Klausur WS 2001/2002

Aufgabe 1

Gegeben sind $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $G = (2, 1, 3) + \mathbb{R}(2, 3, 4)$ und $E = (6, 1, 1) + \mathbb{R}(1, 1, 1) + \mathbb{R}(4, 3, 2)$. Bestimmen Sie $d(\vec{u}, G)$, $d(\vec{u}, E)$ und $G \cap E$.

$$\begin{aligned}
d(\vec{u}, G) &= \frac{|(2,3,4) \times ((1,-1,2) - (2,1,3))|}{|(2,3,4)|} \\
&= \frac{|(2,3,4) \times (-1,-2,-1)|}{\sqrt{29}} \\
&= \frac{|(5,-2,-1)|}{\sqrt{29}} \\
&= \sqrt{\frac{30}{29}} \\
&\approx 1{,}02
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= (1,1,1) \times (4,3,2) \\
&= (-1,2,-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= (-1,2,-1) \cdot (6,1,1) \\
&= -5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\vec{u}, E) &= \frac{|(-1,2,-1) \cdot (1,-1,2) - (-5)|}{|(-1,2,-1)|} \\
&= \frac{-5+5}{\sqrt{6}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$G \cap E$ kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$(2,1,3) + \alpha(2,3,4) = (6,1,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(4,3,2)$$

Nach äquivalenter Umformung erhält man:

$$\alpha(2,3,4) - \beta(1,1,1) - \gamma(4,3,2) = (4,0,-2)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar.

$\Longrightarrow \quad G \cap E = \emptyset$

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem, und geben Sie eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & = & 25 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & -12 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 8 & 25 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 8 & 25 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad x_4 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -1$$

$$\text{Setze } x_2 = \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -3 - \lambda$$

Die Lösung L des o. g. linearen Gleichungssystems ist

$$L = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3

Ist die Menge $S = \{(2,-3,-1,-1),(6,1,3,7),(-1,4,2,3)\}$ linear unabhängig? Geben Sie eine Basis von span(S) an.

S ist genau dann linear unabhängig, wenn folgende Gleichung nur die triviale Lösung besitzt:

$$\alpha(2,-3,-1,-1) + \beta(6,1,3,7) + \gamma(-1,4,2,3) = \vec{0}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad S \text{ ist linear abhängig.}$$

Da keine zweielementige Teilmenge von S linear abhängig ist, ergibt sich

$$\{(2,-3,-1,-1),(6,1,3,7)\}$$

als eine Basis von span(S).

Aufgabe 4

Es seien $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ und $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Untersuchen Sie, ob G_1 bzw. G_2 mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

Die Menge G_1 bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, da die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) *Assoziativgesetz*

Im folgenden seien $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Axiom erfüllt.

(ii) *Neutrales Element*

Dieses Axiom ist erfüllt, da G_1 die Einheitsmatrix (das neutrale Element der Matrizenmultiplikation) enthält ($a = 0$).

(iii) *Inverses Element*

Zu jedem Element aus G_1 existiert bezüglich der Matrizenmultiplikation ein inverses Element, da G_1 nur Elementarmatrizen vom Typ F_{ik}^{λ} enthält und diese wie wir wissen invertierbar sind.

Im folgenden sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\left(F_{ik}^{\lambda}\right)^{-1} = F_{ik}^{-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Axiom erfüllt.

Die Menge G_2 bildet mit der Matrizenmultiplikation keine Gruppe, da sie die Einheitsmatrix (das neutrale Element der Matrizenmultiplikation) nicht enthält.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob die angegebene Menge U ein Untervektorraum vom Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist.

a) $V = \mathbb{R}^3, U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_3 = 0\right\}$

b) $V = \{f \mid f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$
$U = \{f \in V \mid f(2k) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$

---

a) Folgendes Beispiel zeigt, daß die Menge U kein Untervektorraum vom Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist:

Es seien
$$\vec{a} := (1,0,0) \quad \text{und} \quad \vec{b} := (0,0,1).$$
Offensichtlich gilt $\vec{a}, \vec{b} \in U$.
$$\vec{a} + \vec{b} = (1,0,1)$$
Da der Vektor $(1,0,1)$ nicht in U enthalten ist $(1 \cdot 1 \neq 0)$, hat das Axiom (U2) für Untervektorräume (*Abgeschlossenheit unter der Addition*) für U keine Gültigkeit.

b) Die Menge U ist ein Untervektorraum vom Vektorraum V über $\mathbb{R}$, da die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) *Nichtleere Menge U*

Offensichtlich ist die folgende Funktion f in U enthalten:
$$f(x) := 0 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{N}$$
$\Longrightarrow$ Axiom erfüllt.

(ii) *Abgeschlossenheit unter der Addition*

Es seien $f, g \in U$ und $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} (f+g)(2k) &= f(2k) + g(2k) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ Axiom erfüllt.

(iii) *Abgeschlossenheit unter der Multiplikation mit Skalaren*

Es seien $f \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(2k) &= \lambda \cdot f(2k) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
$\Longrightarrow$ Axiom erfüllt.