1. Hausübung (8.4.2002)

Aufgabe 1

Es seien $\sigma = (3, 6, 5, 2, 4, 8, 1, 7)$ und $\tau = (3, 1, 2, 4, 6, 5, 8, 7)$.
Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1}, τ^{-1}, die Anzahl der Inversionen von σ und τ sowie $\operatorname{sign} \sigma$ und $\operatorname{sign} \tau$.

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \tau &= (5, 3, 6, 2, 8, 4, 7, 1) \\
\tau \circ \sigma &= (2, 5, 6, 1, 4, 7, 3, 8) \\
\sigma^{-1} &= (7, 4, 1, 5, 3, 2, 8, 6) \\
\tau^{-1} &= (2, 3, 1, 4, 6, 5, 8, 7)
\end{aligned}$$

Es sei $m(\rho)$ die Anzahl der Inversionen der Permutation ρ.

$$\begin{aligned}
m(\sigma) &= 2 + 4 + 3 + 1 + 1 + 2 + 0 \\
&= 13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(\tau) &= 2 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign} \sigma &= (-1)^{13} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign} \tau &= (-1)^{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\det A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - (-3) \cdot (-2) \cdot 3 \\ &= -9 + 24 - 70 - 42 - 20 - 18 \\ &= -135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det B &= (-1) \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 1 - 7 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-2) \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 10 - 18 + 28 - 15 - 21 + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wegen der Verteilung der Nullen in der Matrix C, kommen für die Summenbildung zur Bestimmung von $\det C$ nach Definition nur Permutationen σ der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ in Frage, für die gilt:

$$\sigma(2) = 1 \quad \text{und} \quad \sigma(4) \neq 4$$

Bei allen übrigen Permutationen ist der jeweilige Summand Null und hat daher für $\det C$ keine Bedeutung. Nur die Permutationen $(2, 1, 4, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$, $(4, 1, 2, 3)$ und $(4, 1, 3, 2)$ erfüllen die oben genannten Kriterien. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \det C &= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= 3 \cdot (12 - 24 - 12 + 6) \\ &= -54 \end{aligned}$$

2. Hausübung (15.4.2002)

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & 10 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ die Terme $\det(A)$, $\det\left(A - \frac{1}{2}A\right)$ und $\det\left(A^2\right)$.

---

a) Da sich die dritte Zeile der Matrix A durch Addition der ersten beiden Zeilen ergibt, liegt eine lineare Abhängigkeit der Zeilen vor und es folgt:

$$\det(A) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det(B) &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 10 & 28 & 18 & 41 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 & 8 \\ 0 & 10 & 28 & 18 & 41 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 10 & 28 & 18 & 41 \\ 0 & 11 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -10 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ -3 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 18 & 41 \\ 0 & -35 & -102 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \begin{vmatrix} 18 & 41 \\ -35 & -102 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot (-102 \cdot 18 + 35 \cdot 41) \\
&= -4010
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 3 - 4 \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(A - \frac{1}{2}A\right) &= \det\left(\frac{1}{2}A\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \det(A) \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(A^2\right) &= \det(A)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ 0 & \left(b^2-a^2\right) & \left(c^2-a^2\right) & \left(d^2-a^2\right) \\ 0 & \left(b^3-a^3\right) & \left(c^3-a^3\right) & \left(d^3-a^3\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ (b-a)\cdot(b+a) & (c-a)\cdot(c+a) & (d-a)\cdot(d+a) \\ (b-a)\cdot\left(b^2+ab+a^2\right) & (c-a)\cdot\left(c^2+ca+a^2\right) & (d-a)\cdot\left(d^2+da+a^2\right) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (b+a) & (c+a) & (d+a) \\ \left(b^2+ab+a^2\right) & \left(c^2+ca+a^2\right) & \left(d^2+da+a^2\right) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (c-b) & (d-b) \\ 0 & \left(c^2-b^2+ca-ab\right) & \left(d^2-b^2+da-ab\right) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} (c-b) & (d-b) \\ (c-b)\cdot(c+b+a) & (d-b)\cdot(d+b+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c+b+a) & (d+b+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)
\end{aligned}
$$

3. Hausübung (22.4.2002)

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und benutzen Sie dabei die CRAMERsche Regel, falls sie sich anwenden läßt:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -20 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

---

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -55$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -20 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \det A_1 = 144$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = 61$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -20 \end{pmatrix}, \qquad \det A_3 = -230$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{144}{55}, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{61}{55}, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{230}{55} = \frac{46}{11}$$

b) Da die dritte Zeile des Gleichungssystems aus der Addition der beiden vorhergehenden Zeilen entsteht, liegt eine lineare Abhängigkeit vor. Die CRAMERsche Regel ist also nicht anwendbar.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 20 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{7}{20} + \frac{1}{4}x_3, \qquad x_1 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{29}{20} - \frac{1}{4}x_3$$

Also ergibt sich für die Lösungsmenge L des Gleichungssystems:

$$L = \left(\frac{29}{20} - \frac{1}{4}x_3,\ \frac{7}{20} + \frac{1}{4}x_3,\ x_3\right) = \left(\frac{29}{20},\ \frac{7}{20},\ 0\right) + \mathbb{R}\,(-1,\ 1,\ 4)$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\det(A)$ für die $n \times n$-Matrix A mit

a)
$$A = (a_{ik}), \text{ wobei } a_{ik} = \min\{i, k\}$$

b)
$$A = (a_{ik}), \text{ wobei } a_{ik} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = k, \\ 1 & \text{falls } i = k+1, \\ 1 & \text{falls } i = k-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

a) Da sich die Determinante einer Matrix bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile nicht ändert, können wir die Matrix durch Addition des -1-fachen der $(n-1)$-ten Zeile zur n-ten Zeile transformieren.

Für die n-te Zeile ergibt sich dann:

$$a_{nk} = \min\{n, k\} - \min\{n-1, k\} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < n, \\ 1 & \text{falls } k = n. \end{cases}$$

Die Entwicklung nach der n-ten Zeile mit dem LAPLACEschen Entwicklungssatz liefert:

$$\det A = \det A_{nn}$$

Da A_{nn} vom selben Typ wie die Matrix A ist (aber mit der Zeilen- und Spaltenzahl $n-1$), können wir o. g. Vorgehen solange wiederholen, bis die Matrix A auf eine 1×1-Matrix zurückgeführt wurde.

Es gilt:
$$\det A = a_{11} = 1$$

b) Im folgenden sei $A(n)$ eine $n \times n$-Matrix, die nach o. g. Schema aufgebaut ist.

Die Entwicklung nach der 1. Zeile mit dem LAPLACEschen Entwicklungssatz liefert:

$$\begin{aligned} \det A(n) &= a_{11} \cdot \det A(n)_{11} - a_{12} \cdot \det A(n)_{12} + 0 \\ &= 2 \cdot \det A(n-1) - 1 \cdot \det A(n)_{12} \\ &= 2 \cdot \det A(n-1) - \det A(n)_{12} \end{aligned}$$

Für $A(n)_{12} = B(n-1)$ ergibt sich aus der Definition von A nach Indexverschiebung:

$$
\begin{aligned}
B(n-1) = (b_{ik}), \text{ wobei } b_{ik} &= \begin{cases} 2 & \text{falls } i+1 = k \text{ und } k = 1, \\ 2 & \text{falls } i+1 = k+1 \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i+1 = k+1 \text{ und } k = 1, \\ 1 & \text{falls } i+1 = k+1+1 \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i+1 = k+1 \text{ und } k = 1, \\ 1 & \text{falls } i+1 = k+1-1 \text{ und } k > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{falls } i = 0 \text{ und } k = 1, \\ 2 & \text{falls } i = k \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i = 1 \text{ und } k = 1, \\ 1 & \text{falls } i = k+1 \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i = 1 \text{ und } k = 1, \\ 1 & \text{falls } i = k-1 \text{ und } k > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{falls } i = k \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i = 1 \text{ und } k = 1, \\ 1 & \text{falls } i = k+1 \text{ und } k > 1, \\ 1 & \text{falls } i = k-1 \text{ und } k > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Entwicklung von $B(n-1)$ nach der 1. Spalte mit dem LAPLACEschen Entwicklungssatz liefert:

$$\det A(n)_{12} = \det B(n-1) = b_{11} \cdot \det B(n-1)_{11} + 0 = \det B(n-1)_{11}$$

Wie sich leicht erkennen läßt, ist $B(n)_{11}$ vom selben Typ wie $A(n)$. Es gilt:

$$A(n)_{12} = B(n-1)_{11} = A(n-2)$$

Eingesetzt in die oben für $\det A(n)$ bestimmte Gleichung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\det A(n) &= 2 \cdot \det A(n-1) - \det A(n)_{12} \\
&= 2 \cdot \det A(n-1) - \det A(n-2)
\end{aligned}
$$

Wir können also $\det A(n)$ als rekursive Folge mit den beiden leicht zu berechnenden Startwerten $\det A(1) = 2$ und $\det A(2) = 3$ auffassen. Betrachten wir nun den Abstand des n-ten Folgenglieds zum $(n-1)$-ten:

$$
\begin{aligned}
\det A(n-1) - \det A(n) &= \det A(n-1) - (2 \cdot \det A(n-1) - \det A(n-2)) \\
&= \det A(n-2) - \det A(n-1)
\end{aligned}
$$

Der Abstand des n-ten Glied der Folge zum $(n-1)$-ten ist also über die ganze Folge konstant, nämlich (wie man den ersten beiden Folgengliedern entnehmen kann) Eins.

Daher folgt:

$$\det A(n) = n+1$$

4. Hausübung (29.4.2002)

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden linearen Abbildung $f_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

- f_1: Drehung um die y-Achse um den Winkel $90°$
- f_2: Orthogonalprojektion auf die x-z-Ebene
- f_3: Spiegelung an der durch $2x + y - z = 0$ gegebene Ebene

Welche Matrizen beschreiben f_1, f_2, f_3, $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_2$?

Was ist jeweils das Bild vom Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Wie anschaulich leicht zu erkennen ist, muß f_1 folgende Eigenschaften haben:

$$f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$f_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Da die Orthogonalprojektion eines Vektors auf die x-z-Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit eben diesem Vektor bis auf die auf Null gesetzte (zur besagten Ebene senkrechte) y-Komponente identisch ist, gilt:

$$f_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für die Orthogonalprojektion $\vec{x}'$ eines Vektors $\vec{x}$ auf einen anderen Vektor $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt gemäß Lemma 4.1 aus Lineare Algebra A:

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Daraus läßt sich der Lotfußpunkt $\vec{x}'$ für das Fällen eines Lotes von einem Punkt $\vec{x}$ auf eine den Ursprung schneidende Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$ bestimmen. Es gilt:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Da es sich bei der Spiegelung eines Punktes $\vec{x}$ an einer solchen Ebene im $\mathbb{R}^3$ um die Spiegelung dieses Punktes an dem o. g. Lotfußpunkt handelt, ergibt sich für ein derartiges Spiegelbild $\vec{x}''$:

$$\vec{x}'' = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cdot \vec{n}$$

Die Anwendung dieser Gleichung für die Bestimmung der Bilder der kanonischen Basisvektoren für f_3 liefert:

$$f_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$f_3(\vec{x}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für $f_1 \circ f_2$ gilt:

$$(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f_1\left(f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f_1\left(f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f_1\left(f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = f_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$(f_1 \circ f_2)(\vec{x}) = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für $f_2 \circ f_3$ gilt:

$$(f_2 \circ f_3)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f_2\left(f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_2\left(\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$(f_2 \circ f_3)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f_2\left(f_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_2\left(\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(f_2 \circ f_3)\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f_2\left(f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = f_2\left(\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$(f_2 \circ f_3)(\vec{x}) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für $f_3 \circ f_2$ gilt:

$$(f_3 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f_3\left(f_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_3\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$(f_3 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f_3\left(f_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(f_3 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = f_3\left(f_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = f_3\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$(f_3 \circ f_2)(\vec{x}) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\\2 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für die Bilder des Vektors $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich jeweils:

$$f_1\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$(f_1\circ f_2)\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(f_2\circ f_3)\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$(f_3\circ f_2)\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 11 & -10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

a) Zeigen Sie, daß g linear ist und geben Sie eine Matrix A an mit $g(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

b) Berechnen Sie $(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $(g \circ f)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

---

a) Im folgenden seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu w_1 + 2\cdot(\lambda v_2 + \mu w_2) \\ \lambda v_1 + \mu w_1 - (\lambda v_2 + \mu w_2) \\ 2\cdot(\lambda v_1 + \mu w_1) + \lambda v_2 + \mu w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 + 2\lambda v_2 \\ \lambda v_1 - \lambda v_2 \\ 2\lambda v_1 + \lambda v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu w_1 + 2\mu w_2 \\ \mu w_1 - \mu w_2 \\ 2\mu w_1 + \mu w_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 + 2w_2 \\ w_1 - w_2 \\ 2w_1 + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot g(\vec{v}) + \mu \cdot g(\vec{w}) \end{aligned}$$

Da gilt

$$g(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \cdot g(\vec{v}) + \mu \cdot g(\vec{w}),$$

ist g eine lineare Abbildung.

Aus

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

b)

$$(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -78 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = g\left(\begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \\ -13 \end{pmatrix}$$

5. Hausübung (6.5.2002)

Aufgabe 1

a) $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$f\left(x_1, \ldots, x_5\right) = \left(2x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ x_4 + x_5,\ 0,\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5\right).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} f$ und von $\operatorname{Im} f$.

b) Es sei V der Vektorraum der ganzen rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$, also

$$V = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{es gibt } a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \right\}.$$

Zeigen Sie zunächst, daß die Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\varphi(f) = f'$ (die Ableitung von f) linear ist. Bestimmen Sie dann $\operatorname{Ker} \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$.

---

a) Die Umwandlung der gegebenen Darstellung von f in eine mit Koeffizientenmatrix liefert:

$$f\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nach der Dimensionsformel gilt nun, daß die Basis des Bildes aus drei Vektoren besteht. Drei solcher Vektoren erhält man durch Auswahl drei (offensichtlich) linear unabhängiger Spalten der Abbildungsmatrix:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

b) Zuerst zeigen wir, daß φ eine lineare Abbildung ist.

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= (\lambda \cdot u + \mu \cdot v)' \\ &= (\lambda \cdot u)' + (\mu \cdot v)' \\ &= \lambda \cdot u' + \mu \cdot v' \\ &= \lambda \cdot \varphi(u) + \mu \cdot \varphi(v) \end{aligned}$$

Da es sich bei Null um das neutrale Element der Addition in V handelt, enthält der Kern von φ alle Polynome, deren Ableitung Null ist. Bekanntermaßen handelt es sich dabei um alle konstanten Funktionen bzw. Polynome. Also gilt:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\}$$

Wir zeigen nun, daß es kein Polynom gibt, das nicht die Ableitung eines anderen Polynoms ist:

Annahme: Sei

$$f'(x) := \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} \cdot x^{k-i} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$$

ein Polynom vom Grad k, dessen Stammfunktion kein Polynom ist.

Integration von f' nach bekannten Regeln liefert:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_{k-i}}{k-i+1} \cdot x^{k-i+1} + c \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Wegen

$$\frac{a_{k-i}}{k-i+1} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad c \in \mathbb{R}$$

handelt es sich bei f um ein Polynom vom Grad $k+1$. Demnach liegt ein Widerspruch zur Annahme vor. Die Stammfunktion jedes Polynoms ist also auch ein Polynom.

Das Bild von φ enthält alle Polynome, deren Stammfunktion auch ein Polynom ist, also wie wir eben gezeigt haben alle Polynome. Es gilt daher:

$$\operatorname{Im}\varphi = V$$

Aufgabe 2

Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ sei eine Basis von V. Untersuchen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

a) $\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Im} f$.

b) f ist injektiv $\iff$ $f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)$ sind linear unabhängig.

c) f ist surjektiv $\iff$ $f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)$ sind linear unabhängig.

d) Ist $\dim W = \dim V$, so gilt:
f surjektiv $\iff$ $\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ ist eine Basis von W.

---

a)

$$\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\} \text{ ist eine Basis von } \operatorname{Im} f$$

gilt im allgemeinen nicht, was folgendes Gegenbeispiel beweist:

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die aus Beispiel 2.3 aus der Vorlesung bekannte lineare Abbildung

$$f\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

Zudem sei $\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\} = \left\{f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots f\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ ist also keine Basis von $\operatorname{Im} f$, da Mengen, die den Nullvektor enthalten, linear abhängig sind und damit keine Basis darstellen können.

b) Da gilt

$$\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\right\} \text{ ist eine Basis von } V, \tag{1}$$

läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ durch Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen. Es gilt also

$$\vec{v} = \sum_{n=1}^{\dim V} \lambda_n \vec{b}_n \qquad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ k = \dim V.$$

Unter Ausnutzung der Linearität von f läßt sich folgende (wegen $\vec{0} = f\left(\vec{0}\right) \in W$) lösbare Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= f\left(\vec{v}\right) \\
&= f\left(\sum_{n=1}^{\dim V} \lambda_n \vec{b}_n\right) && (2) \\
&= \sum_{n=1}^{\dim V} f\left(\lambda_n \vec{b}_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\dim V} \lambda_n \cdot f\left(\vec{b}_n\right) && (3)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende Relationskette:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} \quad &\overset{\text{(Satz 3.3)}}{\iff} \quad \operatorname{Ker} f = \left\{\vec{0}\right\} \\ &\overset{(2)}{\iff} \quad \sum_{n=1}^{\dim V} \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0} \\ &\overset{(1)}{\iff} \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \\ &\overset{(3)}{\iff} \quad f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right) \text{ sind linear unabhängig} \end{aligned}$$

c)

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right) \text{ sind linear unabhängig}$$

gilt im allgemeinen nicht, da es lineare Abbildungen gibt, die surjektiv, aber nicht injektiv sind. Würde die Aussage gelten, so läge nach dem Satz aus Aufgabe 2b) allgemeine Äquivalenz zwischen Injektivität, Surjektivität (und damit auch Bijektivität) vor.

d) Nach Satz 3.5 aus der Vorlesung gilt für eine lineare Abbildung f zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension:

$$f \text{ surjektiv} \iff f \text{ injektiv}$$

Nach dem Satz aus Aufgabe 2b) gilt demnach äquivalent:

$$f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right) \text{ sind linear unabhängig}$$

Da n linear unabhängige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ nach Satz 13.2 aus der Vorlesung Lineare Algebra A den $\mathbb{R}^n$ aufspannen und es gilt $\dim W = \dim V$, ist $\left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ eine Basis von V. Da es sich hierbei um eine Äquivalenz-Beziehung handelt, folgt:

$$\text{Ist } \dim W = \dim V, \text{ so gilt:} \quad f \text{ surjektiv} \iff \left\{f\left(\vec{b}_1\right), \ldots, f\left(\vec{b}_n\right)\right\} \text{ ist eine Basis von } W.$$

6. Hausübung (13.5.2002)

Aufgabe 1

Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Geraden

$$G = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Zudem sei

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}, \qquad B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{und } B'' \text{ die Standardbasis.}$$

Berechnen Sie $M_B^B(g)$, $M_{B'}^B(g)$, $M_{B''}^{B''}(g)$, $T_{B'}^B$, $T_B^{B'}$ und $M_{B''}^B(f \circ g)$, wobei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$M_{B''}^{B''}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\-2 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

definiert sei.

Da der erste Basisvektor von B in G liegt und die anderen beiden Vektoren von B senkrecht zu G sind (erkennbar am Skalarprodukt), ergibt sich:

$$M_B^B(g) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Nach der Transformationsformel gilt:

$$M_{B'}^B(g) = T_{B'}^B M_B^B(g)$$

Da gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

folgt

$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
M_{B'}^B(g) &= T_{B'}^B M_B^B(g)\\
&= \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach der Transformationsformel gilt:

$$M_{B''}^{B''}(g) = T_{B''}^{B} M_{B}^{B}(g) T_{B}^{B''}$$

Da es sich bei B'' um die Standardbasis handelt, ergibt sich $T_{B''}^{B}$ direkt aus B:

$$T_{B''}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Invertierung von $T_{B''}^{B}$ mit bekanntem Verfahren liefert:

$$T_{B}^{B''} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
M_{B''}^{B''}(g) &= T_{B''}^{B} M_{B}^{B}(g) T_{B}^{B''} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Invertierung von $T_{B'}^{B}$ mit bekanntem Verfahren liefert:

$$T_{B}^{B'} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 4.1 gilt:

$$M_{B''}^{B}(f \circ g) = M_{B''}^{B}(f) M_{B}^{B}(g)$$

Somit folgt unter Anwendung der Transformationsformel:

$$\begin{aligned}
M_{B''}^{B}(f \circ g) &= M_{B''}^{B}(f) M_{B}^{B}(g) \\
&= M_{B''}^{B''}(f) T_{B''}^{B} M_{B}^{B}(g) \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei bezüglich der Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

gegeben durch

$$M_{B_2}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ und die Matrix $M_{B'}^{B}(f)$ für die Standardbasen B und B' des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Nach der Transformationsformel gilt:

$$M_{B'}^{B}(f) = T_{B'}^{B_2} M_{B_2}^{B_1}(f) T_{B_1}^{B}$$

Die Bestimmung von $T_{B_1}^{B}$ ist aufgrund des Aufbaus von B_1 ebenso einfach wie die Bestimmung von $T_{B'}^{B_2}$. Es gilt:

$$T_{B'}^{B_2} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, \qquad T_{B_1}^{B} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_{B'}^{B}(f) &= \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\5 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\3 & -1 & 3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) &= M_{B'}^{B}(f) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\3 & -1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. Hausübung (27.5.2002)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

äquivalent sind, und geben Sie invertierbare Matrizen S und T an mit $B = SAT^{-1}$.

Zunächst bestimmen wir den Rang von A und B:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang} A &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang} A &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Da gilt $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B$, handelt es sich bei A und B um äquivalente Matrizen.
Um nun S und T zu bestimmen, betrachten wir die nach Korollar 4.2 vorliegende Äquivalenz der Matrizen A, B und C mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden sei S_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und S_4 die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$.

a) Wir wollen invertierbare Matrizen S_A und T_A bestimmen, so daß gilt

$$C = S_A \cdot A \cdot T_A.$$

Dazu fassen wir C als Darstellungsmatrix einer Funktion f bezüglich der Basen B_A und B'_A auf, sowie A als Darstellungsmatrix der Funktion f bezüglich der Standardbasen.

Aus (1) läßt sich leicht der Kern von f bezüglich der Standardbasen ablesen. Es gilt:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

B_A sei nun dieser mit Standardvektoren des $\mathbb{R}^4$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzte Kern:

$$B_A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

B'_A ergibt sich aus den Bildern der ersten drei Basisvektoren von B_A. Es gilt:

$$\begin{aligned} B'_A &= \left\{ f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Aufgrund unserer Wahl der Basen gilt nach der Transformationsformel:

$$A = M_{S_3}^{S_4}(f) = T_{S_3}^{B'_A} \cdot M_{B'_A}^{B_A}(f) \cdot T_{B_A}^{S_4} = T_{S_3}^{B'_A} \cdot C \cdot T_{B_A}^{S_4}$$

Nach äquivalenter Umformung erhalten wir:

$$C = M_{B'_A}^{B_A}(f) = T_{B'_A}^{S_3} \cdot M_{S_3}^{S_4}(f) \cdot T_{S_4}^{B_A} = T_{B'_A}^{S_3} \cdot A \cdot T_{S_4}^{B_A}$$

Mit den Basen lassen sich nun leicht die Transformationsmatrizen bestimmen:

$$T_{B'_A}^{S_3} = \begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\1 & 0 & -1\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 8 & -1\\1 & -5 & 1\\-2 & 7 & -1\end{pmatrix} = S_A$$

$$T_{S_4}^{B_A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = T_A$$

b) Analog verfahren wir mit B:

Wir wollen invertierbare Matrizen S_B und T_B bestimmen, so daß gilt

$$C = S_B \cdot B \cdot T_B.$$

Dazu fassen wir C als Darstellungsmatrix einer Funktion f bezüglich der Basen B_B und B'_B auf, sowie B als Darstellungsmatrix der Funktion f bezüglich der Standardbasen.

Aus (2) läßt sich leicht der Kern von f bezüglich der Standardbasen ablesen. Es gilt:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

B_B sei nun dieser mit Standardvektoren des $\mathbb{R}^4$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzte Kern:

$$B_B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

B'_B ergibt sich aus den Bildern der ersten drei Basisvektoren von B_B. Es gilt:

$$\begin{aligned} B'_B &= \left\{ f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-6\end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Aufgrund unserer Wahl der Basen gilt nach der Transformationsformel:

$$B = M^{S_4}_{S_3}(f) = T^{B'_B}_{S_3} \cdot M^{B_B}_{B'_B}(f) \cdot T^{S_4}_{B_B} = T^{B'_B}_{S_3} \cdot C \cdot T^{S_4}_{B_B}$$

Nach äquivalenter Umformung erhalten wir:

$$C = M^{B_B}_{B'_B}(f) = T^{S_3}_{B'_B} \cdot M^{S_4}_{S_3}(f) \cdot T^{B_B}_{S_4} = T^{S_3}_{B'_B} \cdot A \cdot T^{B_B}_{S_4}$$

Mit den Basen lassen sich nun leicht die Transformationsmatrizen bestimmen:

$$T^{S_3}_{B'_B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = S_B$$

$$T^{B_B}_{S_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = T_B$$

Es gilt nun:

$$C = S_A \cdot A \cdot T_A = S_B \cdot B \cdot T_B$$

Diese Gleichung läßt sich nach B auflösen. Es folgt:

$$\begin{aligned} B &= {S_B}^{-1} \cdot S_A \cdot A \cdot T_A \cdot {T_B}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

---

a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda+1)\cdot(\lambda-5) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad 0 = \det(A - \lambda E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = -1 \quad \vee \quad \lambda = 5$$

Berechnung der Eigenvektoren und des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} & (A+E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \vec{x} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = -1$ sind also alle Vektoren $\vec{x}$ für die gilt:

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Für den Eigenraum R zum Eigenwert $\lambda = 5$ gilt:

$$R = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnung der Eigenvektoren und des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda = 5$:

$$\begin{aligned} & (A-5E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \Longleftrightarrow \quad & \vec{x} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 5$ sind also alle Vektoren $\vec{x}$ für die gilt:

$$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Für den Eigenraum R zum Eigenwert $\lambda = 5$ gilt:

$$R = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda E) &= \det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= -\lambda^3+12\lambda+16\\ &= (\lambda+2)^2\cdot(\lambda-4)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad 0=\det(B-\lambda E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda=-2 \quad \vee \quad \lambda=4$$

Berechnung der Eigenvektoren und des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda=-2$:

$$\begin{aligned} & (B+2E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \vec{x}=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda=-2$ sind also alle Vektoren $\vec{x}$ für die gilt:

$$\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Für den Eigenraum R zum Eigenwert $\lambda=-2$ gilt:

$$R=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Berechnung der Eigenvektoren und des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda=4$:

$$\begin{aligned} & (B-4E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-7 & 1 & -1\\ 0 & -36 & -36\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}-7 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}\\ \Longleftrightarrow\quad & \vec{x}=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda=4$ sind also alle Vektoren $\vec{x}$ für die gilt:

$$\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Für den Eigenraum R zum Eigenwert $\lambda = 4$ gilt:

$$R = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

8. Hausübung (3.6.2002)

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar sind und ob sie ähnlich sind.

Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+2) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda+2) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(\lambda+2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(\lambda+2) \cdot (-2-\lambda) \cdot (4-\lambda) \\
&= -(\lambda+2)^2 \cdot (\lambda-4)
\end{aligned}$$

Demnach hat A die Eigenwerte -2 und 4 mit den algebraischen Vielfachheiten 2 und 1.
Bestimmung der Dimension der Eigenräume von A:
Für den Eigenwert -2:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

Für den Eigenwert 4:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte entsprechen also den algebraischen. Demzufolge ist A diagonalisierbar.

Bestimmung der Eigenwerte von B:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}4-\lambda & -4+\lambda & 0\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -7 & -2-\lambda & -1\\ -6 & 0 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & -1\\ 0 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\
&= (4-\lambda)\cdot(-2-\lambda)^2\\
&= -(\lambda+2)^2\cdot(\lambda-4)
\end{aligned}$$

Demnach hat B die Eigenwerte -2 und 4 mit den algebraischen Vielfachheiten 2 und 1.
Bestimmung der Dimension der Eigenräume von B:
Für den Eigenwert -2:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix} = 2$$

Für den Eigenwert 4:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix} = 2$$

Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte -2 und 4 sind also jeweils 1 und entsprechen damit nicht den algebraischen Vielfachheiten. Demzufolge ist B nicht diagonalisierbar.

A und B sind nicht ähnlich, da B nicht ähnlich zu der Diagonalmatrix von A ist, aber ähnliche Matrizen zu den selben Matrizen ähnlich sind.
Beweis: Seien A, B und C $n\times n$-Matrizen. Außerdem seien A und B sowie o. B. d. A. A und C ähnlich. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& A = T\cdot B\cdot T^{-1} \qquad \wedge \qquad A = U\cdot C\cdot U^{-1}\\
\Longrightarrow\ & T\cdot B\cdot T^{-1} = U\cdot C\cdot U^{-1}\\
\Longleftrightarrow\ & B = T^{-1}\cdot U\cdot C\cdot U^{-1}\cdot T
\end{aligned}$$

Da nach den Rechenregeln für Matrizen gilt $T^{-1}\cdot U = \left(U^{-1}\cdot T\right)^{-1}$, sind B und C ähnlich.
Also handelt es sich dabei, daß B zu allen Matrizen ähnlich ist, zu denen auch A ähnlich ist, um eine notwendige Bedingung für die Ähnlichkeit von A und B.

Aufgabe 2

Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$, $A \neq 0$, und es gebe ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Zeigen Sie:

a) 0 ist einziger Eigenwert von A.

b) A ist nicht diagonalisierbar.

---

a) Eigenwerte λ von A müssen per Definition folgende Gleichung lösen:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \qquad \text{mit } \vec{x} \neq \vec{0} \tag{1}$$

Unter Verwendung der Eigenschaften von A ergibt sich:

$$\begin{aligned} & A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \\ \iff & A^k \cdot \vec{x} = A^{k-1} \cdot \lambda \cdot \vec{x} \\ \iff & 0 \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A^{k-1} \cdot \vec{x} \\ \iff & 0 = \lambda \cdot A^{k-1} \cdot \vec{x} \\ \iff & \lambda = 0 \quad \vee \quad A^{k-1} \cdot \vec{x} = 0 \\ \iff & \lambda = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Der Umformungsschritt (2) ist zulässig, da $A^{k-1} \cdot \vec{x} = 0$ keine gültige Lösung von (1) darstellt. Ein $\vec{x}$, das die Gleichung $A^{k-1} \cdot \vec{x} = 0$ löst, wäre auch eine von λ unabhängige Lösung von (1). Dies ist aber nur für den per Definition ausgeschlossenen Fall $\vec{x} = \vec{0}$ der Fall.

Somit folgt, daß A nur einen Eigenwert λ besitzt, nämlich $\lambda = 0$.

b) Um zu zeigen, daß A nicht diagonalisierbar ist, führen wir einen indirekten Beweis:

Angenommen A wäre diagonalisierbar, dann müßte n die algebraische und geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwertes 0 sein. Die Dimension des zugehörigen Eigenraumes wäre also auch n. Betrachtet man A als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung, so bedeutet dies, daß jeder Vektor $\vec{x}$ auf den Nullvektor abgebildet wird. Der Kern der Abbildung ist also identisch mit dem $\mathbb{R}^n$. So eine Abbildung ist aber nur möglich, wenn die Darstellungsmatrix die Nullmatrix ist. Da A aber per Definition ungleich der Nullmatrix ist, ist A nicht diagonalisierbar.

9. Hausübung (10.6.2002)

Aufgabe 1

Beschreiben Sie die Wirkung der linearen Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, wobei gilt

$$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte von A, indem wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(3 \cdot (A - \lambda E)) \qquad (1) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-3\lambda & -3+3\lambda & 0 \\ -1 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= 3 \cdot (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= 3 \cdot (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-3\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= -3 \cdot (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-3\lambda & -1 \\ -2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} \\
&= -3 \cdot (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-3\lambda & -3\lambda \\ -2 & -3\lambda \end{pmatrix} \\
&= 9 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-3\lambda & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -27 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

A hat also die Eigenwerte 0 und 1. Nun bestimmen wir durch Einsetzen in (1) die zugehörigen Eigenräume:
Für den Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist demnach $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für den Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist demnach $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Da die Vektoren der Basen der beiden Eigenräume linear unabhängig sind und der Basisvektor zum Eigenwert 0 zudem senkrecht auf der durch den Eigenraum zum Eigenwert 1 beschriebenen Ebene steht, handelt es sich bei f um eine Orthogonalprojektion auf die besagte Ebene.

Aufgabe 2

Lösen Sie die Differentialgleichung $y''' + 4y'' - y' - 4y = 0$ mit der Eigenwertmethode.

Es seien

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' \quad \text{und} \quad y_3 = y''.$$

Demnach gilt auch

$$\begin{aligned} {y_1}' &= y' = y_2, \\ {y_2}' &= y'' = y_3, \\ {y_3}' &= y''' = -4y'' + y' + 4y = 4y_1 + y_2 - 4y_3. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} {y_1}' \\ {y_2}' \\ {y_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =: A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda E) \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & 1 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1) \cdot \begin{pmatrix} -\lambda-1 & 1 \\ 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+4) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-1) \end{aligned}$$

A hat also die Eigenwerte -4, -1 und 1. Somit folgt für y als Lösung der Differentialgleichung:

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-4t} + c_2 \mathrm{e}^{-t} + c_3 \mathrm{e}^{t}$$

10. Hausübung (17.6.2002)

Aufgabe 1

Es sei

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span} S$.

Es seien

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens liefert:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2' &= \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 \\ &= \vec{u}_2 - \frac{1}{3} \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \vec{u}_2 - \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \frac{\vec{v}_2'}{|\vec{v}_2'|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{42}} \cdot \vec{v}_2' \\ &= \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3' &= \vec{u}_3 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 - (\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{42} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 &= \frac{\vec{v}_3'}{|\vec{v}_3'|} \\
&= \frac{7}{\sqrt{105}} \cdot \vec{v}_3' \\
&= \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die Orthonormalbasis S' gilt also $\operatorname{span} S = \operatorname{span} S'$:

$$S' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß die orthogonalen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

Die Menge G der orthogonalen Abbildungen bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, da die folgenden Gruppenaxiome erfüllt sind:

a) *Abgeschlossenheit*

Seien $a, b \in G$ sowie M_a, M_b die zugehörigen Darstellungsmatrizen zu einer gemeinsamen Basis des $\mathbb{R}^n$. Zudem sei $M_c := M_a \cdot M_b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(a \circ b)(\vec{x}) &= M_a \cdot M_b \cdot \vec{x} \\ &= M_c \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

Da das Produkt zweier orthogonaler Matrizen eine orthogonale Matrix ist, gilt:

$$M_c \cdot \vec{x} =: c(\vec{x}), \qquad c \in G$$

b) *Assoziativgesetz*

Seien $a, b, c \in G$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sowie M_a, M_b, M_c die zugehörigen Darstellungsmatrizen zu einer gemeinsamen Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}((a \circ b) \circ c)(\vec{x}) &= (M_a \cdot M_b) \cdot M_c \cdot \vec{x} \\ &= M_a \cdot M_b \cdot M_c \cdot \vec{x} \\ &= M_a \cdot (M_b \cdot M_c) \cdot \vec{x} \\ &= (a \circ (b \circ c))(\vec{x})\end{aligned}$$

c) *Neutrales Element*

Sei $a \in G$ und M_a die zugehörige Darstellungsmatrix zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}a(\vec{x}) &= M_a \cdot \vec{x} \\ &= M_a \cdot E \cdot \vec{x} \\ &= (a \circ \mathrm{id})(\vec{x})\end{aligned}$$

Da gilt $E^{-1} = E = E^T$, handelt es sich bei der Identität id um eine orthogonale Abbildung.

d) *Inverses Element*

Sei $a \in G$ und M_a die zugehörige Darstellungsmatrix zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left(a \circ a^{-1}\right)(\vec{x}) &= M_a \cdot {M_a}^{-1} \cdot \vec{x} \\ &= E \cdot \vec{x} \\ &= \mathrm{id}(\vec{x})\end{aligned}$$

a^{-1} existiert und ist nach Satz 7.4 eine orthogonale Abbildung. Analoges gilt für M_a.

11. Hausübung (24.6.2002)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist, und geben Sie eine Basis B an mit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

wobei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

A ist eine orthogonale Matrix, da gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

Sei S die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$M_B^B(f) = T_B^S \cdot A \cdot T_S^B$$

Da ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom aufweisen, bestimmen wir zunächst den Eigenraum von A zum Eigenwert 1:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2-4 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2-4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3}-4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3}-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da gilt $\operatorname{Rang} A_1 = 2$, hat der gesuchte Eigenraum die Dimension 1. Wie leicht zu sehen ist ergibt sich:

$$\operatorname{Eig}(A, 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(A, 1).$$

Nun ergänzen wir b_1 zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$:

$$b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 := b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
M_B^B(f) &= T_B^S \cdot A \cdot T_S^B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^{T} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Abbildung f ist also eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Winkel $\frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 2

Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen im $\mathbb{R}^2$ beschrieben?

a)
$$7{x_1}^2 + \sqrt{3} \cdot 6x_1x_2 + 13{x_2}^2 - 16 = 0$$

b)
$$4{x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 - 16 = 0$$

---

a) Sei
$$q(\vec{x}) = 7{x_1}^2 + \sqrt{3} \cdot 6x_1x_2 + 13{x_2}^2 = 16 \qquad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt
$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot \sqrt{3} \\ 3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir die Eigenwerte von A:
$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E) &= (7 - \lambda) \cdot (13 - \lambda) - 27 \\ &= \lambda^2 - 20\lambda + 64 \\ &= (\lambda - 16) \cdot (\lambda - 4) \end{aligned}$$

A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = 4$. Für die zugehörigen Eigenräume R_1 und R_2 ergibt sich schnell:
$$R_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei B eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren mit
$$B = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit
$$\vec{x} = S \cdot \vec{y}, \qquad \text{wobei } S = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

folgt:
$$\begin{aligned} q(\vec{x}) &= \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \\ &= (S \cdot \vec{y})^T \cdot A \cdot S \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ &= 16{y_1}^2 + 4{y_2}^2 && = 16 \end{aligned}$$

Es folgt ferner:
$$\frac{{y_1}^2}{1^2} + \frac{{y_2}^2}{2^2} = 1$$

Die Kurve ist also eine um den Ursprung um $\frac{5\pi}{3}$ gedrehte Ellipse mit den Halbachsen 1 und 2.

b) Sei

$$q(\vec{x}) = 4{x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 = 16 \qquad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E) &= (4-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda \\ &= \lambda \cdot (\lambda - 5) \end{aligned}$$

A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$. Für die zugehörigen Eigenräume R_1 und R_2 ergibt sich schnell:

$$R_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei B eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren mit

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit

$$\vec{x} = S \cdot \vec{y}, \qquad \text{wobei } S = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

folgt:

$$\begin{aligned} q(\vec{x}) &= \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} \\ &= (S \cdot \vec{y})^T \cdot A \cdot S \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ &= \vec{y}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} \\ &= 5{y_2}^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Es folgt ferner:

$$y_2 = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Ber der Kurve handelt es sich also um zwei parallele Geraden mit der Steigung -2 und dem Abstand $\frac{4}{\sqrt{5}}$ zum Ursprung.