann gilt $\mathrm{Uml}(\gamma, z) = 1$, also nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \qquad (6)$$

Setzt man für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \quad \text{für } n \geq 0, \\ a_n &:= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \quad \text{für } n < 0, \end{aligned}$$

so gilt nach Satz 8.2 im Kreisring $K := \{z \,|\, r < |z - z_0| < R\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Dabei liefert das erste Integral in (6) die erste Reihe und das zweite die zweite. Zusammengefasst erhält man

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da die Kreislinie C_s mit $r \leq s \leq R$ homolog in G zu C_r und zu C_R ist, folgt die Behauptung des Satzes. □

Definition Die in Satz 8.3 auftretende Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

heißt *Laurentreihe* der Funktion f im Kreisring K.

Definition Eine *Laurentreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Sie heißt *konvergent* in z_1, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_1-z_0)^{-n}$ konvergieren; die Summe dieser Reihen ist dann der Wert von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

in z_1.

Mit der Laurentreihe sollen jetzt Singularitäten studiert werden. Als Vorbereitung dient der folgende Satz.

Satz 8.4 *Es sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Weiter sei R der Radius der größten offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, die ganz in G liegt. Dabei ist $R = \infty$ zugelassen.*

Dann gilt für $z \in G$ mit $0 < |z-z_0| < R$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

und γ ein geschlossener Weg in $G \setminus \{z_0\}$ ist, der nullhomolog in G ist und dessen Umlaufszahl um z_0 gleich eins ist.

Bemerkung 8.1 Je zwei solche Wege γ, $\widetilde{\gamma}$ sind homolog in $G \setminus \{z_0\}$, d.h. ihre Differenz ist nullhomolog in $G\setminus\{z_0\}$. Z.B. kann man für γ eine Kreislinie C_s um z_0 mit Radius s, $0 < s < R$, nehmen.

Beweis von Satz 8.4. Es sei $z \in G$ mit $0 < |z-z_0| < R$. Dann gibt es r_1, r_2 mit $0 < r_1 < r_2 < R$ und $r_1 < |z-z_0| < r_2$. Nach der Bemerkung ist γ homolog zu der Kreislinie C_{r_1}. Damit folgt die Behauptung aus Satz 8.3. □

Bemerkung 8.2 Der Teil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ der Laurentreihe ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\geq R$. Der Teil $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$, $w=(z-z_0)^{-1}$, der Laurentreihe in Satz 8.4 ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞. (Denn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert ja wenigstens in der Kreisscheibe $\Delta_R(z_0)$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ für $|z-z_0|>0$, d.h. für $|w|<\infty$, also für jedes w.)

Satz 8.5 *Es sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f: G\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Die Kreisscheibe $\Delta_R(z_0)$ sei ganz in G enthalten, $0<R\leq\infty$. Für $z \in G$ mit $0<|z-z_0|<R$ gelte*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Dann hat f in z_0

(i) *eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ $a_n=0$ für alle $n<0$;*

(ii) *einen Pol der Ordnung n_0 $\Leftrightarrow$ $a_{-n_0}\neq 0$ und $a_n=0$ für alle $n<-n_0$;*

(iii) *eine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n<0$.*

Beweis.

Zu (i): „$\Rightarrow$“ Hat f in z_0 eine hebbare Singularität, so folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz und der Formel für die a_n in Satz 8.4, dass $a_n=0$ für alle $n<0$.

„$\Leftarrow$“ Gilt $a_n=0$ für alle $n<0$, so gilt

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=0,$$

also ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

Zu (ii): Es ist

$$f(z)=\sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-n_0}\neq 0,$$

gleichbedeutend mit

$$f(z)=(z-z_0)^{-n_0}h(z), \quad h(z_0)\neq 0:$$

Man setze

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-n_0}(z-z_0)^n.$$

(iii) folgt aus (i) und (ii) durch Negation. $\square$

Aus Satz 8.4 folgt außerdem, dass

$$a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0} f(z)$$

das Residuum von f an der Stelle z_0 ist.

Den Teil

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

nennt man auch den *Hauptteil der Funktion f um z_0*. Hat f in z_0 einen Pol, so ist der Hauptteil eine endliche Summe, und die Definition stimmt mit der alten in §7 überein.

9 Meromorphe Funktionen und die Riemannsche Zahlensphäre

Wir betrachten nun Funktionen, die außerhalb einer diskreten Menge Z holomorph sind und dort nur Pole haben.

Es sei G ein Gebiet. Eine Teilmenge $Z \subset G$ heißt *diskrete Teilmenge* von G genau dann, wenn jeder Punkt aus Z eine Umgebung in G besitzt, die keinen weiteren Punkt aus Z enthält.

Definition Eine *meromorphe Funktion* auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $f : G \setminus Z \to \mathbb{C}$, wobei

(i) Z ist eine diskrete Teilmenge von G.

(ii) die Punkte von Z sind Pole von f.

Aus Satz 8.5 ergibt sich: Ist f meromorph auf G, so lässt sich f um jeden Punkt $z_0 \in G$ in eine Laurentreihe mit endlichem, eventuell verschwindendem, Hauptteil entwickeln. Diese konvergiert mindestens in der größten punktierten Kreisscheibe $\Delta_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, die noch in $G \setminus Z$ enthalten ist.

Beispiel 9.1 (1) Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist auch meromorph.

(2) Der Quotient $\frac{g}{h}$ zweier auf G holomorpher Funktionen g und h ist meromorph, falls h auf G nicht identisch verschwindet: Pole von $\frac{g}{h}$ können höchstens in den Nullstellen von h auftreten. Zum Beispiel sind rationale Funktionen meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$.

Satz 9.1 *Ist f meromorph auf G, so hat jeder Punkt $z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subset G$, so dass auf U gilt:*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

wobei g und h holomorphe Funktionen auf U sind.

Beweis. Ist z_0 kein Pol von f, so können wir $g = f$ und $h \equiv 1$ auf $U = G \setminus Z$ wählen.

Ist z_0 ein Pol n-ter Ordnung, so hat man

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

in einer Umgebung U von z_0. □

Hat f auf G nur endlich viele Pole $a_1, \dots, a_m$ mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_m$, so hat

$$g(z) = (z - a_1)^{n_1} \cdots (z - a_m)^{n_m} f(z)$$

nur hebbare Singularitäten, f ist also auf ganz G Quotient zweier holomorpher Funktionen. (Dies ist auch richtig, wenn f unendlich viele Pole hat, wird aber nicht bewiesen.)

Sind f und g meromorphe Funktionen auf G mit Polstellenmengen Z_f und Z_g, so ist die Summe $f + g$ auf $G \setminus (Z_f \cup Z_g)$ erklärt und holomorph. Die Menge $Z_f \cup Z_g$ ist diskret in G, die Punkte von $Z_f \cup Z_g$ sind Pole oder hebbar (Übungsaufgabe!). Also ist $f+g$ meromorph auf G (nach Fortsetzung über die hebbaren Singularitäten). Ebenso sieht man, dass das Produkt fg meromorph ist. Ist schließlich $f \not\equiv 0$ auf G meromorph, so ist auch $\frac{1}{f}$ meromorph auf G (denn die Polstellenmenge von $\frac{1}{f}$ ist die Nullstellenmenge von f, und diese ist nicht nur in $G \setminus Z_f$, sondern auch in G diskret).

Satz 9.2 *Die auf G meromorphen Funktionen bilden einen Körper.*

Beweis. durch Verifizierung der Körperaxiome. □

Wir können einer meromorphen Funktion in ihren Polen keine komplexe Zahl sinnvoll als Wert zuordnen. Diese Schwierigkeit beheben wir dadurch, dass wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ durch Hinzunahme eines neuen Elements erweitern, welches wir mit dem Sybol ∞ bezeichnen und den „unendlich fernen Punkt“ nennen: Wir setzen also

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Rechenregeln mit ∞:

$$\begin{aligned}
\infty \cdot \infty &:= \infty, \\
a + \infty &:= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C}, \\
a \cdot \infty &:= \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C},\ a \neq 0, \\
\frac{1}{0} &:= \infty, \\
\frac{1}{\infty} &:= 0.
\end{aligned}$$

Nicht definiert sind $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

Die Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt die *Riemannsche Zahlensphäre*, da man ein sehr anschauliches Modell von $\widehat{\mathbb{C}}$ angeben kann. Wir identifizieren

$$\mathbb{C} \cong \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

und wir betrachten die zweidimensionale Einheitssphäre

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Wir definieren nun die *stereographische Projektion*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & S^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} \end{array}.$$

Dabei ist $N = (0, 0, 1)$ der „Nordpol“, jedem $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ wird der Schnittpunkt $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ der Verbindungsgeraden von N und (x_1, x_2, x_3) mit der horizontalen Ebene $\mathbb{C}$ zugeordnet (Skizze!).

Geometrisch anschaulich klar ist, dass Φ eine Bijektion ist. Man kann es auch nachrechnen: Ist $z = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, so erhält man

$$|z|^2 = z\overline{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

und als Umkehrabbildung erhält man:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \\ x_2 &= \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \\ x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Die stereographische Projektion hat unter anderem folgende geometrische Eigenschaften:

(i) Jeder Kreis auf der Kugel, der den Nordpol nicht trifft, wird auf einen Kreis in der Ebene abgebildet.

(ii) Jeder Kreis auf der Kugel, der den Nordpol enthält, wird auf eine Gerade der komplexen Zahlenebene abgebildet.

(Beweis in den Übungen.)

Die stereographische Projektion Φ kann nun kanonisch fortgesetzt werden:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\Phi}: & S^2 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \begin{cases} \infty, & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = N, \\ \Phi(x_1, x_2, x_3) & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Damit kann auch auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eine Topologie eingeführt werden: Für $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ erklären wir die *sphärische Distanz*

$$d(z_1, z_2) := |\widehat{\Phi}^{-1}(z_1) - \widehat{\Phi}^{-1}(z_2)|.$$

Es gilt (Beweis als Übung)

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \quad \text{falls } z_1, z_2 \neq \infty, \\ d(z_1, \infty) &= \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} \quad \text{falls } z_1 \neq \infty. \end{aligned}$$

Damit hat man auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eine *Metrik* definiert, d.h. eine Abbildung

$$d : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(z_1, z_2) \geq 0$; $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.

(iii) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ (Dreiecksungleichung).

für alle $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Die Eigenschaften (i)–(iii) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der euklidischen Metrik im $\mathbb{R}^3$.

Außerdem hat die von uns auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eingeführte Metrik die Eigenschaft

$$d(z_1, z_2) \leq 2 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}},$$

da es auf der 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$ keine größeren euklidischen Abstände als 2 gibt.

Wie sehen die Kugeln vom Radius $\varepsilon > 0$ um ∞ in dieser Metrik aus? Es sind gerade die Komplemente abgeschlossener Kreisscheiben um den Nullpunkt in $\widehat{\mathbb{C}}$. Man hat daher die folgende Charakterisierung offener Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$: Die offenen Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ sind genau die offenen Mengen von $\mathbb{C}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Satz 9.3 $\widehat{\mathbb{C}}$ *ist ein kompakter metrischer Raum.*

Beweis. Wir weisen die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft nach: Es sei $(U_j)_{j \in J}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann gibt es ein j_0 mit $\infty \in U_{j_0}$. Dann ist

$$K := \widehat{\mathbb{C}} \setminus U_{j_0}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die in $\mathbb{C}$ offenen Mengen $U'_j = U_j \setminus \{\infty\}$ überdecken K, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subset U'_{j_1} \cup \ldots \cup U'_{j_n}.$$

Dann ist $(U_{j_\nu})_{\nu = 0, \ldots, n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$. □

10 Funktionentheoretische Konsequenzen des Residuensatzes

Es sei nun G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion. Es sei $z_0 \in G$ ein Pol oder eine Nullstelle von f. Dann gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{Z}$, so dass in einer Umgebung U von z_0 gilt

$$f(z) = (z - z_0)^N h(z),$$

wobei h eine holomorphe Funktion auf U ist mit $h(z_0) \neq 0$. Hierdurch ist N eindeutig festgelegt.

Nun berechnen wir

$$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

das Residuum der *logarithmischen Ableitung* von f: In U ist

$$f'(z) = N(z - z_0)^{N-1} h(z) + (z - z_0)^N h'(z),$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Da der zweite Summand holomorph in einer Umgebung von z_0 ist, ist

$$\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = N = \begin{cases} n & \text{falls } z_0 \text{ Nullstelle der Ordnung } n \text{ ist,} \\ -n & \text{falls } z_0 \text{ Pol der Ordnung } n \text{ ist.} \end{cases}$$

Der Residuensatz ergibt nun unmittelbar:

Satz 10.1 (Prinzip vom Argument) *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei meromorph, γ eine nullhomologe Kette in G, deren Träger weder eine Polstelle noch eine Nullstelle von f enthält.*

Dann ist

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{a \text{ Nullstelle}} \mathrm{Uml}(\gamma, a) \nu_a(f) - 2\pi i \sum_{b \text{ Pol}} \mathrm{Uml}(\gamma, b) \nu_b(f).$$

Darin ist $\nu_a(f)$ bzw. $\nu_b(f)$ die Ordnung der Nullstelle bzw. des Pols.

Beweis. Residuensatz und obige Rechnung. □

Nullstellen und Pole können mit diesem Satz so gezählt werden: Hat f z.B. in der Kreisscheibe Δ keine Pole, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sharp \text{ Nullstellen (jede mit Vielfachheit gezählt).}$$

Selbstverständlich spielt auch hier die Zahl 0 keine ausgezeichnete Rolle. Analoge Bemerkungen gelten für w-Stellen von f, wenn $\frac{f'(z)}{f(z)}$ durch $\frac{f'(z)}{f(z)-w}$ ersetzt wird.

Definition Ein Punkt z_0 heißt *w-Stelle von f der Ordnung n*, wenn z_0 Nullstelle von $f - w$ der Ordnung n ist.

Satz 10.2 *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei meromorph, $w \in \mathbb{C}$, γ eine nullhomologe Kette in G, deren Träger weder eine Polstelle noch eine w-Stelle von f enthält.*

Dann ist

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = 2\pi i \sum_{a\, w-\text{Stelle}} \operatorname{Uml}(\gamma, a)\nu_a(f) - 2\pi i \sum_{b\,\text{Pol}} \operatorname{Uml}(\gamma, b)\nu_b(f),$$

wobei $\nu_a(f)$ die Ordnung der w-Stelle a von f ist.

Bemerkung 10.1 Satz 10.1 bzw. Satz 10.2 wird aus dem folgenden Grund *Prinzip vom Argument* genannt: Für einen geschlossenen Weg γ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = \operatorname{Uml}(f \circ \gamma, w),$$

die Umlaufszahl $\operatorname{Uml}(f \circ \gamma, w)$ gibt aber bis auf den Faktor 2π die Gesamtänderung des Arguments von $f(\gamma(t)) - w$ an, die entsteht, wenn t das Definitionsintervall von γ durchläuft.

Ein Polynom $f(z)$ n-ten Grades hat für jedes $a \in \mathbb{C}$ genau n Lösungen der Gleichung

$$f(z) = a.$$

(Denn auch $f(z) - a$ ist ein Polynom, das genau n Nullstellen hat. Jede sei mit ihrer Vielfachheit gezählt.)

Für alle bis auf endlich viele a sind diese Lösungen alle paarweise verschieden. (Der Punkt z_0 ist nämlich genau dann eine mehrfache a-Stelle, wenn $f'(z_0) = 0$ ist. Mit f ist aber auch f' ein Polynom, hat also nur endlich viele Nullstellen.)

Dies wollen wir nun verallgemeinern und das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer a-Stelle näher untersuchen:

Satz 10.3 (Überlagerungseigenschaft holomorpher Funktionen) *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant, $z_0 \in G$ sei eine a-Stelle der Ordnung $n \geq 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für alle $b \in \Delta_\varepsilon(a)$ genau n Lösungen von $f(z) = b$ mit $z \in \Delta_\delta(z_0)$ existieren. Obendrein können ε, δ so gewählt werden, dass alle Lösungen von $f(z) = b$ paarweise verschieden sind, sofern $b \neq a$ ist.*

Beispiel 10.1 $n = 3$, $f(z) = z^3$, $z_0 = a = 0$. Dann ist 0 eine dreifache Nullstelle von z^3. Die Lösungen von $z^3 = 1$ sind die dritten Einheitswurzeln. Wir können $\varepsilon = \delta = 1$ wählen. Zu jedem Punkt von $\Delta_1(0)$ finden wir jeweils ein Urbild in jedem der drei 120°-Sektoren der Kreisscheibe. Die δ-Kreisscheibe überlagert also dreimal die ε-Kreisscheibe.

Warnung Es gilt i.A. nicht $f(\Delta_\delta(z_0)) \subset \Delta_\varepsilon(a)$!

Beweis von Satz 10.3. Da die a-Stellen von f isoliert liegen, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

(i) $\overline{\Delta_\delta(z_0)} \subset G$ und

(ii) in $\overline{\Delta_\delta(z_0)} \setminus \{z_0\}$ keine a-Stelle liegt.

Ist nun γ der orientierte Rand der Kreisscheibe $\Delta_\delta(z_0)$ so ist nach Satz 10.2

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = 2\pi i n.$$

Außerdem ist

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \cdot \mathrm{Uml}(f\circ\gamma, a).$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass das Bild von $f \circ \gamma$ die Kreisscheibe $\Delta_\varepsilon(a)$ nicht trifft. Ist dann $b \in \Delta_\varepsilon(a)$, so können a und b durch ein Geradenstück verbunden werden, das $\mathrm{Tr}\, f \circ \gamma$ nicht trifft. Also gilt

$$2\pi i \mathrm{Uml}(f\circ\gamma, a) = 2\pi i \mathrm{Uml}(f\circ\gamma, b) = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z-b} = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-b}\,dz = 2\pi i n.$$

Erneute Anwendung von Satz 10.2 zeigt, dass es auch n b-Stellen in $\Delta_\delta(z_0)$ gibt.

Zum zweiten Teil der Behauptung: z ist eine Mehrfachstelle genau dann, wenn $f'(z) = 0$. Aber da die Nullstellen holomorpher Funktionen isoliert sind, können wir δ von Anfang an so wählen, dass zusätzlich zu (i) und (ii) gilt: $\overline{\Delta_\delta(z_0)} \setminus \{z_0\}$ enthält keine Nullstellen von f'. □

Dieser Satz hat nun eine Reihe weiterer Anwendungen:

Satz 10.4 (Gebietstreue holomorpher Funktionen) *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen in ebensolche überführen, brauchen wir nur zu zeigen, dass $f(G)$ offen ist. (Hätten wir „$f(G)$ offen“ schon gezeigt, so wäre in $f(G)$ zusammenhängend dasselbe wie wegzusammenhängend. Ist also $a = f(z_1)$, $b = f(z_2)$ und γ ein Weg, der z_1 und z_2 in G verbindet, so verbindet der Weg $f \circ \gamma$ die Punkte a und b in $f(G)$. Also ist $f(G)$ auch zusammenhängend.)

Zu zeigen: $f(G)$ ist offen.

Es sei etwa $f(z_0) = a$. Dann ist also z_0 eine a-Stelle von f der Ordnung $n \geq 1$. Nach Satz 10.3 gibt es $\delta, \varepsilon > 0$, so dass

$$\Delta_\varepsilon(a) \subset f(\Delta_\delta(z_0)) \subset f(G).$$

Also ist $f(G)$ offen. □

Satz 10.5 (Maximumprinzip) *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $z_0 \in G$. Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant in G.*

Ist obendrein G beschränkt und f stetig nach $\overline{G}$ fortsetzbar, so ist $|f|$ konstant oder nimmt sein Maximum auf dem Rande an:

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$$

für alle $z \in \overline{G}$.

Beweis. Wegen der Gebietstreue gehört mit $f(z_0)$ noch eine kleine Kreisscheibe zu $f(G)$. □

Satz 10.6 (Minimumprinzip) *Es sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph, nicht konstant und habe keine Nullstelle in G. Dann hat $|f|$ kein lokales Minimum in G.*

Ist f zusätzlich nach $\overline{G}$ stetig fortsetzbar und ist G beschränkt, so nimmt $|f|$ sein Minimum auf ∂G an:

$$|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$$

für alle $z \in \overline{G}$.

Beweis. Maximumprinzip für $\frac{1}{f}$. □

Aus dem Maximumprinzip folgt nun

Satz 10.7 (Schwarzsches Lemma) *Es sei $\Delta = \Delta_1(0)$, $f : \Delta \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $f(0) = 0$, und für alle $z \in \Delta$ gelte $|f(z)| \leq 1$.*

Dann gilt für jedes $z \in \Delta$ die Abschätzung $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.

Ist $|f'(0)| = 1$, oder gibt es auch nur ein einziges $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$, für das $|f(z_0)| = |z_0|$ ist, so gibt es ein c mit $|c| = 1$, so dass

$$f(z) = c \cdot z \quad \text{für alle } z \in \Delta$$

(m.a.W.: f ist eine Drehung).

Beweis. Wir setzen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

dann ist g holomorph in Δ. Für $|z| = r < 1$ gilt

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt also auch für $|z| \leq r$ die Abschätzung $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Ist $|f'(0)| = 1$ oder gibt es ein $z_0 \neq 0$ in Δ, für das $|f(z_0)| = |z_0|$, so nimmt $|g|$ sein Maximum auch im Innern von Δ an; also ist g nach dem Maximumprinzip konstant gleich $c = f'(0)$. □

Eine weitere Anwendung von Satz 10.2 (vgl. auch Analysis III, Satz 16.6):

Satz 10.8 (Satz von Rouché) *Es sei G ein Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph und γ sei der orientierte Rand eines Teilgebiets $G' \subset G$. Gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \textit{ auf } \operatorname{Tr}\gamma,$$

so haben f und g gleich viele Nullstellen in G' (mit Vielfachheit gezählt).

Beweis. Wir betrachten für $0 \leq \lambda \leq 1$ die Funktionen

$$h_\lambda = f + \lambda(g - f)$$

auf G. Es ist $h_0 = f$, $h_1 = g$. Nun gilt für alle $z \in \operatorname{Tr}\gamma$

$$|\lambda(g - f)(z)| \leq |(g - f)(z)| < |f(z)|,$$

also verschwindet h_λ nicht auf $\operatorname{Tr}\gamma$. Bezeichnet N_λ die Anzahl der Nullstellen von h_λ in G', so gilt demnach nach Satz 10.1

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z) + \lambda(g'(z) - f'(z))}{f(z) + \lambda(g(z) - f(z))}\,dz.$$

Der Integrand und damit auch N_λ hängt stetig von λ ab, wegen $N_\lambda \in \mathbb{Z}$ ist N_λ konstant, insbesondere ist $N_1 = N_0$. □

Der Satz von Rouché ist nützlich, um Informationen über die Lage der Nullstellen einer holomorphen Funktion zu gewinnen.

Beispiel 10.2 Anzahl der Nullstellen von $g(z) = z^4 - 4z + 2$ in $\Delta = \Delta_1(0)$:

Für $|z| = 1$ ist

$$|z^4| = 1 < 2 \leq |-4z + 2|,$$

also hat $g(z)$ in Δ genau so viele Wurzeln wie $f(z) = -4z + 2$, nämlich eine.

11 Biholomorphe Abbildungen

Wir wollen nun biholomorphe Abbildungen betrachten.

Definition Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt *biholomorph*, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorphe Funktionen sind. Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, heißt *lokal biholomorph*, wenn es zu jedem $z \in G$ eine Umgebung U gibt, so dass $f|_U : U \to f(U)$ biholomorph ist.

Aus Satz 10.3 folgt, dass $f : G \to \mathbb{C}$ genau dann lokal biholomorph ist, wenn f' keine Nullstelle in G hat.

Wir leiten nun eine andere Charakterisierung lokal biholomorpher Abbildungen her.

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten (glatte) von z_0 ausgehende Wege, d.h. stetig differenzierbare Abbildungen $\gamma : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma'(t) \neq 0$. Die Halbtangente an γ in z_0 ist der Strahl

$$s \mapsto z_0 + s\gamma'(0), \quad s \geq 0.$$

Der *orientierte Winkel* $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ zwischen zwei solchen Wegen ist definiert als Winkel zwischen ihren Halbtangenten, also

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}.$$

Orientierte Winkel sind also nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt.

Es sei nun G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $z_0 \in G$.

Definition Die Abbildung f heißt *in z_0 winkel- und orientierungstreu*, wenn es eine Umgebung U von z_0 in G gibt, so dass $f|_U$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung V von $f(z_0)$ ist und wenn für je zwei von z_0 ausgehende Wege γ_1, γ_2 gilt

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Die Abbildung f heißt *lokal konform*, wenn f in jedem Punkt von G winkel- und orientierungstreu ist. Man nennt f *konform*, wenn f lokal konform ist und G bijektiv auf $f(G)$ abbildet.

Es sei nun γ ein glatter von z_0 ausgehender Weg. Dann ist der Bildweg $f \circ \gamma$ wieder glatt und hat in $w_0 = f(z_0)$ die Ableitung

$$(f \circ \gamma)'(0) = f_z(z_0) \cdot \gamma'(0) + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot \overline{\gamma}'(0).$$

Wir nehmen nun an, dass f in z_0 sogar holomorph ist und $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Dann ist $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ und $f_z(z_0) = f'(z_0)$. Es folgt

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0).$$

In diesem Fall folgt für zwei solche Wege γ_1, γ_2

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \frac{f'(z_0) \cdot \gamma_2'(0)}{f'(z_0) \cdot \gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Wegen $f'(z_0) \neq 0$ gibt es eine Umgebung U von z_0 in G, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Eine in z_0 holomorphe Abbildung f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist also in z_0 winkel- und orientierungstreu.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass f in z_0 winkel- und orientierungstreu ist. Dann muss insbesondere für die Wege

$$\gamma_s : \begin{array}{ccc} [0, \varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z_0 + e^{is}t \end{array}, \quad 0 \leq s < 2\pi,$$

gelten

$$\angle(f \circ \gamma_s, f \circ \gamma_0) = s,$$

d.h.

$$\arg \frac{f_z(z_0)e^{is} + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-is}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} = \arg e^{is}.$$

Es muss also $\arg(f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2is})$ unabhängig von s sein. Das geht nur für $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$. Also ist f in z_0 komplex differenzierbar. Außerdem gilt $f_z(z_0) \neq 0$, sonst wäre f nicht lokal um z_0 ein Diffeomorphismus.

Wir haben also gezeigt:

Satz 11.1 *Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann lokal konform, wenn sie lokal biholomorph ist. Die Abbildung f ist genau dann konform, wenn $f : G \to f(G)$ biholomorph ist.*

Beispiel 11.1 Hat man eine konforme Abbildung $f : G \to G^*$ und in G zwei Scharen glatter Kurven derart, dass die Kurven der einen Schar die der anderen Schar stets senkrecht schneiden, so gilt das gleiche für die Scharen der Bildkurven in G^*. Zum Beispiel bildet die Exponentialfunktion den Streifen

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

konform auf die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Ebene ab. Geraden parallel zur reellen Achse gehen in vom Nullpunkt ausgehende Strahlen über, Geraden parallel zur imaginären Achse in Kreise um den Nullpunkt.

Wir wollen nun die speziellen rationalen Funktionen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0,$$

untersuchen. Die Bedingung $ad-bc \neq 0$ garantiert, dass der Nenner nicht identisch verschwindet und dass der Zähler kein konstantes Vielfaches des Nenner ist.

Falls $c = 0$ gilt, ist f auf der ganzen Ebene holomorph und bildet sie konform auf sich ab.

Falls $c \neq 0$ ist, hat f in $-\frac{d}{c}$ einen einfachen Pol,

$$f : G_f = \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to G_f^* = \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\}$$

ist konform, denn man hat die Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & G_f^* & \longrightarrow & G_f \\ & w & \longmapsto & \frac{dw-b}{-cw+a} \end{array}.$$

Man kann f zu einer in beiden Richtungen stetigen Bijektion $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ der Riemannschen Zahlensphäre fortsetzen:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}(-\frac{d}{c}) & := & \infty \quad (c = 0 : \widehat{f}(\infty) = \infty), \\ \widehat{f}(\infty) & := & \frac{a}{c} \quad (c = 0 : \widehat{f}(\infty) = \infty). \end{array}$$

Damit hat man die Ausnahmestellung von $-\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}$, ∞ in topologischer Hinsicht beseitigt. Um sie auch in funktionentheoretischer Hinsicht aufzuheben, definieren wir die Holomorphie im Unendlichen.

Definition Es sei U eine offene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$, $\infty \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph in* ∞, wenn die Funktion $w \mapsto f(\frac{1}{w})$ holomorph in 0 ist. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn f in jedem Punkt aus U holomorph ist.

Für $c \neq 0$ ist die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \neq \infty, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

holomorph in ∞, denn die Funktion

$$w \mapsto \begin{cases} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a+bw}{c+dw} & \text{für } w \neq 0, \\ \frac{a}{c} & \text{für } w = 0, \end{cases}$$

ist holomorph in 0.

Die Definition ist so eingerichtet, dass sich alle Begriffe und Sätze, die das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe eines Punktes betreffen, auf Funktionen übertragen, die in einer (eventuell punktierten) Umgebung von ∞ holomorph sind.

Aus Satz 8.3 erhalten wir die Laurentreihe um ∞ wie folgt. Es sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, das ∞ enthält, aber den Nullpunkt nicht. Dann enthält G das Äußere einer Kreisscheibe $\Delta_r(0)$, $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r(0)}$. Es sei $f : G \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Nach Satz 8.3 wird f auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_r(0)}$ durch seine Laurentreihe um 0 beschrieben:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Durch Variablentransformation $w = \frac{1}{z}$ ergibt sich die *Laurentreihe um* ∞:

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} w^n.$$

Die Klassifikation isolierter Singularitäten und Satz 8.5 gilt entsprechend auch für den Punkt ∞.

Beispiel 11.2 Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat in ∞ einen Pol der Ordnung n.

Beispiel 11.3 Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome vom Grad n bzw. m, so hat die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n + \ldots + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_0}$$

in ∞

- einen Pol der Ordnung $n - m$, falls $n > m$,
- eine hebbare Singularität, falls $n = m$, ihr Wert in ∞ ist $\frac{a_n}{b_m}$,
- eine Nullstelle der Ordnung $m - n$, falls $n < m$.

Beispiel 11.4 Eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die kein Polynom ist – eine solche Funktion nennt man auch eine *ganze transzendente Funktion* –, hat in ∞ eine wesentliche Singularität.

Satz 11.2 *Jede auf der ganzen Zahlensphäre $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.*

Beweis. Ist $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist $|f|$ stetig und muss das Maximum annehmen, da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. Die Behauptung folgt nun aus dem Maximumprinzip, das sich auch auf holomorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$ überträgt. □

Der Begriff der meromorphen Funktion überträgt sich wörtlich auf Funktionen $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$, wobei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet ist:

Definition Es sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph*, wenn $f : G \setminus Z \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei

(i) Z eine diskrete Teilmenge von G ist,

(ii) die Punkte von Z Pole von f sind.

Satz 11.3 *Die auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, dass jede meromorphe Funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational ist.

Nun bilden die Pole von f eine diskrete Menge Z. Da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, muss Z endlich sein: $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$. Für jedes von ∞ verschiedene z_j sei $h_j(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von f um z_j; h_j ist rational und auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_j\}$ holomorph. Wir setzen

$$p(z) := f(z) - \sum_{z_j \neq \infty} h_j(z).$$

Diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und hat in ∞ höchstens einen Pol, da f dort höchstens einen Pol hat. Daher ist $p(z)$ ein Polynom, und die Gleichung

$$f(z) = p(z) + \sum_{z_j \neq \infty} h_j(z) \tag{7}$$

zeigt, dass f selbst rational ist. □

Wir haben damit übrigens auch noch eine Lücke gefüllt, die aus Analysis I übriggeblieben war: Die Darstellung (7) ist gerade die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion f, wir haben deren Existenz also gerade mitbewiesen.

Wir führen noch folgende Sprechweise ein:

Definition Es seien G und G^* Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}}$. Eine *holomorphe Abbildung* f von G auf G^* ist eine meromorphe Funktion $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(G) = G^*$.

Wir verwenden also die Worte „holomorphe Abbildung" und „holomorphe Funktion" nicht mehr synonym; eine holomorphe Abbildung $f : G \to G^*$ ist genau dann eine holomorphe Funktion, wenn $\infty \notin f(G) = G^*$.

Ist $f : G \to G^*$ eine bijektive holomorphe Abbildung, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : G^* \to G$ wieder holomorph, wie man leicht sieht. (Nur für $\infty \in G$ oder $\infty \in G^*$ ist noch etwas zu zeigen!) Wir nennen daher solche Abbildungen *biholomorph* oder auch *konform*. (Aber man beachte, dass von Winkeln in ∞ nicht geredet wurde!)

Eine biholomorphe Abbildung eines Gebietes $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ auf sich nennt man auch einen (holomorphen) *Automorphismus* von G. Die Automorphismen von G bilden unter der Komposition eine Gruppe, die mit $\operatorname{Aut} G$ bezeichnet wird.

Wir haben also gezeigt, dass die rationalen Funktionen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

biholomorphe Abbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ auf sich (Automorphismen von $\widehat{\mathbb{C}}$) bilden. Man nennt diese Abbildungen *(gebrochen) lineare Transformationen.* Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ bedeutet gerade, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

ist.

Sind

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

gebrochen lineare Transformationen, so ist auch

$$f \circ g(z) = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \tag{8}$$

eine gebrochen lineare Transformation und ebenso f^{-1}. Die gebrochen linearen Transformationen bilden also eine Gruppe G.

Formel (8) bedeutet gerade, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) & \to & G \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist surjektiv und sein Kern ist offenbar die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\}.$$

Die *ganzen linearen Transformationen*, das sind die Abbildungen $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, liefern Automorphismen von $\mathbb{C}$. Auch sie bilden eine Gruppe.

Satz 11.4 $\operatorname{Aut} \mathbb{C}$ *ist die Gruppe aller ganzen linearen Transformationen.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, dass jeder Automorphismus f von $\mathbb{C}$ von der Form $f(z) = az + b$ ist.

Nun ist f eine ganze Funktion. Wäre f kein Polynom, so hätte f in ∞ eine wesentliche Singularität (Beispiel 11.4), also läge etwa $f(\mathbb{C} - \overline{\Delta})$ mit $\Delta = \Delta_1(0)$ überall dicht. Andererseits ist $f(\Delta)$ ein Gebiet, wegen der

Bijektivität von f ist also $f(\mathbb{C} - \overline{\Delta}) \cap f(\Delta) = \emptyset$, Widerspruch. Also ist f ein Polynom.

Wäre sein Grad größer als 1, so könnte f nicht bijektiv sein (vgl. Bemerkung 10.1). □

Satz 11.5 *Es gilt* $\operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}} = G$, *d.h.* $\operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$ *ist die Gruppe aller gebrochen linearen Transformationen.*

Beweis. Es sei $f \in \operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}}$.

Gilt $f(\infty) = \infty$, so ist $f|_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}$, nach Satz 11.4 ist also f ganz linear.

Gilt $f(\infty) = c \neq \infty$, so setze man

$$g(z) := \frac{1}{z - c}, \quad h := g \circ f.$$

Dann gilt $h(\infty) = g(c) = \infty$, also ist $h \in G$ und damit auch $f = g^{-1} \circ h \in G$. □

Wir wollen nun die gebrochen linearen Transformationen weiter studieren. Wir fragen zunächst nach den *Fixpunkten* einer gebrochen linearen Transformation f, d.h. nach den Punkten $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(z_0) = z_0$.

Es sei

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad f \neq \mathrm{id}.$$

Für $c = 0$ sind die Fixpunkte

$$z_0 = \infty \text{ und } z_0 = \frac{b}{d - a}, \text{ falls } a \neq d.$$

Für $c \neq 0$ sind die Fixpunkte gerade die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$cz^2 + (d - a)z = b.$$

In jedem Fall hat $f \neq \mathrm{id}$ genau einen oder zwei Fixpunkte.

Daher ist eine gebrochen lineare Transformation durch Angabe der Bilder von drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt: Gilt $f_1(z_j) = f_2(z_j)$ für $j = 1, 2, 3$, so hat $f_2^{-1} \circ f_1$ drei Fixpunkte, ist also die Identität.

Wir wollen jetzt zeigen, dass man andererseits die Bilder dreier Punkte unter einer gebrochen linearen Transformation beliebig vorschreiben kann.

Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Für f mit

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \tag{9}$$

gilt:

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = \infty.$$

Definition Der rechts in (9) stehende Ausdruck heißt das *Doppelverhältnis* der vier Punkte z, z_1, z_2, z_3; wir schreiben dafür auch

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Mit den Rechenregeln für ∞ erhalten wir die folgenden Doppelverhältnisse

$$\begin{aligned} \mathrm{DV}(z, \infty, z_2, z_3) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \\ \mathrm{DV}(z, z_1, \infty, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_3}, \\ \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, \infty) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \end{aligned}$$

Sind also $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ beliebig, aber paarweise verschieden, so ist

$$z \mapsto \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

diejenige gebrochen lineare Transformation, die (z_1, z_2, z_3) auf $(0, 1, \infty)$ abbildet. Damit zeigen wir:

Satz 11.6 *Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel verschiedener Punkte von $\widehat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine gebrochen lineare Transformation f mit $f(z_\nu) = w_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$.*

Beweis. Durch $f_1(z) = \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ bzw. $f_2(z) = \mathrm{DV}(z, w_1, w_2, w_3)$ werden (z_1, z_2, z_3) bzw. (w_1, w_2, w_3) auf $(0, 1, \infty)$ abgebildet. Die gebrochen lineare Transformation $f = f_2^{-1} \circ f_1$ leistet das Verlangte. $\square$

Das Doppelverhältnis ist eine Invariante bei gebrochen linearen Transformationen.

Satz 11.7 *Es seien z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedene Punkte in $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt für jedes $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $f \in \mathrm{Aut}\,\widehat{\mathbb{C}}$*

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)).$$

Beweis. Die Abbildung

$$g : z \mapsto \mathrm{DV}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$$

ist eine gebrochen lineare Transformation, als Komposition von $z \mapsto f(z)$ und $w \mapsto \mathrm{DV}(w, f(z_1), f(z_2), f(z_3))$. Es gilt

$$\begin{aligned} g(z_1) &= \mathrm{DV}(f(z_1), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = 0, \\ g(z_2) &= 1, \\ g(z_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Da eine gebrochen lineare Transformation durch die Bilder von drei verschiedenen Punkten eindeutig festgelegt ist, stimmt g mit der Abbildung

$$z \mapsto \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

überein. Daher gilt die behauptete Gleichung. □

Eine weitere Eigenschaft von gebrochen linearen Transformationen ist die folgende:

Satz 11.8 *Gebrochen lineare Transformationen führen Geraden und Kreislinien in Geraden oder Kreislinien über.*

Dabei ist eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ *eine Gerade in* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Geraden und Kreislinien in* $\widehat{\mathbb{C}}$ *sind gerade die Bilder der auf der Sphäre* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ *gelegenen Kreislinien unter der stereographischen Projektion* $\widehat{\Phi} : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Bemerkung 11.1 In $\mathbb{C}$ werden i.A. einige Geraden in Kreislinien und einige Kreislinien in Geraden abgebildet.

Beweis von Satz 11.8.

(a) Wir zeigen zunächst, dass G von den Translationen $z \mapsto z + b$, den Drehstreckungen $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}^*$) und der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ erzeugt wird: Jede gebrochen lineare Transformation

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

lässt sich aus diesen zusammensetzen. Für $c = 0$ ist das klar, für $c \neq 0$ gilt

$$f(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c},$$

also ist f die Komposition

$$z \mapsto z + \frac{d}{c} \mapsto \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} \mapsto \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} \mapsto \frac{bc - ad}{c^2} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c}.$$

(b) Wegen (a) genügt es, die Bilder von Kreisen und Geraden unter diesen speziellen Transformationen zu betrachten. Für Translationen und Drehstreckungen ist Satz 11.8 klar, für die Inversion $z \mapsto w = \frac{1}{z}$ folgt er so: Geraden und Kreise sind gerade die Punktmengen, die durch Gleichungen der Form

$$\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0 \quad \text{mit } \alpha, \delta \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}, c\overline{c} > \alpha\delta,$$

beschrieben werden. Aber

$$w\overline{w} \left(\alpha \frac{1}{w} \frac{1}{\overline{w}} + c\frac{1}{w} + \overline{c}\frac{1}{\overline{w}} + \delta\right) = \alpha + c\overline{w} + \overline{c}w + \delta w\overline{w} = 0$$

ist eine Gleichung von der gleichen Form. □

Durch drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ geht genau eine Kreislinie oder Gerade. Es gilt:

Satz 11.9 *Ein Punkt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ liegt genau dann auf der durch z_1, z_2, z_3 bestimmten Kreislinie oder Geraden K, wenn*

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

gilt.

Beweis. Es sei f die gebrochen lineare Transformation, die (z_1, z_2, z_3) auf $(0, 1, \infty)$ abbildet. Durch die Punkte $0, 1, \infty$ geht genau eine Kreislinie oder Gerade, nämlich die Gerade $\mathbb{R} \cup \infty$. Nach Satz 11.8 gilt also

$$z \in K \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Nach Definition des Doppelverhältnisses folgt

$$z \in K \Leftrightarrow f(z) = \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

□

Beispiel 11.5 Als Beispiel betrachten wir die gebrochen lineare Transformation

$$f(z) = i\frac{1-z}{1+z} = \mathrm{DV}(z, 1, i, -1).$$

Es gilt

$$f(1) = 0, \quad f(i) = 1, \quad f(-1) = \infty.$$

Durch die Punkte $1, i, -1$ geht genau ein Kreis, nämlich der Einheitskreis, und der wird durch f auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet.

Das Innere des Einheitskreises muss durch f auf die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \,|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

oder die untere Halbebene

$$\mathbb{H}_- = \{z \,|\, \mathrm{Im}\, z < 0\}$$

abgebildet werden; wegen $f(0) = i$ wird $\Delta = \Delta_1(0)$ konform auf $\mathbb{H}$ abgebildet.

12 Partialbruchzerlegung

Wir betrachten eine meromorphe Funktion in der Ebene: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei meromorph, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ seien die endlich oder abzählbar vielen Polstellen.

Die Pole seien so nummeriert, dass

$$|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots,$$

außerdem habe die Folge (a_ν) keinen Häufungspunkt.

Hat f in a_ν einen Pol der Ordnung e_ν, so kann der Hauptteil $h_\nu(z)$ von f in a_ν so geschrieben werden:

$$h_\nu(z) = \frac{c_{-e_\nu}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{e_\nu}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z-a_\nu} \text{ mit } c_{-e_\nu}^{(\nu)} \neq 0.$$

Der Hauptteil $h_\nu(z)$ ist also ein Polynom in $\frac{1}{z-a_\nu}$ ohne konstantes Glied.

Wir behandeln nun das Problem der vorgegebenen Hauptteile: Es seien $a_0, a_1, \ldots$ und Hauptteile $h_\nu(z)$ gegeben, $a_0 = 0$, $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$, (a_ν) habe keinen Häufungspunkt. Dabei ist $h_\nu \equiv 0$ erlaubt; dann ist a_ν kein Pol. Eine solche Vorgabe nennt man auch eine *Hauptteilverteilung*.

Frage Gibt es eine meromorphe Funktion, die in a_ν, $\nu = 0, 1, \ldots$, die vorgegebenen Hauptteile hat?

Der Satz von Mittag-Leffler wird diese Frage positiv beantworten.

Beispiel 12.1 Sind nur endlich viele a_ν gegeben, so braucht man nur die Hauptteile aufzusummieren:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(z)$$

ist eine meromorphe Funktion mit den gewünschten Hauptteilen: Ist nämlich $a_\mu \neq a_\nu$, so ist der Hauptteil h_ν in a_μ holomorph.

Hat man aber unendlich viele Pole, so funktioniert der Aufsummiertrick nicht, da die entstehende Reihe nicht zu konvergieren braucht. Man rettet sich aber mit der sogenannten Methode der *konvergenzerzeugenden Summanden.*

Wir müssen uns dazu noch überlegen, wann die Summenfunktion einer Reihe meromorpher Funktionen wieder meromorph ist.

Definition Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f_\nu : U \to \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, meromorph. Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$$

konvergiert kompakt auf U, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ einen Index ν_0 gibt, so dass für alle $\nu \geq \nu_0$ alle f_ν auf K holomorph sind und $\sum_{\nu \geq \nu_0} f_\nu$ auf K gleichmäßig konvergiert.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Menge P aller Pole aller f_ν in U diskret und die durch

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(z)$$

erklärte Funktion ist meromorph auf U, mit Polen oder hebbaren Singularitäten in P, denn nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist $\sum_{\nu \geq \nu_0} f_\nu$ eine holomorphe Funktion in K und wir haben nur endlich viele Summanden weggelassen.

Die Methode der konvergenzerzeugenden Summanden besteht nun darin, dass wir, da $\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(z)$ eventuell divergiert, jeden Summanden h_ν durch Subtraktion einer ganzen Funktion P_ν so abändern, dass die modifizierte Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - P_\nu(z))$$

kompakt konvergiert. An den Hauptteilen ändert Addition holomorpher Funktionen ja nichts.

Wir setzen dazu für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$r_\nu := \frac{1}{2}|a_\nu|, \quad D_\nu = \{z \,|\, |z| < r_\nu\}.$$

Dann gilt

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots ; \quad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} D_\nu = \mathbb{C}.$$

Weiter sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ eine konvergente Reihe mit $\varepsilon_\nu > 0$ für alle ν.

In D_ν kann h_ν in eine Potenzreihe entwickelt werden, die dort gleichmäßig gegen h_ν konvergiert, denn die einzige Polstelle von h_ν ist ja a_ν, und die liegt nach Konstruktion außerhalb von D_ν. Es gibt also ein Polynom P_ν (Taylorpolynom von h_ν von genügend hohem Grad), so dass

$$|h_\nu(z) - P_\nu(z)| < \varepsilon_\nu$$

für alle $z \in D_\nu$.

Wir machen damit den Ansatz

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - P_\nu(z)). \tag{10}$$

Wir zeigen nun, dass f das Gewünschte leistet. Sei dazu irgendein $R > 0$ gegeben und $D_R := \{z \,|\, |z| < R\}$.

Da fast alle a_ν außerhalb von D_R liegen (kein Häufungspunkt von (a_ν)), können wir ν_0 finden, so dass für $\nu \geq \nu_0$ gilt

$$R < r_\nu = \frac{1}{2}|a_\nu| < |a_\nu|.$$

Für alle $\nu \geq \nu_0$ sind dann die h_ν holomorph in D_R und es gilt die Abschätzung

$$|h_\nu(z) - P_\nu(z)| < \varepsilon_\nu, \quad z \in \overline{D}_R.$$

Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu \geq \nu_0} (h_\nu(z) - P_\nu(z))$$

gleichmäßig in $\overline{D}_R$, ist also nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß eine holomorphe Funktion in D_R. Da wir nur endlich viele Summanden weggelassen haben, ist also das oben definierte f meromorph in D_R. Da Addition holomorpher Funktionen an den Hauptteilen nichts ändert, folgt, dass f auch die richtigen Hauptteile hat.

Da R ganz beliebig war, konvergiert die Reihe

$$h_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu - P_\nu)$$

in $\mathbb{C}$ kompakt, und die Grenzfunktion f ist meromorph in $\mathbb{C}$ und hat dort die vorgeschriebenen Hauptteile.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 12.1 (Satz von Mittag-Leffler) *Es sei $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Gegeben sei weiterhin eine Folge von Polynomen $h_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots,$ in $(z - a_\nu)^{-1}$ ohne konstantes Glied.*

Ist P_ν das Taylorpolynom von h_ν um 0 von einem hinreichend hohen Grad, so ist durch

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - P_\nu(z))$$

eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion definiert, die a_ν als Pole und die h_ν als Hauptteile in a_ν hat.

Bemerkung 12.1 Sind f und g zwei Lösungen des Problems von Mittag-Leffler, so ist die Differenz $f - g$ eine *ganze* Funktion, d.h. $f - g$ ist holomorph in $\mathbb{C}$.

Zur Illustration des Satzes von Mittag-Leffler betrachten wir nun allerlei Beispiele:

Zunächst nehmen wir an, dass nur Pole erster Ordnung vorgegeben sind, d.h.

$$h_\nu(z) := \frac{c_\nu}{z - a_\nu}, \quad c_\nu \neq 0, |a_\nu| > 0, \text{ für } \nu \geq 1.$$

(a) Zunächst müssen wir die Potenzreihenentwicklung von $\frac{c_\nu}{z-a_\nu}$ um 0 betrachten:

$$\frac{c_\nu}{z - a_\nu} = c_\nu \frac{-1}{a_\nu} \frac{1}{1 - \frac{z}{a_\nu}} = -\frac{c_\nu}{a_\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^n = -c_\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a_\nu^{n+1}}$$

für $|z| < |a_\nu|$.

(b) Es sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ eine konvergente Reihe mit $\varepsilon_\nu > 0$ und k_ν so groß, dass

$$\left| \frac{c_\nu}{z - a_\nu} + c_\nu \sum_{n=0}^{k_\nu} \frac{z^n}{a_\nu^{n+1}} \right| < \varepsilon_\nu.$$

(c) Nun setzt man

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \left[\frac{1}{z - a_\nu} + \sum_{n=0}^{k_\nu} \frac{z^n}{a_\nu^{n+1}} \right].$$

Das analoge Problem für Pole höherer Ordnung kann entweder durch Differentiation oder mit Hilfe der binomischen Reihe behandelt werden.

Um noch konkreter zu werden: Die vorgegebenen Polstellen seien genau die ganzen Zahlen $\nu \in \mathbb{Z}$ und die vorgegebenen Hauptteile

$$h_\nu(z) := \frac{1}{z - \nu}.$$

Um sich die konvergenzerzeugenden Summanden zu verschaffen, summieren wir probehalber die Hauptteile auf und schauen an, was zuviel ist, indem wir $z = 0$ setzen:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{z - \nu} = -\sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\nu} \text{ für } z = 0.$$

Also betrachten wir

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z - \nu} + \frac{1}{\nu} \right).$$

Der Strich an der Summe bedeutet dabei, dass nur über alle $\nu \neq 0$ zu summieren ist.

Wir zeigen nun, dass diese Reihe kompakt konvergiert: Es sei $R > 0$ gegeben. Dann gilt für $|\nu| > 2R$ und $|z| \leq R$ die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{z - \nu} + \frac{1}{\nu} \right| = \left| \frac{z}{\nu(z - \nu)} \right| \leq \frac{2R}{|\nu|^2},$$

da $|z-\nu| \geq \left|\frac{\nu}{2}\right|$. Die Reihe

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{|\nu|^2}$$

konvergiert aber. Wir sehen also: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$

ist eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit Polen $\nu \in \mathbb{Z}$ und Hauptteilen

$$h_\nu(z) = \frac{1}{z-\nu};$$

es können also oben alle $k_\nu = 0$ gesetzt werden.

Nun betrachten wir die Funktion

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}.$$

Sie hat lauter Pole erster Ordnung genau für $\nu \in \mathbb{Z}$, denn dies sind genau die Nullstellen von $\sin \pi z$, die alle erster Ordnung sind. Für das Residuum an der Stelle $\nu \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{Res}_\nu \pi \cot \pi z = \lim_{z\to\nu} \pi \cot \pi z (z-\nu) = \lim_{z\to\nu} \pi \frac{\cos \pi z}{\frac{\sin \pi z - \sin \pi \nu}{z-\nu}} = 1.$$

Die Hauptteile von $\pi \cot \pi z$ sind also auch $\frac{1}{z-\nu}$.

Wir haben also zwei Lösungen des Problems der vorgegebenen Hauptteile. Nach Bemerkung 12.1 gilt daher

$$\pi \cot \pi z = f_0(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right).$$

Dabei ist f_0 eine noch zu bestimmende ganze Funktion.

Zur Bestimmung von f_0 differenzieren wir beide Seiten der Gleichung. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß darf die Reihe auf der rechten Seite gliedweise differenziert werden, da sie auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert. Da

$$\cot' z = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

gilt, folgt also

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = f_0'(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(z-\nu)^2} = f_0'(z) - \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\nu)^2}.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$f_1(z) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2}.$$

Wir wollen zunächst zeigen:

Satz 12.2

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2}.$$

Beweis. Beide Funktionen haben die Periode 1 und Pole zweiter Ordnung in $\nu \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Funktionen auf

$$S = \{z = x + iy \,|\, 0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}.$$

Für $z \in S$ gilt

$$\frac{1}{|z-\nu|^2} = \left|\frac{1}{(z-\nu)^2}\right| \leq \max\left(\frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{(\nu-1)^2}\right) \quad (\text{für } \nu \neq 0, 1).$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2}$$

absolut gleichmäßig auf S gegen die Grenzfunktion f_1. Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt für genügend großes ν_0

$$\left| f_1(z) - \sum_{\nu=-\nu_0}^{\nu_0} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Außerdem lässt sich R so bestimmen, dass für alle $z \in S$ mit $|\mathrm{Im}(z)| \geq R$ gilt

$$\left| \sum_{|\nu|<\nu_0} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass für alle $z \in S$ mit $|\mathrm{Im}(z)| \geq R$ gilt: $|f_1(z)| < \varepsilon$.

Wir zeigen nun, dass das Gleiche auch für

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{\pi^2}{\frac{1}{4}(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})^2}$$

gilt: Setzt man $z = x + iy$, so ist

$$e^{\pi i z} - e^{-\pi i z} = e^{\pi i x} e^{-\pi y} - e^{-\pi i x} e^{\pi y}.$$

Ist nun $|\mathrm{Im}(z)| = |y|$ groß, so ist

$$|e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}| \approx e^{\pi |y|},$$

da $|e^{\pi i x}| = |e^{-\pi i x}| = 1$. Insbesondere kann der Nenner von

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

für $|\mathrm{Im}(z)|$ groß beliebig groß und damit

$$\left|\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}\right|$$

beliebig klein gemacht werden.

Es folgt, dass die obige Behauptung auch für die Differenz

$$f_0'(z) = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 + f_1(z)$$

gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass für $|\mathrm{Im}(z)| > R$ gilt: $|f_0'(z)| < \varepsilon$.

In dem beschränkten Bereich $\{z \,|\, 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}$ ist f_0' aber holomorph und somit stetig. Da f_0' die Periode 1 hat, ist f_0' somit eine ganze beschränkte Funktion. Nach dem Satz von Liouville ist f_0' konstant und wegen des Verhaltens für $|\mathrm{Im}(z)| \to \infty$ gilt $f_0' \equiv 0$. □

Nach dem Beweis von Satz 12.2 folgt, dass f_0 konstant ist, $f_0(z) = C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also gilt

$$\pi \cot \pi z = C + \frac{1}{z} + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right).$$

Da sowohl $\pi \cot \pi z$ als auch die auftretende unendliche Summe eine ungerade Funktion von z ist, bleibt nur $C = 0$ als Möglichkeit. Damit haben wir bewiesen:

Satz 12.3 (Partialbruchzerlegung des Cotangens)

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right).$$

Wir wollen nun die Laurentreihenentwicklung des Cotangens herleiten. Dazu studieren wir zunächst die Funktion

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} = \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)^{-1}.$$

Pole hat die Funktion g in $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nicht aber in $z = 0$; es gilt vielmehr

$$g(0) = 1.$$

Um den Nullpunkt lässt sich g also in eine Potenzreihe entwickeln, deren Konvergenzradius 2π ist (in dieser Entfernung von 0 liegt der nächste Pol von g).

Nun gilt

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}.$$

Ersetzt man nun z durch $2\pi z$ und berücksichtigt, dass für $w \in \mathbb{C}$

$$\coth iw = -i \cot w$$

gilt, so erhält man

$$\pi z \cot \pi z = \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1} + \frac{2\pi i z}{2}.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{z}{e^z-1}$ wird also die Laurentreihenentwicklung vom Cotangens gleich mitliefern. Da $\pi z \cot \pi z$ eine gerade Funktion ist, müssen in der Potenzreihenentwicklung von $\frac{z}{e^z-1}$ alle Koeffizienten mit ungeradem Index ≥ 3 verschwinden, und wir haben

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu.$$

Die Zahlen B_ν sind durch diese Beziehung eindeutig bestimmt und heißen *Bernoullizahlen.* Man sieht sofort

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2\nu+1} = 0 \text{ für } \nu \geq 1.$$

Aus der Formel von Cauchy-Hadamard folgt, dass die Bernoullizahlen nicht beschränkt sind, denn sonst hätte ja die Potenzreihe einen unendlichen Konvergenzradius R statt $R = 2\pi$, wie wir oben sahen. Es gilt also

$$\overline{\lim} |B_{2n}| = \infty.$$

Um nun eine Rekursionsformel für die Bernoullizahlen zu gewinnen, brauchen wir einige allgemeine Tatsachen von Potenzreihen:

Gegeben sei eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

vom Konvergenzradius $R > 0$, und es sei $a_0 = 1$. Dann ist $f(0) = 1$, also ist f auch in einer kleinen Umgebung von 0 von 0 verschieden. Dort ist also durch

$$f(z) \cdot g(z) = 1$$

eine holomorphe Funktion g definiert:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Die Funktion g habe die Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Offenbar ist

$$b_0 = g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1.$$

Über den Konvergenzradius der Potenzreihe g lässt sich aussagen:

(i) Hat f keine Nullstelle z mit $|z| < R$, so ist der Konvergenzradius von $\sum b_\nu z^\nu$ größer oder gleich R.

(ii) Ist z_0 eine Nullstelle von f minimalen Betrages $|z_0|$, so ist der Konvergenzradius von $\sum b_\nu z^\nu$ gleich $|z_0| > 0$.

Außerdem gilt: Sind

$$h_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \text{ und } h_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu z^\nu$$

zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius, so ist das Produkt $h_1(z) \cdot h_2(z)$ mindestens im Durchschnitt der beiden Konvergenzkreise holomorph und die Potenzreihenentwicklung von $h_1(z) \cdot h_2(z)$ kann durch formales Multiplizieren der Potenzreihen gewonnen werden:

$$h_1(z) \cdot h_2(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cdot d_{\mu-\nu} \right) z^\mu.$$

Beweis. Dies kann man mit dem Konvergenzsatz von Weierstraß zeigen.

Ein alternativer Beweis folgt aus

$$h_1(z) \cdot h_2(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(h_1 \cdot h_2)^\mu(0)}{\mu!} z^\mu :$$

Nach der Leibnizformel ist

$$(h_1 \cdot h_2)^\mu(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu} h_1^{(\nu)}(z) \cdot h_2^{(\mu-\nu)}(z) \binom{\mu}{\nu},$$

also ist

$$\frac{(h_1 \cdot h_2)^\mu(0)}{\mu!} = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{h_1^{(\nu)}(0)}{\nu!} \cdot \frac{h_2^{(\mu-\nu)}(0)}{(\mu-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{\mu} c_\nu \cdot d_{\mu-\nu}.$$

□

Wenden wir dies auf die Potenzreihen f und g mit $f(z) \cdot g(z) = 1$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_0 \cdot b_0 &= 1, \\ \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu \cdot b_{\mu-\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Rekursionsformel for die b_ν. Außerdem folgt aus $a_\nu \in \mathbb{Q}$ für alle ν auch $b_\nu \in \mathbb{Q}$ für alle ν.

Satz 12.4 (Rekursionsformeln für die Bernoullizahlen) *Alle Bernoullizahlen sind rational und es gelten die folgenden Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} B_\mu &= 0 \textit{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei

$$f(z) := \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+1)!}$$

und

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu.$$

Nach den obigen Bemerkungen folgt, dass alle Bernoullizahlen rational sind und für $n \geq 1$ gilt:

$$0 = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{B_\mu}{\mu!} \frac{1}{(n+1-\mu)!}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(n+1)!$, so folgt die Behauptung. $\square$

Rechnen wir also einige Bernoullizahlen aus:

$$\begin{aligned} 0 = B_0 + 2B_1 &\Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}, \\ 0 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 &\Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}, \\ 0 = B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 &\Rightarrow B_3 = 0, \\ 0 = B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 &\Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhält man weiter:

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Wir geben nun die Laurentreihenentwicklung des Cotangens an: Es war für $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Also gilt für $|z| < \pi$

$$z \cot z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k},$$

also für $|z| < 1$ (z durch πz ersetzt)

$$\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Andererseits entnehmen wir der Partialbruchzerlegung des Cotangens:

$$\pi z \cot \pi z = 1 + z \sum_{\nu \in \mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - \nu^2},$$

wobei die letzte Darstellung durch Zusammenfassen der Summanden vom Index ν und $-\nu$ folgt. Wir entwickeln $\frac{z^2}{z^2-\nu^2}$ in eine Potenzreihe:

$$\frac{z^2}{z^2 - \nu^2} = - \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\nu} \right)^{2\mu}$$

und erhalten

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\nu} \right)^{2\mu} \right).$$

Vertauscht man die Summationsreihenfolge (dies ist nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß erlaubt), so ergibt sich

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2\mu}} \right) z^{2\mu}.$$

Dies muss wieder die Taylorreihe von $\pi z \cot \pi z$ sein. Ein Koeffizientenvergleich mit der früheren Formel liefert:

Satz 12.5 (Eulersche Relation)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}.$$

Korollar 12.1 *Die Bernoullizahlen haben alternierende Vorzeichen: $B_2 > 0$, $B_4 < 0$, $B_6 > 0$, $\dots$.*

Beispiel 12.2

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} &= \frac{\pi^2}{6}, \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} &= \frac{\pi^4}{90}, \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^6} &= \frac{\pi^6}{945}. \end{aligned}$$

Wir wollen an dieser Stelle auch an die *Riemannsche Zetafunktion*

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}$$

erinnern. Sie ist definiert und konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$: Ist nämlich $s = x + iy$, so ist

$$\frac{1}{\nu^s} = \frac{1}{\nu^x \nu^{iy}},$$

aber $\nu^{iy} = e^{iy \ln \nu}$ für $\nu > 0$. Die Abkürzung ln steht hier für den reellen Logarithmus.