Dozent: Prof. Dr. Wolfgang Ebeling
Übungsleiter: Dr. Detlef Wille

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra B“ im SS 2002 an der Universität Hannover

Joachim Selke

19. Februar 2003

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra B“

Aufgabe 1

Es seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det A, \det B, \det AB, \det(A+B), \det\left(\frac{1}{2}B\right)$ und $\det B^2$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) \cdot (-3) = -12$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 10 & 8 & -2 \\ 0 & 14 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 14 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -18 & -2 & 0 \\ 14 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\begin{vmatrix} -18 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -((-18)\cdot 3 - 4\cdot(-2))$$
$$= 46$$

$$\det AB = \det A \cdot \det B = -12 \cdot 46 = -552$$

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 14 \\ -5 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 4\cdot(-3) - (-5)\cdot 14$$
$$= 58$$

$$\det\left(\frac{1}{2}B\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det B = \frac{23}{8}$$

$$\det B^2 = \det B \cdot \det B = 46^2 = 2116$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist.

Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D an, zu der A ähnlich ist, und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = D$.

A ist diagonalisierbar, da es sich um eine symmetrische Matrix handelt.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A. Dazu betrachten wir das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 2\lambda-6 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -5 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-3) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2\lambda-6 \\ -1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-3) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda-3)^2 \cdot \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

A besitzt demnach die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, zu denen wir nun die zugehörigen Eigenräume bestimmen:

$$
\begin{aligned}
& (A - \lambda_1 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(Orthogonalbasis)} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(Orthonormalbasis)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (A - \lambda_2 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & -9 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(Orthonormalbasis)}
\end{aligned}
$$

Die Diagonalmatrix D wird durch die Eigenwerte von A bestimmt, eine dazugehörige Matrix S ergibt sich aus den Orthonormalbasen der Eigenräume von A. Es ergibt sich:

$$
D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, daß im $\mathbb{R}^2$ die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung eine Drehung ist.

b) Spiegeln Sie zunächst an der durch $y = x$ gegebenen Gerade, anschließend an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Welche Matrix beschreibt die entstehende Drehung?

---

a) Es seien $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ und $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen, die Spiegelungen an der um $\frac{\alpha_1}{2}$ bzw. $\frac{\alpha_2}{2}$ gedrehten x-Achse beschreiben. Es gilt also:

$$g_i(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & -\cos\alpha_i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{für } i = 1, 2$$

Für die Verkettung von g_1 und g_2 (also die doppelte Spiegelung an der gedrehten x-Achse) gilt dann:

$$\begin{aligned}
(g_2 \circ g_1)(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & -\cos\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & -\cos\alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1) & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) & -\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1) & \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}
\end{aligned}$$

Bei $g_2 \circ g_1$ handelt es sich offenbar um eine lineare Abbildung, die eine Drehung um den Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$ beschreibt.

b) Um die entstandene Drehung zu beschreiben, können wir die Rechnung aus Aufgabenteil a) verwenden. Offensichtlich gilt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{2} &= \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \\
\frac{\alpha_2}{2} &= \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_2 = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Für die die entstehende Drehung beschreibende Matrix M gilt also:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\sin\frac{5\pi}{6} \\ \sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie im $\mathbb{R}^5$ eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Zur Bestimmung der Orthonormalbasis verwenden wir das SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren. Da der erste und dritte Vektor der oben genannten Basis bereits orthogonal sind, normieren wir diese beiden Vektoren und brauchen dann nur noch den dritten Vektor zu bestimmen. Es gilt:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Nach dem SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahren folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_3' &= \vec{u}_3 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 \\ &= \vec{u}_3 - \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_3'}{|\vec{v}_3'|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Eine Orthonormalbasis von U ist demnach:

$$U = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 5

Bringen Sie die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$$

auf Normalform, und skizzieren Sie den durch die Gleichung gegebenen Kegelschnitt.

Es seien $\vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $A := \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$g(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Zunächst berechnen wir eine Diagonalmatrix D, zu der A ähnlich ist, sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = D$. Wir bestimmen dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda - 8) \cdot (\lambda + 2)$$

A besitzt demnach die Eigenwerte $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = -2$.

$$\begin{aligned}
& (A - \lambda_1 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\iff \quad & \vec{x} \in \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(Orthonormalbasis)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& && (A - \lambda_2 \cdot E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
&\iff && \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
&\iff && \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\
&\iff && \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\
&\iff && \vec{x} \in \operatorname{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(Orthonormalbasis)}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich:

$$
D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}
$$

Es sei $\vec{x}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, und es gelte $\vec{x} = S \cdot \vec{x}'$. Da es sich bei S um eine Drehmatrix handelt, gehen die $\vec{x}$-Koordinaten offensichtlich aus den $\vec{x}$-Koordinaten durch eine Drehung um $\frac{3\pi}{4}$ hervor.

Es gilt nun:

$$
\begin{aligned}
\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} &= \vec{x}'^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot \vec{x}' + \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot S \cdot \vec{x}' \\
&= \vec{x}'^T \cdot D \cdot \vec{x}' + \begin{pmatrix} -16 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}' \\
&= 8x'^2 - 2y'^2 - 16x' \\
&= 8 \cdot \left(x'^2 - \frac{y'^2}{4} - 2x' \right) \\
&= 8 \cdot \left((x'-1)^2 - \frac{y'^2}{4} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Definieren wir nun $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'' + 1 \\ y'' \end{pmatrix}$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
& && 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0 \\
&\iff && 8 \cdot \left(x''^2 - \frac{y''^2}{4} - 1 \right) = 0 \\
&\iff && x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Die Gleichung beschreibt in $\vec{x}''$-Koordinaten eine Hyperbel mit den Parametern 1 und 2. Demnach handelt es sich in $\vec{x}$-Koordinaten um eine um 1 in x-Richtung verschobene Hyperbel, die anschließend um $\frac{3\pi}{4}$ gedreht wurde. Die folgende Grafik veranschaulicht dies: