Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 9. April 2002

1. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (2, 2, 3 Punkte)

Der Vektorraum $V = C[-1,1]$ sei mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ versehen.

a) Es seien $f_1, f_2 \in V$ definiert durch $f_1(t) = |t| - 1$ und $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$.
Berechnen Sie den Abstand von f_1 und f_2.

b) Können Sie Funktionen $0 \neq h \in V$ angeben, die zu f_1 und f_2 orthogonal sind?

c) Es sei $U := \{f \in V\,;\, f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\,\}$.
(U ist ein Teilraum von V, der Raum der geraden Funktionen; kein Beweis nötig.)
Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V.

Lösung

a) $d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \sqrt{\langle f_1 - f_2, f_1 - f_2\rangle}$ $\qquad (f_1 - f_2)(t) = \begin{cases} -t-1 & \text{für } t \leq 0 \\ -1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\langle f_1 - f_2, f_1 - f_2\rangle &= \int_{-1}^{1} (f_1(t) - f_2(t))^2\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} t^2 + 2t + 1\,dt + \int_{0}^{1} 1\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 + t\right]_{-1}^{0} + 1 \\
&= -(-\frac{1}{3} + 1 - 1) + 1 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

b) Wir geben eine Konstruktionsmöglichkeit für ein gesuchtes h an:

Wähle zunächst $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0 \\ -t & \text{für } -\frac{1}{4} \leq t < 0 \\ t + \frac{1}{2} & \text{für } -\frac{1}{2} \leq t < -\frac{1}{4} \end{cases}$

Es folgt:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f_2(t)h(t)\,dt = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f_1(t)h(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{4}} (-t-1)(t+\frac{1}{2})\,dt + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (-t-1)(-t)\,dt =: a < 0\,.$$

(Wer will, kann das ausrechnen.)
Nun wähle man h auf $[-1, -\frac{1}{2}]$ noch als Funktion $h(t) = \alpha t + \beta$ und bestimme α und β so, daß $h(-\frac{1}{2}) = 0$ (damit $h \in V$) und $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-t-1)h(t)\,dt = -a$.

c) Jede Funktion $l \in V$ läßt sich eindeutig als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion h (d. h. $h(x) = -h(-x)$ für alle x) schreiben. Aus dem Ansatz $l(x) = g(x) + h(x)$ folgt nämlich $l(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$, also $g(x) = \frac{1}{2}(l(x) + l(-x))$ und $h(x) = \frac{1}{2}(l(x) - l(-x))$, und diese Funktionen g und h sind gerade bzw. ungeraden Funktionen.

Nun folgt:

$$\begin{aligned} l \in U^\perp &\iff \langle l, f\rangle = 0 \quad \text{für jedes } l \in U \\ &\iff \int_{-1}^{1} l(x)f(x)\,dx = 0 \\ &\iff \int_{-1}^{1} (g(x)+h(x))f(x)\,dx = 0 \quad \text{falls } l \text{ wie oben aufgespalten} \\ &\iff \underbrace{\int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_{-1}^{1} h(x)f(x)\,dx}_{II} = 0 \end{aligned}$$

Das Integral II ist stets 0, da h eine ungerade und f eine gerade Funktion ist, der Integrand also ungerade ist. Im Integral I sind f und g gerade Funktionen. I ist genau dann 0 für alle $f \in U$, wenn $g = 0$ ist. Also folgt:

$$l \in U^\perp \iff l = h \iff l \text{ ist ungerade Funktion.}$$

Damit erhält man $U^\perp = \{f \in V\,;\, f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\,\}$.

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)

a) Es sei $U = \mathrm{Span}\,\{(0,1,0,i),(i,0,1,0),(0,i,i,0)\}$ und $\langle x,y\rangle = {}^t\overline{x}\cdot y$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie orthonormale Basen von U und von $U^\perp$.

b) Es sei P_3 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade ≤ 3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von P_3 (bezüglich $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$).

Lösung

a) Die Vektoren $(0,1,0,i)$ und $(i,0,1,0)$ sind schon orthogonal. Normierung liefert also $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1,0)$. Mit $v = (0,i,i,0)$ wird nun $w = v - \overline{\langle v,w_1\rangle}w_1 - \overline{\langle v,w_2\rangle}w_2$ gesetzt, also

$$w = (0,i,i,0) - \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i) - \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1,0) = (\frac{1}{2},\frac{i}{2},\frac{i}{2},\frac{1}{2}) .$$

Wegen $\|w\| = 1$ folgt $w_3 = w$. $B = (w_1,w_2,w_3)$ ist eine ONB von U. Um eine ONB von $U^\perp$ zu erhalten, ergänzen wir B zu einer Basis des $\mathbb{C}^4$, z.B. durch e_4. Führen wir nun das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren mit w_1,w_2,w_3,e_4 weiter, so liefert der sich ergebende Vektor w_4 eine ONB von $U^\perp$. Mit $v = e_4$ folgt

$$\begin{aligned} w &= v - \overline{\langle v,w_1\rangle}w_1 - \overline{\langle v,w_2\rangle}w_2 - \overline{\langle v,w_3\rangle}w_3 \\ &= (0,0,0,1) + \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2},\frac{i}{2},\frac{i}{2},\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4},\frac{i}{4},-\frac{i}{4},\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

und $w_4 = \frac{1}{\|w\|}w = (-\frac{1}{2},\frac{i}{2},-\frac{i}{2},\frac{1}{2})$ ist eine gesuchte ONB von $U^\perp$.

b) Wir starten mit der Basis $(1,x,x^2,x^3)$ von P_3. Wegen $\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\,dt = 1$ ist $w_1 := 1$ schon normiert. Nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir jetzt

$$w = x - \langle x,1\rangle\,1 = x - \frac{1}{2}\,, \qquad \text{da } \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

$$\langle w,w\rangle = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12} \quad\Longrightarrow\quad \|w\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$

Es folgt: $w_2 := (2x-1)\sqrt{3}$.

Das Verfahren wird iteriert.

$$w = x^2 - \langle x^2, 1\rangle\, 1 - \langle x^2, (2x-1)\sqrt{3}\rangle\, (2x-1)\sqrt{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|w\|^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\, dx = \frac{1}{180} \quad \Longrightarrow \quad \|w\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

Damit wird $w_3 := (6x^2 - 6x + 1)\sqrt{5}$. Weiter:

$$\begin{aligned}
w &= x^3 - \langle x^3, 1\rangle\, 1 - \langle x^3, (2x-1)\sqrt{3}\rangle\, (2x-1)\sqrt{3} \\
&\quad -\langle x^3, (6x^2-6x+1)\sqrt{5}\rangle\, (6x^2-6x+1)\sqrt{5} \\
&= x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{20}(2x-1) - \frac{1}{4}(6x^2-6x+1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20} \\
\|w\|^2 &= \int_0^1 (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20})^2\, dx = \frac{1}{2800} \\
w_4 &:= \sqrt{2800}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}) = (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$B = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ ist eine Orthonormalbasis von P_3.

Aufgabe 3 (2, 4 Punkte)

a) Es sei $A \in SO(3)$ und F sei diejenige orthogonale Abbildung mit $A = M_E(F)$, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Nach Satz 9.21 gibt es dann eine Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$ mit $M_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$, wobei $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie: $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(A) - 1)$.

b) Bezüglich der Standardbasis E werde $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellt durch

$$M_E(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis B an, so daß $M_B(F)$ die Gestalt aus Satz 9.21 besitzt. Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung F im $\mathbb{R}^3$.

Lösung

a) Die Matrizen A und $M_B(F)$ sind ähnlich. Ähnliche Matrizen besitzen die gleiche Spur, also gilt

$$\operatorname{Spur} A = 1 + 2\cos\alpha = \operatorname{Spur} M_B(F)\,.$$

Es folgt: $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(A) - 1)$.

b) Da die Spalten von $M_E(F)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden, ist F ein orthogonaler Endomorphismus, so dass die Aussage des Satzes 9.21 gilt, die Aufgabe also korrekt gestellt ist. Folglich muss wegen der Aussage des Satzes 9.21 1 oder -1 ein Eigenwert der Matrix sein. Nun sieht man der Matrix $E - M_E(F)$ sofort an, dass sie den Rang 2 hat (die ersten beiden Zeilen sind identisch!), also ist 1 ein Eigenwert und man berechnet $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Nach a) folgt $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $\alpha = \frac{\pi}{6}$ oder $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Wir bestimmen nun zunächst eine Basis B, bezüglich der die F darstellende Matrix die Gestalt aus Satz 9.21 besitzt und erkennen an dieser Matrix dann auch, welcher dieser beiden Winkel hier vorliegt.

Wir wählen als Basis die Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,-1,0) \quad , \quad b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,1,0) \quad , \quad b_3 =^t (0,0,1)\ .$$

Mit $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $W^{-1} = {}^tW = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$W^{-1}M_E(F)W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\ .$$

Hieran erkennt man, daß $-\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, also $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ gilt. Aus $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt sich nun eindeutig $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Bei der Abbildung F handelt es sich um eine Drehung im $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse ist durch den Eigenvektor zum Eigenwert 1 gegeben. Gedreht wird in einer Ebene senkrecht zur Drehachse um den Winkel α.

Bemerkung: Bei einer Drehung im $\mathbb{R}^3$ ist der Drehwinkel α erst dann eindeutig bestimmt, wenn man eine “Orientierung” der Basis festlegt. Betrachtet man nämlich z. B. die Basis $B' = (b_1, b_3, b_2)$, so erhält man

$$W^{-1}M_{B'}(F)W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und damit $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Hierbei ist dann die Drehrichtung vertauscht; statt um $\frac{\pi}{6}$ im mathematisch positiven Sinn dreht man um $\frac{11}{6}\pi$ im mathematisch negativen Sinn. Das Bild eines Vektors ist dabei dasselbe.

Aufgabe 4 (3, 3 Punkte)

Eine quadratische Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichung (Q).
Bringen Sie Q durch orthogonalen Koordinatenwechsel auf die Gestalt

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + c = 0.$$

Geben Sie eine geometrische Deutung der Hyperfläche an.

a) (Q) $\quad x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 9$

b) (Q) $\quad 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 = 6$

Lösung

a) Mit $x = {}^t(x_1, x_2)$ läßt sich (Q) beschreiben durch ${}^tx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = 9$. Die Matrix wird diagonalisiert. $\det(E - xA) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.
Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Setzt man $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $x = Sy$, so folgt $S^{-1}AS = {}^tSAS = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und für (Q) gilt:

$${}^txAx = 9 \iff {}^ty\,{}^tSASy = 9 \iff 3y_1^2 - y_2^2 = 9 \iff \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{9} = 1\ .$$

Dies ist die gesuchte Normalform. Im $\mathbb{R}^2$ stellt die Gleichung (Q) also eine Hyperbel dar. Die Hauptachsen der Hyperbel liegen in Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, und sie ist in Richtung der y_1-Achse (Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$) geöffnet.

b) Mit $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ läßt sich (Q) schreiben als ${}^tx \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} x = 6$. Diese Matrix A wird mit einer Orthonormalbasis diagonalisiert. Durch scharfes Hinsehen erkennt man sofort die Eigenwerte 3 und 6, und berechnet $\mathrm{Eig}(6, A) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ und

$\mathrm{Eig}(3, A) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\}$. Für den Eigenraum zum Eigenwert 3 wird nun eine Orthonormalbasis mit dem Verfahren von Schmidt konstruiert. Mit $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 1, 0)$ und

$$w = {}^t(-1, 0, 1) - \langle {}^t(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 1, 0)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 1, 0) = {}^t(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

ergibt sich eine Orthonormalbasis zu

$$B = (\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 1, 0), \sqrt{\frac{2}{3}}\,{}^t(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1))\ .$$

Setzt man ${}^tS = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ und $x = Sy$,

so folgt $S^{-1}AS = {}^tSAS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ und für (Q) gilt:

$${}^txAx = 6 \iff {}^ty\,{}^tSASy = 6 \iff 3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 = 6\ .$$

Dies ist die gesuchte Normalform.

$$3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 = 6 \iff \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1$$

Hieran erkennt man, daß die durch (Q) gegebene quadratische Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ ein Ellipsoid ist. Die Hauptachsen des Ellipsoids sind durch die Vektoren der Orthonormalbasis B gegeben. Auf diesen Achsen sind die Halbachsen des Ellipsoids $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ und 1.
(Schnitte parallel zur y_1, y_2-Ebene sind also Kreise, Schnitte parallel zur y_1, y_3-Ebene bzw. zur y_2, y_3-Ebene sind echte Ellipsen.)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 8. April 2002

2. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3, 3 Punkte)

a) Im $\mathbb{R}^2$ sei F die Spiegelung an der durch $y = ax$ gegebenen Geraden. Bestimmen Sie die Matrix A mit $F = h_A$.

b) Zeigen Sie, dass der durch $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ gegebene Endomorphismus $F = h_A$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung ist, die mit der x-Achse den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.

Lösung

a) $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1, $b_2 := \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal dazu. Für $B = (b_1, b_2)$ gilt also $M_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\begin{aligned} A &= M^B_{\mathrm{KB}}(id)M_B(F)M^{\mathrm{KB}}_B(id) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung klar, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Spiegelung an der x-Achse beschreibt.

Sei $\alpha \neq 0$. Nach Vorlesung ist $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ Matrix einer Spiegelung, wobei die Spiegelachse durch den Eigenraum zum Eigenwert 1 gegeben ist. Dieser wird erzeugt vom Vektor $\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 1-\cos\alpha \end{pmatrix}$ (Lösung von $\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha \end{pmatrix} x = 0$). Dieser Vektor schließt mit der x-Achse einen Winkel β ein mit $\tan\beta = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, und nach der trigonometrischen Formel für den halben Winkel ist $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$, d.h. $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung

A ist symmetrisch, deshalb gibt es eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren von A. Durch Normierung erhält man eine orthogonale Matrix der gesuchten Art.

Zunächst berechnet man das charakteristische Polynom $\chi_A = x(x-3)^2$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist $b_1 := {}^t(1, 1, -1)$. Den Eigenraum zum Eigenwert 3 bestimmt man wie üblich oder direkt als orthogonales Komplement zu $\mathrm{Span}\{b_1\}$. Man sieht direkt, dass $b_2 := {}^t(-1, 1, 0)$

dazugehört und berechnet $b_3 := b_1 \times b_2$, da man dann direkt eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren bekommt. Also $b_3 = {}^t(1,1,2)$. Durch Normierung erhält man die orthogonale Matrix $S = \frac{1}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$, für die ${}^tSAS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Es sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Der Endomorphismus $F : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $F(p) := p'$.
Bestimmen Sie die zu F adjungierte Abbildung F^{adj}.
Ist F selbstadjungiert?

Lösung

Wir betrachten die Basis $B = (1, x, x^2)$ von V. Es ist $M_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gesucht ist $M_B(F^{\mathrm{adj}})$. Dazu nutzen wir die definierende Bedingung $\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^{\mathrm{adj}}(w)\rangle$, die für alle $v, w \in V$ gelten muß. Das Skalarprodukt $\langle p, q\rangle$ beschreibt sich bzgl. B durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ (Integrale ausrechnen!). Die definierende Bedingung für die adjungierte Abbildung liefert also ${}^t(M_B(F) \cdot q_B(v)) \cdot A \cdot q_B(w) = {}^t(q_B(v)) \cdot A \cdot M_B(F^{\mathrm{adj}}) \cdot q_B(w)$ für alle $v, w \in V$.
Daraus folgt ${}^tM_B(F) \cdot A = A \cdot M_B(F^{\mathrm{adj}})$, also $M_B(F^{\mathrm{adj}}) = A^{-1} \cdot {}^tM_B(F) \cdot A$. Man berechnet

$$A^{-1} = \frac{135}{32} \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{16}{45} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$M_B(F^{\mathrm{adj}}) = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Da diese Matrix nicht symmetrisch ist, ist F nicht selbstadjungiert.
F^{adj} läßt sich auch in der Form $F^{\mathrm{adj}}(a_0 + a_1 + a_2x^2) = -\frac{5}{2}a_1 + (3a_0 + a_1)x + \frac{15}{2}x^2$ angeben.

Aufgabe 4 (4, 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie jeweils Index und Signatur der Form $\langle\ ,\ \rangle_A$, wobei

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob es eine reelle invertierbare Matrix W gibt mit $A = {}^tWBW$, und bestimmen Sie gegebenenfalls solch eine Matrix W.

Lösung

a) Wir wenden das Verfahren aus der Stundenübung an und führen beide genannten Verfahren je einmal durch. Bei A führen wir an E elementare Zeilenumformungen durch. Rechts werden jeweils die Additionsanweisungen für die Zeilenumformungen angegeben.

$$
\begin{array}{|rrr|rrr|ll|}
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
-2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & & \\
0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Die den durchgeführten Zeilenumformungen entsprechenden Spaltenumformungen bestehen darin, das 2−fache der ersten Spalte (der linken Matrix) zur zweiten Spalte zu addieren und anschließend das (−1)−fache der ersten Spalte zur dritten Spalte. Das führt auf die folgende Matrix, bei der dann gleich wieder Zeilenumformungen an Zeile 3 durchgeführt werden.

$$
\begin{array}{|rrr|rrr|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\
0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Führt man nun noch die entsprechende Spaltenumformung durch und multipliziert die letzte Zeile und Spalte jeweils mit 3, so erhält man die folgende Endmatrix:

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 39 & 5 & 4 & 3
\end{array}\right).
$$

A ist nun diagonalisiert.
Man erkennt: A hat den Index 2 und die Signatur 1. Eine Matrix W, die auf die angegebene Diagonalmatrix transformiert, ist die Matrix $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Bei B ist $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Nach unserem Verfahren addieren wir wegen $a_{12} \neq 0$ Zeile 2 zu Zeile 1 und Spalte 2 zu Spalte 1 und führen dann den Kalkül entsprechend weiter. Hier wenden wir auf E die elementaren Spaltenumformungen an, die jeweils wieder angegeben sind:

$$
\begin{array}{|rrrr|c|}
0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & \\
2 & 2 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|rrrr|ccc|}
2 & 1 & -2 & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 & & \\
-2 & -1 & 0 & 1 & & 1 & \\
4 & 2 & 1 & 0 & & & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

A besitzt den Index 2 und die Signatur 0.
Eine Matrix W, die auf die erzeugte Diagonalmatrix transformiert, lautet

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wie bei a) bringen wir A und B (durch Zeilenumformungen) auf Diagonalgestalt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Da A und B gleichen Index und gleiche Signatur haben gibt es eine Matrix W mit ${}^tWBW = A$.
Solch eine Matrix findet man, indem man A und B zunächst auf die gleiche Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ transformiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{{}^tP} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}_{{}^tQ} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}_{Q}$$

Nun erhält man $A = ({}^tP)^{-1} \cdot {}^tQ \cdot B \cdot Q \cdot P^{-1} = \underbrace{{}^t(QP^{-1})}_{{}^tW} B \underbrace{(QP^{-1})}_{W}$ und damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = QP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{3}\sqrt{5} - 5 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{6}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 22. April 2002

3. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (1, 2, 3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

c) $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Lösung

a) Wegen $4 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$ und $\det(A) > 0$ folgt die positive Definitheit sofort aus dem Hurwitz-Kriterium.

b) Man kann wieder das Hurwitz-Kriterium anwenden, muß aber bis $\det(A)$ rechnen. Besser ist das Verfahren der Stundenübung zur Erzeugung der Normalform des Satzes von Sylvester, das man hier nur auf A anzuwenden braucht.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 14 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 14 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 17 & -101 \end{pmatrix}$$

Hier erkennt man, dass beim letzten Schritt unten rechts eine negative Zahl entsteht. Also ist A nicht positiv definit.

c) Wir betrachten den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner n versehen mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ und darin die Basis $B = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$. Das Skalarprodukt wird in B gerade durch die Matrix A dargestellt, da $\int_0^1 x^k\,dx = \dfrac{1}{k+1}$. Also ist A positiv definit.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ und $\chi_A = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sei das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie:
A ist genau dann positiv definit, wenn für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt: $(-1)^{n-j} a_j > 0$.

Lösung

Da A eine symmetrische Matrix ist, zerfällt χ_A in Linearfaktoren. Sei also $\chi_A(x) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$.
Multipliziert man dies aus und berechnet den Vorfaktor von x^j, also a_j, so muss man j-mal den Faktor x und $n-j$-mal einen Faktor der Form $-\lambda_k$ wählen,also

$$a_j = (-1)^{n-j}\Big(\sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-j} \le n} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_{n-j}}\Big).$$

Sei nun A positiv definit. Dann sind nach Vorlesung alle Eigenwerte von A positiv. Damit ist auch jeder Summand auf der rechten Seite der Gleichung positiv und es folgt $(-1)^{n-j}a_j > 0$.
Nun gelte die Bedingung über die Koeffizienten. Wir zeigen, dass alle Eigenwerte von A positiv sind. Daraus folgt dann nach Vorlesung die positive Definitheit von A.
Angenommen, c ist ein Eigenwert von A mit $c \leq 0$. Dann ist $c^j \leq 0$ für ungerades j und $c^j \geq 0$ für gerades j.
Ist n gerade, so ist $n-j$ gerade, falls j gerade und $n-j$ ist ungerade, falls j ungerade. Damit ist nach Voraussetzung $a_0 > 0$ und alle anderen Terme a_jc^j sind ≥ 0.
Damit ist $\sum_{j=0}^{n} a_jc^j = \chi_A(c) > 0$, ein Widerspruch zu $\chi_A(c) = 0$ (c ist Eigenwert von A!).
Für ungerades n argumentiert man entsprechend.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)
Bestimmen Sie für $f, g \in K[x]$ ein normiertes Polynom p mit $\langle p \rangle = \langle f, g \rangle$.
a) $K = \mathbb{R}$, $f = x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2$, $g = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 2$
b) $K = \mathbb{F}_2$, $f = x^6 + x^5 + x^3 + x^2$, $g = x^4 + x^2 + 1$

Lösung
a) Durch Polynomdivision erhält man:

$$\begin{aligned} f &= xg + (-2x^3 + 2x^2 - 2x) =: xg + r_1 \\ g &= (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2})r_1 + (2x^2 - 2x + 2) =: (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2})r_1 + r_2 \\ r_1 &= xr_2 + 0 \end{aligned}$$

Hier bricht der Algorithmus ab. Durch Normierung ergibt sich $p = \frac{1}{2}r_2 = x^2 - x + 1$ als ggT von f und g und für p gilt $\langle p \rangle = \langle f, g \rangle$.
b) Man berechnet:

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + x^3 + x^2 &= (x^4 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 \\ x^4 + x^2 + 1 &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Damit ist $x^2 + x + 1$ der ggT von f und g, nach Stundenübung also ein normiertes Polynom p mit $\langle p \rangle = \langle f, g \rangle$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Zeigen Sie:
Ein Körper K ist genau dann endlich, wenn jede Abbildung $f : K \longrightarrow K$ eine Polynomabbildung ist.

Lösung
“$\Longleftarrow$” Jede Abbildung sei eine Polynomabbildung.
Annahme: K ist unendlich. Sei $c \in K$. $K \setminus \{c\}$ ist ebenfalls unendlich. Betrachte die Abbildung $f : K \longrightarrow K$ mit $f(c) = 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann muß es ein $P = a_nx^n + \ldots + a_0$ geben mit $P(a) = f(a)$ für alle $a \in K$. Es ist $P \neq 0$, da $f(c) \neq 0$. Das Polynom P hat dann aber höchstens n Nullstellen, ein Widerspruch.
“$\Longrightarrow$” K sei endlich, o. B. d. A. $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Betrachte die n Abbildungen f_i, die definiert sind durch $f_i(x_k) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Zunächst erkennt man, daß jede Abbildung $f : K \longrightarrow K$ eine Linearkombination der f_i ist. Ist nämlich $f(x_k) = x_{l_k}$ für $k = 1, \ldots, n$, so gilt:

$$(*) \qquad f = \sum_{j=1}^{n} x_{l_j} f_j \ .$$

Wir zeigen nun, daß jedes f_i eine Polynomabbildung ist. Dann ist wegen $(*)$ jedes f eine Polynomabbildung.

Es sei i gegeben, und es sei $\alpha := \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k) \neq 0$. Betrachte das Polynom

$$P = \frac{1}{\alpha} \cdot \prod_{k \neq i} (x - x_k) \; .$$

Für x_i gilt $P(x_i) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Für x_l mit $l \neq i$ gilt $P(x_l) = 0$, da ein Faktor $(x_l - x_k)$ gleich 0 ist. Also gilt $P(a) = f_i(a)$ für alle $a \in K$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 29. April 2002

4. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass A idempotent ist, berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume von A und beschreiben Sie den Homomorphismus f mit $f = h_A$.

Lösung

Man rechnet leicht nach, dass $A^2 = A$ gilt, also ist A idempotent. A hat nach Vorlesung also nur die Eigenwerte 0 und 1 und da man sofort $\operatorname{Rang} A > 1$ sieht, folgt $\chi_A = x(x-1)^2$ (was zum Lösen der Aufgabe überflüssig ist). Weiter berechnet man wie üblich

$$\operatorname{Eig}(0, A) = \operatorname{Span}\{(2, 1, -1)\} =: U \quad , \quad \operatorname{Eig}(1, A) = \operatorname{Span}\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\} =: W \ .$$

Nach Vorlesung ist f eine Projektion, und zwar die Projektion längs U auf W.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Dann sind für $A \in \operatorname{Mat}(n, K)$ äquivalent:

(i) $A^2 = E$

(ii) $\dfrac{1}{2}(E - A)$ ist idempotent.

(iii) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ± 1.

Lösung

Wir schließen (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) . Es sei $B := \frac{1}{2}(E - A)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) :

Es sei $A^2 = E$. Dann gilt

$$B^2 = \frac{1}{4}(E - A)(E - A) = \frac{1}{4}(E^2 - A - A + A^2) = \frac{1}{2}(E - A) = B \ ,$$

also ist B idempotent.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Wir zeigen: Für alle $x \in K^n$ gilt $Ax = x$ oder $Ax = -x$.

Da B idempotent ist, gilt nach Lemma 8.22: $\operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{Im} B = K^n$.

Ist nun $x \in K^n$ mit $x \in \operatorname{Ker} B$, so ist $Bx = 0$, d. h. $\frac{1}{2}(E - A)x = 0$, also $Ax = x$.

Ist $x \in K^n$ mit $x \in \operatorname{Im} B$, so gibt es $y \in K^n$ mit $By = x$. Wir multiplizieren von links mit B und erhalten unter Benutzung von $B^2 = B$: $x = Bx$. Dies liefert $\frac{1}{2}(E - A)x = x$ oder $Ax = -x$.

Wir haben gezeigt, daß jeder Vektor des K^n Eigenvektor von B zum Eigenwert 1 bzw. zum Eigenwert -1 ist. Also gibt es eine Basis des K^n aus Eigenvektoren. B ist diagonalisierbar und die Diagonalmatrix enthält auf der Diagonalen die Eigenwerte von B, also nur die Elemente ± 1.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) :
Nach Voraussetzung gibt es eine invertierbare Matrix W mit

$$W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$E = (W^{-1}AW)(W^{-1}AW) = W^{-1}A^2W$$

Multiplikation von links mit W sowie von rechts mit W^{-1} ergibt $A^2 = E$.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)
Es sei $A \in$Mat(n, K) nilpotent. Zeigen Sie:
a) Ist $N \neq 0$, so ist N nicht diagonalisierbar über K.
b) Ist $\mu \in K$ beliebig und $N \neq 0$, so ist auch $\mu E + N$ nicht diagonalisierbar über K.

Lösung
a) Nach Vorlesung hat eine nilpotente Matrix nur den Eigenwert 0. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Wegen $A \neq 0$ ist dies nicht der ganze K^n. Also existiert keine Basis aus Eigenvektoren zu A, d.h. A ist nicht diagonalisierbar.
b) Es ist $\mu E \cdot N = N \cdot \mu E$. Damit ist Satz 11.16 anwendbar und es folgt $\chi_{\mu E+N} = \chi_{\mu E} = (x-\mu)^n$. $\mu E + N$ hat also nur μ als Eigenwert, und nun folgt wie unter a), dass der Eigenraum zum Eigenwert μ nicht der ganze K^n ist, also ist $\mu E + N$ nicht diagonalisierbar über K.

Aufgabe 4 (4, 3 Punkte)
Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$.
a) Es sei $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass AB und BA das gleiche charakteristische Polynom haben.
b) Zeigen Sie, dass $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ generell gilt.

Lösung
a)
Es sei $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, wobei $A_1 \in \mathrm{Mat}\,(r, K)$. Dann folgt:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_3 & O \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad BA = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Mit Sätzen der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \det(xE - AB) = \left| \begin{pmatrix} xE_r - A_1 & O \\ -A_3 & xE_{n-r} \end{pmatrix} \right| = x^{n-r}\chi_{A_1} \\ \chi_{BA} &= \det(xE - BA) = \left| \begin{pmatrix} xE_r - A_1 & -A_2 \\ O & xE_{n-r} \end{pmatrix} \right| = x^{n-r}\chi_{A_1}, \end{aligned}$$

also $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b) Hat B nicht die Form aus a), so gibt es invertierbare Matrizen P und Q mit $PBQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Nach a) (für A setze man $Q^{-1}AP^{-1}$) gilt

$$(*) \qquad \chi_{(PBQ)(Q^{-1}AP^{-1})} = \chi_{(Q^{-1}AP^{-1})(PBQ)} \, .$$

Wegen $(PBQ)(Q^{-1}AP^{-1}) = PBAP^{-1}$ und $(Q^{-1}AP^{-1})(PBQ) = Q^{-1}ABQ$ folgt aus $(*)$:

$$(**) \qquad \chi_{PBAP^{-1}} = \chi_{Q^{-1}ABQ} \, .$$

$PBAP^{-1}$ und BA sind ähnlich; ferner sind $Q^{-1}ABQ$ und AB ähnlich (jeweils nach Definition der Ähnlichkeit). Da ähnliche Matrizen die gleichen charakteristischen Polynome besitzen, folgt $\chi_{PBAP^{-1}} = \chi_{BA}$ und $\chi_{Q^{-1}ABQ} = \chi_{AB}$. Damit ergibt sich $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ aus $(**)$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 6. Mai 2002

5. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von A:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ idempotent

Lösung

a) Für das charakteristische Polynom von A erhält man sofort

$$\chi_A = (x-2)^2((x-4)(x-3)-2) = (x-2)^3(x-5)\ .$$

Da alle Nullstellen von χ_A auch Nullstellen von μ_A sind, gibt es für μ_A nur die folgenden Möglichkeiten:

$$(x-2)(x-5) \quad , \qquad (x-2)^2(x-5) \quad , \qquad \chi_A\ .$$

Man rechnet nach: $(A-2E)(A-5E) \neq O$, $(A-2E)^2(A-5E) = O$.

Also gilt $\mu_A = (x-2)^2(x-5)$.

b) Sei $A \neq O$ idempotent, d. h. $A^2 = A$, also $A^2 - A = O$.

Ist $A = E$, so gilt $\mu_A = x - 1$, denn dies ist das normierte Polynom kleinsten Grades, welches E als Nullstelle besitzt.

Ist $A \neq E$, so ist $A^2 \neq A$ und wegen $A^2 - A = O$ ist A Nullstelle des Polynoms $P = x^2 - x = x(x-1)$. Also gilt $\mu_A \,|\, x(x-1)$. Wegen $\mu_A \neq x$ und $\mu_A \neq x - 1$ gilt $\mu_A = x(x-1)$.

Aufgabe 2 (3, 2, 2 Punkte)

Es sei $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[x]$ mit $n \geq 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) $P = \chi_A$. **b)** $P = \mu_A$

c) Ist λ Eigenwert von A, so ist ${}^t(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$ Eigenvektor von A zu λ.

Lösung

a) Wir beweisen die Behauptung durch *vollständige Induktion* über der Grad von P.

Für $\deg P = 1$ gilt $P = x + a_0$ und die Matrix A lautet $A = (-a_0)$.

Es ist $\chi_A = \det(x - a_0) = x + a_0 = P$.

Sei nun $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $n \geq 2$.

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Wir entwickeln nach der ersten Spalte, und erhalten:

$$\begin{aligned} \det(xE - A) &= x \cdot \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x + a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot a_0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{vmatrix} \\ &= x \cdot (x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot a_0 \\ &= P \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt dabei nach Induktionsvoraussetzung.

b) Aus den Rechenregeln für das Transponieren folgt für jedes Polynom P: ${}^t(P(A)) = P({}^tA)$. Also gilt $P(A) \neq 0 \iff P({}^tA) \neq 0$, und daher besitzen A und ${}^tA$ die gleichen Minimalpolynome. Wir können also auch mit ${}^tA$ arbeiten. Es gilt:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Wir interpretieren ${}^tA =: B$ als Matrix eines Endomorphismus des K^n. Für diesen gilt dann $B\,e_i = e_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$, also $B^k e_1 = e_{k+1}$ für $k = 1, \ldots, n-1$ (und natürlich auch für $k = 0$).

Ist nun P ein Polynom mit $\deg P < n$, d. h. $P = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, so folgt

$$P(B)e_1 = (\alpha_{n-1}B^{n-1} + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 B^0)e_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} \neq 0 ,$$

falls $P \neq 0$. Also ist $P(B) = P({}^tA) \neq O$. Es folgt $P = \mu_{{}^tA} = \mu_A$.

c) Man erhält

$$A \cdot {}^tx = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Da λ ein Eigenwert von A ist, gilt $P(\lambda) = 0$, also $-a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda^n$. Damit folgt $A \cdot {}^tx = \lambda x$, d. h. x ist Eigenvektor von A zu λ.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ und für das Minimalpolynom μ_A gelte: Ist P ein Teiler von μ_A, so ist $\deg(P) = 0$ oder $\deg(P) = n$.

Zeigen Sie, dass dann $K[A]$, versehen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen, ein Körper ist.

Lösung
Zu zeigen bleibt nach Stundenübung: Ist g ein Polynom mit $g(A) \neq 0$ (Nullmatrix), so existiert ein $B \in K[A]$, also ein Polynom h mit $g(A)h(A) = E$.
Es ist μ_A kein Teiler von g, da sonst $g = \mu_A h$, d.h. $g(A) = \mu_A(A)h(A) = 0$, im Widerspruch zu $g(A) \neq 0$. Da μ_A nach Voraussetzung keine echten Teiler besitzt, gilt $\mathrm{ggT}(\mu_A, g) = 1$. Nach Lemma 11.11 der Vorlesung gibt es also Polynome h_1 und h_2 mit $1 = gh_1 + \mu_A h_2$. Wir setzen A ein und erhalten:

$$1(A) = E = (gh_1 + \mu_A h_2)(A) = g(A)h_1(A) + \mu_A(A)h_2(A) = g(A)h_1(A)\ , \qquad \text{da } \mu_A(A) = 0\ .$$

$h_1(A)$ ist also invers zu $g(A)$.

Aufgabe 4 (je 3 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine Spektralzerlegung für die Matrizen $A_i \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung
Wir berechnen $\chi_{A_1} = (x+2)^2(x-4)$ und $\mu_{A_1} = (x+2)(x-4)$. Da μ_{A_1} nur einfache Nullstellen besitzt, existiert eine Spektralzerlegung und nach dem Beweis von Satz 11.35 ergibt sie sich mit $\psi_1(x) = \dfrac{x-4}{-6}$ und $\psi_2(x) = \dfrac{x+2}{6}$ zu

$$P_1 = \psi_1(A_1) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \psi_2(A_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} .$$

Bei A_2 erhält man mit Aufgabe 2 sofort

$$\chi_{A_2} = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2) = \mu_{A_2}$$

Mit $\psi_1(x) = \dfrac{(x^2-4)}{-3}$, $\psi_2(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{4}$, und $\psi_3(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{12}$ erhält man:

$$P_1 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 8 & -12 & 4 \end{pmatrix} .$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 13. Mai 2002

6. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (je 2 Punkte)

Geben Sie möglichst einfache Matrizen an, die die Eigenwerte 1 und 2 besitzen und für die

a) algebraische und geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich sind.

b) algebraische und geometrische Vielfachheit von 1 übereinstimmen, von 2 aber nicht.

c) algebraische und geometrische Vielfachheit bei beiden Eigenwerten verschieden sind.

Bitte schreiben Sie nicht nur die Matrizen auf, sondern begründen Sie, warum Sie die von Ihnen angegebenen Matrizen gewählt haben.

Lösung

a) Wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_A = (x-1)(x-2)$, also sind algebraische und geometrische Vielfachheit bei beiden Eigenwerten 1.

b) Wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_A = (x-1)(x-2)^2$. Der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 1, die daher mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Wegen $\dim \mathrm{Eig}(2, A) = 1$ hat 2 die geometrische Vielfachheit 1, die algebraische Vielfachheit von 2 ist aber 2 wie das charakteristische Polynom zeigt.

c) Wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_A = (x-1)^2(x-2)^2$. Beide Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 2, aber wegen $\dim \mathrm{Eig}(1, A) = \dim \mathrm{Eig}(2, A) = 1$ jeweils nur 1 als geometrische Vielfachheit.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ und $P \in K[x]$. Zeigen Sie, dass dann $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(A)$ ist.

Lösung

Es sei $P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Ferner sei v Eigenvektor von A zu λ, also $Av = \lambda v$. Dann ist $A^k v = \lambda^k v$, wie man durch Induktion leicht zeigt. Es folgt:

$$\begin{aligned} P(A)v &= (a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 E)v = a_n \lambda^n v + \ldots + a_1 \lambda v + a_0 v \\ &= P(\lambda)v \end{aligned}$$

Also ist v Eigenvektor von $P(A)$ zum Eigenwer $P(\lambda)$.

Aufgabe 3 (4, 2 Punkte)

a) Zeigen Sie:
Ist $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ diagonalisierbar über K, so ist $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^k)$ für alle $k \geq 1$.

b) Gilt in a) auch die Umkehrung?

Lösung

a) Ist A diagonalisierbar über K, so existiert eine Basis B des K^n, so dass $M_B^B(h_A) = B^{-1}AB = D = (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ eine Diagonalmatrix ist. Da A ähnlich zu D ist, haben A und D gleichen Rang. Es ist $D^k = (\lambda_1^k e_1, \dots, \lambda_n^k e_n)$. Damit ist Rang$(D)$ =Rang(D^k). Wegen $D^k = (B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$ ist D^k ähnlich zu A^k, also Rang(A^k) =Rang(D^k) =Rang(D) =Rang(A).

b) Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist A invertierbar, also A^k invertierbar für alle $k \geq 1$. Daher ist Rang(A) =Rang$(A^k) = 2$ für alle $k \geq 1$. A ist aber nicht diagonalisierbar, da $\mu_A = (x-1)^2$ ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung $A = H + N$.

Lösung

Wir orientieren uns bei der Lösung am Beweis von Satz 11.39 der Vorlesung.

1. Schritt: A muß auf die Gestalt des Struktursatzes gebracht werden.

Man berechnet $\chi_A = (x-3)(x-2)^2$ als charakteristisches Polynom von A und ${}^t(1, 1, -2)$ als Eigenvektor zum Eigenwert 3 sowie ${}^t(1, 0, 0)$ als Eigenvektor zur Eigenwert 2. Diese Vektoren ergänzen wir durch z. B. ${}^t(0, 0, 1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Mit $W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $W_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, und A ist ähnlich zu

$$W_1^{-1}AW_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(Dies ist noch nicht die Gestalt aus dem Struktursatz.) Mit

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) ,$$

$$A_1 = (3) = 3E + \underbrace{(0)}_{N_1} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N_2} \quad , \quad C_2 = (0 \quad -1)$$

macht man nach dem Struktursatz für eine Übergangsmatrix W den Ansatz

$$W = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & a & b \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad , \quad W_2 := (a \;\; b)$$

und dies ergibt zur Berechnung von a, b (siehe Vorlesung) $A_1W_2 + C_2 - W_2A_2 = (0 \;\; 0)$, also:

$$3(a \;\; b) + (0 \quad -1) - (a \;\; b)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (0 \;\; 0) \Longrightarrow a = 0 \, , \; b = 1 \, .$$

Es folgt:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad W^{-1}CW = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A' \, .$$

A' hat die Form des Struktursatzes. (Bemerkung: A' ist gerade die Jordansche Normalform von A. W hätte man also auch durch Berechnung einer Jordanbasis bekommen; nur kommt diese Theorie in der Vorlesung erst noch.)
Wir haben also

$$W^{-1}W_1^{-1}AW_1W = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten als JORDAN–CHEVALLEY–Zerlegung

$$A = \underbrace{W_1W \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} W^{-1}W_1^{-1}}_{H} + \underbrace{W_1W \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}W_1^{-1}}_{N} .$$

Das liefert

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(Man teste übrigens $HN = NH$.)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 27. Mai 2002

7. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ gleichzeitig diagonalisierbar sind und geben Sie eine Matrix $W \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ an, so dass $W^{-1}AW$ und $W^{-1}BW$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -1 & 8 \\ -4 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -10 \\ 6 & 7 & 3 & -9 \\ -2 & -5 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Lösung

Aus Platzgründen schreiben wir Vektoren als Zeilen.

Man berechnet zunächst die charakteristischen Polynome zu $\chi_A(x) = (x+1)^2(x-3)^2$ und $\chi_B(x) = (x-1)^2(x-2)^2$. Es ist $\mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{Span}\{(0,0,1,0), (1,1,0,1)\}$ und $\mathrm{Eig}(A, 3) = \mathrm{Span}\{(-1,1,0,0), (1,0,1,1)\}$. Auch B besitzt eine Basis aus Eigenvektoren, also sind A und B diagonalisierbar. Ferner rechnet man $AB = BA$ nach,
d.h. $[A, B] = 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 11.40 erfüllt, also existiert eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren.

Zur Berechnung startet man mit A, diagonalisiert A mittels der Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{ es ist } W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad) \, ,$$

und betrachtet nun die Matrix

$$W^{-1}BW = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

$B_{11} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ müssen nun diagonalisiert werden.

Mit $W_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ und $W_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ folgt

$$W_{11}^{-1}B_{11}W_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad W_{22}^{-1}B_{22}W_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Wir setzen $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und erhalten durch $WZ =: T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren (die Spalten von T sind die Eigenvektoren!). Eine Probe liefert

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2 (4, 2 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U sei eine Untergruppe von G. Auf G ist eine Relation $\sim$ durch

$$a \sim b \iff a \circ b^{-1} \in U$$

definiert.
a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.
b) Beschreiben Sie für $G = S_3$ (die symmetrische Gruppe) und für $U = A_3$ die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

Lösung
a) $\sim$ ist reflexiv, denn für alle $a \in G$ ist $a \circ a^{-1} = e \in U$, also $a \sim a$.
$\sim$ ist symmetrisch: Ist nämlich $a \sim b$, also $a \circ b^{-1} \in U$, so ist auch $(a \circ b^{-1})^{-1} \in U$, da U eine Untergruppe ist. Es ist aber $(a \circ b^{-1})^{-1} = b \circ a^{-1}$, also gilt $b \sim a$.
$\sim$ ist transitiv: Sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann ist $a \circ b^{-1} \in U$ und $b \circ c^{-1} \in U$. Da U Untergruppe ist, folgt $(a \circ b^{-1}) \circ (b \circ c^{-1}) = a \circ c^{-1} \in U$, also ist $a \sim c$.
b) Die S_3 besteht aus den 6 Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Davon sind drei Permutationen gerade, diese bilden die Untergruppe A_3, und drei Permutationen sind ungerade. Für alle $a \in U$ ist die Äquivalenzklasse, zu der a gehört, gerade U. Ist nämlich $b \in U$, so ist $b^{-1} \in U$, also auch $a \circ b^{-1} \in U$, d.h. es ist $a \sim b$. Ist $b \notin U$, so ist auch $a \circ b^{-1} \notin U$, also $a \not\sim b$. Wäre nämlich $a \circ b^{-1} \in U$, so auch $a^{-1} \circ a \circ b^{-1} = b^{-1} \in U$ und damit $b \in U$, ein Widerspruch.
Also ist A_3 eine Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$.
Eine zweite Äquivalenzklasse bilden die ungeraden Permutationen, denn sind a, b ungerade, so ist auch b^{-1} ungerade und $\operatorname{sign}(a \circ b^{-1}) = \operatorname{sign} a \cdot \operatorname{sign} b^{-1} = (-1) \cdot (-1) = 1$ nach Vorlesung. Daher ist $a \circ b^{-1} \in A_3$, also $a \sim b$. Da die Äquivalenzklassen eine Partition von S_3 bilden, gibt es genau 2 Aquivalenzklassen, nämlich die geraden Permutationen und die ungeraden Permutationen.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)
a) Es sei $V = \mathbb{R}^5$ und $U = \operatorname{Span}\{e_1 + e_2, e_1 - e_4\}$. Bestimmen Sie eine Basis von V/U und schreiben Sie für a mit ${}^t a = (5, -2, -3, -5, 1)$ den Vektor $a + U \in V/U$ als Linearkombination dieser Basis.
b) V sei $K-$Vektorraum, U sei Untervektorraum von V. Zeigen Sie:
Sind $a_1 + U, \ldots, a_n + U$ linear unabhängig, so sind auch die Repräsentanten $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig.
Gilt auch die Umkehrung?

Lösung
a) Wir schreiben Elemente des $\mathbb{R}^5$ aus Platzgründen wieder als Zeilen.
Es ist $U = \operatorname{Span}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 0)\}$. Wir ergänzen diese Basis von U zu einer Basis von $V = \mathbb{R}^5$. Die Äquivalenzklassen, in denen die ergänzten Vektoren liegen, bilden nach Vorlesung eine Basis des Quotientenraumes. Wir ergänzen z. B. zur Basis

$$B = \{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

und erhalten dann als Basis von V/U:

$$\{(1, 0, 0, 0, 0) + U\ ,\ (0, 0, 1, 0, 0) + U\ ,\ (0, 0, 0, 0, 1) + U\}\ .$$

Der Ansatz

$$(5,-2,-3,-5,1)+U=\alpha((1,0,0,0,0)+U)+\beta((0,0,1,0,0)+U)+\gamma((0,0,0,0,1)+U)$$

führt auf

$$(5,-2,-3,-5,1)-(\alpha,0,0,0,0)-(0,0,\beta,0,0)-(0,0,0,0,\gamma)\in U=\text{ Span}\{(1,1,0,0,0),(1,0,0,-1,0)\}\ .$$

Es muß also δ,μ geben mit

$$(5,-2,-3,-5,1)-(\alpha,0,0,0,0)-(0,0,\beta,0,0)-(0,0,0,0,\gamma)=\delta(1,1,0,0,0)+\mu(1,0,0,-1,0)\ .$$

Das entsprechende Gleichungssystem besitzt die Lösung $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=1$, $\delta=-2$, $\mu=5$. Also gilt:

$$(5,-2,-3,-5,1)+U=2\cdot((1,0,0,0,0)+U)-3\cdot((0,0,1,0,0)+U)+((0,0,0,0,1)+U)\ .$$

b) Angenommen $a_1,\ldots,a_n$ sind linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq(0,\ldots,0)$ mit $\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n=0$. Also gilt

$$U=(\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n)+U=\lambda_1(a_1+U)+\ldots+\lambda_n(a_n+U)\ .$$

Da U der Nullvektor in V/U ist, sind also $a_1+U,\ldots,a_n+U$ linear abhängig in V/U, ein Widerspruch.

Die Umkehrung gilt nicht (siehe z. B. Teil a)).
$(1,1,0,0,0),(1,0,0,-1,0)$ sind linear unabhängig, aber $(1,1,0,0,0)+U,(1,0,0,-1,0)+U$ sind linear abhängig in V/U, da jeder dieser Vektoren der Nullvektor ist.

Aufgabe 4 (4, 2 Punkte)

Es sei $A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ und $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $U(h_A,a_1)$, $U(h_A,a_2)$ und das kleinste $l\in\mathbb{N}$ mit $A^l=0$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{Ker}A^k$ für jedes $k\in\mathbb{N}$.

Lösung

a) Es ist $Aa_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $A^2a_1=0$, also $U(h_A,a_1)=$Span$\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

$$Aa_2=\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad A^2a_2=\begin{pmatrix}5\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad A^3a_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad A^4a_2=0$$

Also gilt

$$U(h_A,a_2)=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\ .$$

Man berechnet ferner

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{0} \end{array}\right) \quad , \quad A^3 = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{0} \end{array}\right) \quad , \quad A^4 = 0 \; .$$

Damit ist $l = 4$ das kleinste l mit $A^l = 0$.

b) Mit den Potenzen von A aus a) ergeben sich die gesuchten Kerne zu

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \operatorname{Ker} A^l = \mathbb{R}^5 \text{ für } l \geq 4$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 3. Juni 2002

8. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3, 2 Punkte)

a) Es sei $\chi_A(x) = (x-2)^6(x+1)^4$ und $\mu_A(x) = (x-2)^4(x+1)^2$. Welche möglichen Jordanschen Normalformen kann $A \in \mathrm{Mat}(10, \mathbb{R})$ besitzen?
Welche Möglichkeiten verbleiben für die Jordansche Normalform, wenn zusätzlich $\dim \mathrm{Eig}(A, 2) = \dim \mathrm{Eig}(A, -1) = 2$ gilt?

b) Charakterisieren Sie die Ähnlichkeitsklassen der zerfallenden $(3, 3)$-Matrizen über K.

Lösung

a) Der größte Jordanblock zu $\lambda_1 = -1$ hat die Größe 2, der zu $\lambda_2 = 2$ die Größe 4. Mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 := (2), B_1 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 := (-1)$$

haben die möglichen Jordanschen Normalformen das Aussehen $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$, wobei

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

und

$$V = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad V = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

ist. Also gibt es 4 mögliche Jordansche Normalformen.
Mit der Zusatzbedingung folgt

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

da es dann genau 2 Jordankästchen zum Eigenwert -1 und auch zum Eigenwert 2 geben muß.

b) Wir klassifizieren nach den Möglichkeiten für das Minimalpolynom μ_A:
1.Fall: $\mu_A = x - \lambda$
Dann ist A diagonalisierbar und hat λ als einzigen Eigenwert, also $A \sim \lambda E$.
2. Fall: $\mu_A = (x-\lambda)(x-\mu)$ mit $\lambda \neq \mu$
Wieder ist A diagonalisierbar und zwar

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ für } \chi_A = (x-\lambda)^2(x-\mu) \text{ und } A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ für } \chi_A = (x-\lambda)(x-\mu)^2.$$

3. Fall: $\mu_A = (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$, λ, μ, ν paarweise verschieden

A ist diagonalisierbar und $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

4. Fall: $\mu_A = (x-\lambda)^2$

K^3 ist direkte Summe von zwei zyklischen Unterräumen, also $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

5. Fall: $\mu_A = (x-\lambda)^3$.

Dann ist A zyklisch (oder: der größte Jordanblock hat die Größe 3), also $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

6. Fall: $\mu_A = (x-\lambda)^2(x-\mu)$ mit $\mu \neq \lambda$

K^3 ist direkte Summe von zwei zyklischen Unterräumen; $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Andere Fälle sind bei $n = 3$ für μ_A bei zerfallender Matrix A nicht möglich.

Aufgabe 2 (2, 3, 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform sowie eine Jordanbasis zur Matrix A.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

a) Man erhält als charakteristisches Polynom

$$\chi_A = (x+1)^3 .$$

Es ist Eig$(A,-1)$ =Span$\{{}^t(-2,0,1), {}^t(0,1,0)\}$.

Da keine Basis aus Eigenvektoren existiert, lautet hier die Jordansche Normalform z. B. :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nun muß der Hauptraum Hau$\,(A,-1)$ = Ker$\,(A + 1 \cdot E)^2$ berechnet werden. Aus Dimensionsgründen muß $(A+E)^2 = 0$ gelten, also Hau$\,(A,-1) = \mathbb{R}^3$. Wir haben (mit der Terminologie der Vorlesung):

$$W_0 := \{0\} \quad , \quad W_1 = \text{Ker}\,(A+E) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \text{Ker}\,(A+E)^2 = \mathbb{R}^3 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Es wird ein Vektor aus Hau$\,(A,-1) \setminus$ Eig$\,(A,-1)$ gewählt, also $u = {}^t(0,0,1) =: w_3$ und

$$w_2 := (A+E)u = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

gesetzt. Durch $w_1 := {}^t(0,1,0)$ wird w_2 zu einer Basis von W_1 ergänzt. Dann ist (w_2, w_3, w_1) eine Jordanbasis zu A mit der oben angegebenen Jordanschen Normalform.

b) Es gilt $\chi_A(x) = (x-2)^2((x-1)(x-4)+2) = (x-2)^2(x^2-5x+6) = (x-2)^3(x-3)$. Man berechnet zunächst $\mathrm{Eig}(3, A) = \mathrm{Span}\{{}^t(2,1,1,2)\}$.
Mit

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ (A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ (A-2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt $\mathrm{Ker}(A-2E) = \mathrm{Span}\{e_1\}$, $\mathrm{Ker}(A-2E)^2 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ und $\mathrm{Ker}(A-2E)^3 = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, {}^t(0,0,1,1)\}$. Man berechnet $(A-2E)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(A-2E)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich als Jordanbasis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ mit zugehöriger Jordanscher Normalform $M_B(h_A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Man erhält $\chi_A = (x-1)^3(x-2)^2$. Aus

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\mathrm{Eig}\,(A,1) = \mathrm{Span}\,\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1}\} =: W_1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Eig}\,(A,2) = \mathrm{Span}\,\{\underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2}\} =: Z_1\,.$$

Wir berechnen zunächst den Hauptraum zum Eigenwert 1.

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus Dimensionsgründen muß $(A-E)^4 = (A-E)^3$ gelten. Durch Lösen der zugehörigen

Gleichungssysteme erhält man

$$\operatorname{Ker}(A{-}E)^2 = \operatorname{Span}\{x_1, \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}_{x_3}\} =: W_2\ , \qquad \operatorname{Ker}(A{-}E)^3 = \operatorname{Span}\{x_1, x_3, \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}}_{x_4}\} =: W_3\ .$$

Nun berechnen wir den Hauptraum zum Eigenwert 2 (dessen Dimension 2 sein muß).

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 6 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\operatorname{Ker}(A-2E)^2 = \operatorname{Span}\{x_2, \underbrace{\begin{pmatrix} -36\\-8\\-2\\0\\1 \end{pmatrix}}_{x_5}\} =: Z_2$$

Man erkennt, daß die Jordansche Normalform das folgende Aussehen hat:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Nun konstruiert man "von oben nach unten" die Räume U_i, und zwar zunächst ausgehend von den W_i, dann von den Z_i:

$$\begin{array}{rclll}
\operatorname{Hau}(A,1) = W_3 & = & W_2 \oplus U_3 & & U_3 = \operatorname{Span}\{x_4\} \\
W_2 & = & W_1 \oplus U_2 & & U_2 = \operatorname{Span}\{(A-E)x_4\} = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\} \\
W_1 & = & U_1 & & U_1 = \operatorname{Span}\{(A-E)^2x_4\} = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 4\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\}
\end{array}$$

Zur gesuchten Jordanbasis nehmen wir also die Vektoren $(A-E)^2x_4$, $(A-E)x_4$ und x_4. Für die Z_i folgt:

$$\begin{array}{rclll}
\operatorname{Hau}(A,2) = Z_2 & = & Z_1 \oplus U_2 & & U_2 = \operatorname{Span}\{x_5\} \\
Z_1 & = & U_1 & & U_1 = \operatorname{Span}\{(A-2E)x_5\} = \operatorname{Span}\{x_2\}
\end{array}$$

Zur Jordanbasis gehören damit $(A-2E)x_5$ und x_5.
Eine gesuchte Jordanbasis ist also

$$B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -36 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt 0 als einzigen Eigenwert.
Bestimmen Sie mit dieser Information für die Matrix A eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform.

Lösung

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}\, A & = & \text{Span}\{{}^t(1,1,0,0,0,0,0,0), {}^t(0,0,0,1,1,0,0,0), {}^t(0,0,0,0,0,1,1,0)\} \\ & =: & \text{Span}\,\{a_1, a_2, a_3\}. \\ \text{Ker}\, A^2 & = & \text{Span}\{a_1, a_2, a_3, {}^t(-1,0,1,0,0,0,0,0), {}^t(0,0,0,1,0,1,0,0), {}^t(0,0,0,1,0,0,0,1)\} \\ & =: & \text{Span}\{a_1, \ldots, a_6\} \\ \text{Ker}\, A^3 & = & \text{Span}\{a_1, \ldots, a_6, e_1, e_4\} = \mathbb{R}^8 \end{array}$$

Es gibt also genau 3 Jordanblöcke und der größte Jordanblock hat die Größe 3. Damit liegt die Jordansche Normalform fest:

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Setze nun $u_1^{(3)} := e_1$ und $u_2^{(3)} := e_4$. Dann liefern

$$w_1 := A^2 u_1^{(3)}, w_2 := A u_1^{(3)}, w_3 := u_1^{(3)}, w_4 := A^2 u_2^{(3)}, w_5 := A u_2^{(3)}, w_6 := u_2^{(3)}$$

die beiden zyklischen Unterräume der Dimension 3. $a_1, a_2, a_3, Au_1^{(3)}, Au_2^{(3)}$ wird durch $u_1^{(2)} := a_5$ zu einer Basis von $\operatorname{Ker} A^2$. ergänzt. Dann ist $\operatorname{Span}\{u_1^{(2)}, Au_1^{(2)}\}$ der dritte (zweidimensionale) zyklische Unterraum. Mit $w_7 := Au_1^{(2)}$ und $w_8 := u_1^{(2)}$ erhält man mit

$$B = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8)$$

eine gesuchte Jordanbasis. Es ist

$w_1 = (-1, -1, 0, 0, 0, -1, -1, 0)$	$w_2 = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$	$w_3 = e_1$
$w_4 = (0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0)$	$w_5 = (0, 0, 0, -1, -1, -1, -2, -1)$	$w_6 = e_4$
$w_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$	$w_8 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$	

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei V_n der Vektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$ über $\mathbb{R}$, und $\varphi : V_n \longrightarrow V_n$ sei definiert durch $\varphi(p) = p'$. Geben Sie eine Basis B an, so daß $M_B(\varphi)$ Jordansche Normalform hat.

Lösung

Wir betrachten in V_n die Standardbasis $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Es ist $\varphi^n(x^n) = n! \neq 0$ und $\varphi^{n+1}(x^n) = 0$. Damit liefert der Vektor x^n einen zyklischen Unterraum der Dimension $n+1$ von V_n, also V_n selbst.
V_n ist also φ-zyklisch und bezüglich $B^* = (\varphi^n(x^n), \varphi^{n-1}(x^n), \ldots, \varphi(x^n), x^n)$ ist $M_{B^*}(\varphi)$ eine Matrix mit Einträgen nur in der Diagonalen oberhalb der Hauptdiagonalen. Damit ist $B = (1, x, \ldots, \frac{1}{k!}x^k, \ldots, \frac{1}{n!}x^n)$ eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform $M_B(\varphi)$ ist die nilzyklische Matrix N_{n+1}.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 10. Juni 2002

9. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (4, 3 Punkte)
Im projektiven Raum $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ seien die Punkte

$$P_1 = (1 : -1 : 0 : 0)\ ,\ P_2 = (1 : 0 : 1 : 0)\ ,\ P_3 = (1 : 0 : 0 : 1)\ ,\ P_4 = (0 : 0 : -1 : 1)$$

sowie die Hyperebene $H = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ gegeben.
Sei L_{ij} die von P_i und P_j aufgespannte Gerade in $\mathbb{P}$. $(i \neq j)$. Bestimmen Sie:
a) $L_{12} \vee L_{34}$ und $L_{12} \cap L_{34}$ sowie $L_{12} \vee L_{23}$ und $L_{12} \cap L_{23}$.
b) $H \cap L_{ij}$ für alle $i \neq j$.

Lösung
a) Die Gerade L_{12} durch P_1 und P_2 ist gegeben durch $L_{12} = P_1 \vee P_2 := \{P_1\} \vee \{P_2\}$. Wegen $P_1 = \mathbb{R}(1, -1, 0, 0)$ und $P_2 = \mathbb{R}(1, 0, 1, 0)$ gehört zu L_{12} der lineare Raum $\tilde{L}_{12} = \operatorname{Span}\{\,{}^t(1, -1, 0, 0)\,,\ {}^t(1, 0, 1, 0)\}$. Wir beschreiben diese zu projektiven Räumen gehörigen linearen Räume jeweils durch ein homogenes lineares Gleichungssystem. $\tilde{L}_{12}$ ist Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems (im $\mathbb{R}^4$) $x_3 = 0\ ,\ x_0 + x_1 - x_2 = 0$. So erhält man

$$L_{12} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_3 = 0\ ,\ x_0 + x_1 - x_2 = 0\}\ .$$

Entsprechend folgt zunächst

$$L_{34} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_1 = 0\ ,\ -x_0 + x_2 + x_3 = 0\}\ ,$$

$$L_{23} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_1 = 0\ ,\ x_0 - x_2 - x_3 = 0\}\ .$$

Zu $L_{12} \vee L_{34}$ gehört der lineare Raum $\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{34}$, zu $L_{12} \cap L_{34}$ gehört der lineare Raum $\tilde{L}_{12} \cap \tilde{L}_{34}$. Man erhält

$$\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{34} = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \tilde{U}\ .$$

Also gilt $L_{12} \vee L_{34} = U = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
Die Dimensionsformel liefert $\dim L_{12} \cap L_{34} = 0$. Man berechnet $L_{12} \cap L_{34} = \{P_2\}$.
Entsprechend folgt:

$$\tilde{L}_{12} + \tilde{L}_{23} = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$L_{12} \vee L_{23} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \quad , \quad L_{12} \cap L_{23} = \{P_2\}$$

b) Man erhält sofort:
$H \cap L_{12} = P_1$, denn $P_1 \in H$, $P_2 \notin H$.

$H \cap L_{13} = P_1$, denn $P_1 \in H$, $P_3 \notin H$.
$H \cap L_{14} = L_{14}$, denn $P_1 \in H$ und $P_4 \in H$.
$H \cap L_{24} = H \cap L_{34} = P_4$. Begründung wie bei den ersten beiden Durchschnitten.
Zu $H \cap L_{23}$ gehört der lineare Raum $\tilde{H} \cap \tilde{L}_{23}$. Dies ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\ ,\ x_1 = 0\ ,\ x_0 - x_2 - x_3 = 0\ .$$

Man berechnet $\tilde{H} \cap \tilde{L}_{23} = \mathrm{Span}\,\{\,{}^t(0, 0, -1, 1)\}$. Also ist $H \cap L_{23}$ ein Punkt, dessen homogene Koordinaten $(0 : 0 : -1 : 1)$ lauten.
Man beachte: Nach der Dimensionsformel ist $H \cap L_{ij} = \emptyset$ nicht möglich.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es seien $P_1 = (i : 0 : 1)$, $P_2 = (0 : i-1 : 2i)$, $P_3 = (\alpha : 1 : -i) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $U = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ein eindimensionaler projektiver Unterraum von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ist, und beschreiben Sie U in der üblichen Form, d.h. bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $U = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\,;\, ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$.

Lösung
Gesucht ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass für $U = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ gilt: $\dim U = 2$. Da $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ 2i \end{pmatrix}$ in U linear unabhängig sind, ist $\dim U \geq 2$. Also reicht es , $\alpha \in \mathbb{C}$ so zu bestimmen, dass $\det \begin{pmatrix} i & 0 & \alpha \\ 0 & i-1 & 1 \\ 1 & 2i & -i \end{pmatrix} = 0$ gilt.

$$\begin{vmatrix} i & 0 & \alpha \\ 0 & i-1 & 1 \\ 1 & 2i & -i \end{vmatrix} = i - 1 - \alpha(i-1) + 2 = 0 \iff \alpha = \frac{i+1}{i-1} = -i\ .$$

Für die beschreibende Gleichung $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ ergibt sich wegen $P_k \in U$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ai & & & + & c & = & 0 \\ & & (i-1)b & + & 2ic & = & 0 \\ -ai & + & b & - & ic & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i-1 & 2i \\ -i & 1 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i-1 & 2i \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $c = 1$ folgt $b = i - 1$ und $a = i$. Also gilt:

$$U = \{(x_0 : x_1 : x_2)\,;\, ix_0 + (i-1)x_1 + x_2 = 0\}$$

Aufgabe 3 (2, 3, 2 Punkte)
Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = p$, und es sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(K^3)$. Zeigen Sie:
a) $\mathbb{P}$ besitzt genau $p^2 + p + 1$ Punkte.
b) $\mathbb{P}$ enthält genau $p^2 + p + 1$ Geraden.
c) Auf jeder Geraden in $\mathbb{P}$ liegen genau $p + 1$ Punkte.

Lösung

a) Zu zeigen ist: Es gibt genau p^2+p+1 Unterräume der Dimension 1 von K^3.
K^3 besitzt p^3-1 Elemente $\neq 0$. Sei $x \neq 0$. Dann hat Kx genau p Elemente, also genau $p-1$ Elemente $\neq 0$. Es folgt:
$K^3 \setminus \{0\}$ zerfällt in genau $(p^3-1):(p-1) = p^2+p+1$ disjunkte Klassen, die jeweils mit dem Nullvektor genau alle eindimensionalen Unterräume vom K^3 ergeben.

b) Zu zeigen ist: Es gibt genau p^2+p+1 Unterräume der Dimension 2 von K^3. Dazu zeigen wir allgemeiner:
Es gibt genau $u(p,m,n) = \dfrac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p-1)}$ verschiedene Untervektorräume der Dimension m vom K^n ($|K| = p$).
Aus dieser Formel folgt $u(p,2,3) = p^2+p+1$ (und natürlich auch $u(p,1,3) = p^2+p+1$, also a)).
Im Beweis der Zusatzaufgabe, Übungsblatt 9, Lineare Algebra I, wurde gezeigt, daß es

$$\frac{1}{m!}b(m) = \frac{1}{m!}(p^n-1)(p^n-p)\cdot\ldots\cdot(p^n-p^{m-1})$$

m-elementige linear unabhängige Teilmengen im K^n gibt.
Je $\dfrac{1}{m!}(p^m-1)(p^m-p)\cdot\ldots\cdot(p^m-p^{m-1})$ solcher Teilmengen erzeugen den gleichen m-dimensionalen Unterraum. Daher gilt

$$u(p,m,n) = \frac{(p^n-1)(p^n-p)\cdot\ldots\cdot(p^n-p^{m-1})}{(p^m-1)(p^m-p)\cdot\ldots\cdot(p^m-p^{m-1})} = \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdot\ldots\cdot(p-1)}\ .$$

c) Es sei L eine Gerade in $\mathbb{P} = \mathbb{P}(K^3)$. Dann ist $\tilde{L}$ ein Unterraum der Dimension 2 vom K^3. Sei a, b eine Basis von $\tilde{L}$.

$$\tilde{L} = \{\alpha a + \beta b\ ;\ \alpha, \beta \in K\} \quad \Longrightarrow \quad |\tilde{L}| = p^2$$

$\tilde{L}$ enthält daher p^2-1 Elemente $\neq 0$. Wie unter a) folgt, daß $\tilde{L}$ genau $(p^2-1):(p-1) = p+1$ eindimensionale Unterräume besitzt.
Bemerkung: Man nennt $\mathbb{P}(K^3)$ eine projektive Ebene der **Ordnung** p.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Jede Projektivität von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Lösung
f sei eine Projektivität von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{R})$ sei der zugehörige Automorphismus mit $f = \overline{\varphi}$. Dann ist das charakteristische Polynom χ_φ ein Polynom vom Grade 3 aus $\mathbb{R}[x]$. Es besitzt mindestens eine Nullstelle $\lambda \neq 0$. ($\lambda = 0$ kann keine Nullstelle von χ_φ sein, da φ ein Automorphismus ist!) φ besitzt also einen Eigenvektor $x \neq 0$ zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$. $P = \mathbb{R}x$ ist dann ein Fixpunkt für f, denn

$$f(P) = f(\mathbb{R}x) = \mathbb{R}\,\varphi(x) = \mathbb{R}\,(\lambda x) = \mathbb{R}x\ ,\ \text{da } \lambda \neq 0\ .$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 17. Juni 2002

10. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungskizzen

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ seien die Punkte

$$P_0 = (1:2:0) \quad , \quad P_1 = (0:-1:2) \quad , \quad P_2 = (0:0:1) \quad , \quad E = (1:0:1)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, E) ein projektives Koordinatensystem in $\mathbb{P}$ ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von $Q_1 = (1:2:3)$ und $Q_2 = (0:1:1)$ bezüglich dieses Koordinatensystems. Bestimmen Sie ferner die Koordinaten eines allgemeinen Punktes $Q = (x_0 : x_1 : x_2)$ bezüglich dieses Koordinatensystems.

Lösung

Man prüft zunächst nach, daß je drei der angegebenen Punkte P_0, P_1, P_2 und E linear unabhängig sind. Damit ist (P_0, P_1, P_2, E) ein projektives Koordinatensystem in $\mathbb{P}$.
Zur Bestimmung von homogenen Koordinaten bezüglich dieses Koordinatensystems wird zunächst E als Linearkombination der P_i dargestellt. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir wählen also zu (P_0, P_1, P_2, E) die Basis $B = (v_0, v_1, v_2)$ mit

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Dann ist $E = (1:0:1) = \mathbb{R}(v_0 + v_1 + v_2)$. Nun folgt für

$$\begin{array}{lcl} Q_1 = \mathbb{R}(1,2,3) & : & q_B(1,2,3) = (1,0,-1) \\ Q_2 = \mathbb{R}(0,1,1) & : & q_B(0,1,1) = (0,-\frac{1}{2},-1) \, , \end{array}$$

also gilt $Q_1 = (1:0:-1)$ und $Q_2 = (0:-\frac{1}{2}:-1) = (0:1:2)$ bezüglich des angegebenen Koordinatensystems.
Um die homogenen Koordinaten von $Q = (x_0 : x_1 : x_2)$ bezüglich des Koordinatensystems (P_0, P_1, P_2, E) zu bestimmen, müssen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gesucht werden mit

$$\alpha(1,2,0) + \beta(0,-2,4) + \gamma(0,0,-3) = (x_0, x_1, x_2) .$$

In Matrizenschreibweise lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 - \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{4}{3}x_0 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \end{pmatrix}.$$

$Q = (x_0 : x_1 : x_2)$ hat also die homogenen Koordinaten

$$(x_0 : \frac{1}{2}(2x_0 - x_1) : \frac{1}{3}(4x_0 - 2x_1 - x_2))$$

bezüglich des projektiven Koordinatensystems (P_0, P_1, P_2, E).

Aufgabe 2 (4, 4 Punkte)

Es sei $\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (t_0 : t_1) & \longmapsto & (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3) \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass φ wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie: $\operatorname{Im} \varphi = \{(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \; ; \; \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \leq 1\}$.

Lösung

a) φ ist wohldefiniert, da für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda t_0 : \lambda t_1) &= ((\lambda t_0)^3 : (\lambda t_0)^2(\lambda t_1) : (\lambda t_0(\lambda t_1)^2 : (\lambda t_1)^3) = (\lambda^3 t_0^3 : \lambda^3 t_0^2 t_1 : \lambda^3 t_0 t_1^2 : \lambda^3 t_1^3) \\ &= (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3) \; . \end{aligned}$$

b) Sei zunächst $(0 : y_1 : y_2 : y_3) \in \operatorname{Im} \varphi$. Dann ist $t_0^3 = 0$, also $t_0 = 0$. Damit ist auch $y_1 = y_2 = 0$, die angegebene Matrix lautet $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix}$, ihr Rang ist damit ≤ 1.
Sei nun $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in \operatorname{Im} \varphi$ mit $y_0 \neq 0$. Dann ist auch $t_0 \neq 0$ und man erhält:

$$(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) = (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3) = (1 : \frac{t_1}{t_0} : (\frac{t_1}{t_0})^2 : (\frac{t_1}{t_0})^3) \; .$$

Jeder Bildpunkt dieser Art hat also das Aussehen $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) = (1 : a : a^2 : a^3)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Man sieht direkt $\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \leq 1$, denn die zweite Zeile der Matrix ist ein Vielfaches der ersten Zeile.
Ist nun $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \leq 1$ gegeben, so folgt $(y_1, y_2, y_3) = \lambda(y_0, y_1, y_2)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Für $y_0 = 0$ folgt $y_1 = y_2 = 0$, also $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) = (0 : 0 : 0 : y_3) = \varphi(0 : \sqrt[3]{y_3})$.
Für $y_0 \neq 0$ folgt $y_1 = \lambda y_0$, $y_2 = \lambda y_1 = \lambda^2 y_0$ und $y_3 = \lambda y_2 = \lambda^3 y_0$, also

$$(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) = (y_0 : \lambda y_0 : \lambda^2 y_0 : \lambda^3 y_0) = (1, \lambda : \lambda^2 : \lambda^3) = \varphi(1 : \lambda) \; .$$

Aufgabe 3 (2, 3, 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Affinität $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f_a(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f_a(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f_a(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix}, \; f_a(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $f_a(x) = Ax + b$.

c) Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Projektivität $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit $f|_{\mathbb{R}^3} = f_a$ und berechnen Sie $f(2 : 1 : -1 : 2)$.

Lösung

a) f_a ist eine Affinität, falls es einen Automorphismus g von $\mathbb{R}^3$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^3$ gibt, mit $f_a(v) = g(v) + t$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Daraus folgt $f_a(0) = g(0) + t = t$. Für t erhält man damit $t = {}^t(-1, 1, 2)$. Zu zeigen bleibt also: Durch

$$\begin{array}{lcccl}
g({}^t(1,2,-1)) & = & f_a({}^t(1,2,-1)) - t = {}^t(-2,4,-1) - {}^t(-1,1,2) & = & {}^t(-1,3,-3) \\
g({}^t(3,2,0)) & = & \ldots\ldots & = & {}^t(7,15,-5) \\
g({}^t(1,1,1)) & = & \ldots\ldots & = & {}^t(4,2,-2)
\end{array}$$

ist genau ein Automorphismus von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Da $B_1 = ({}^t(1,2,-1)\ ,\ {}^t(3,2,0)\ ,\ {}^t(1,1,1))$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist (nachrechnen!) gibt es genau eine lineare Abbildung mit den angegebenen Bildern. Da auch $B_2 = ({}^t(-1,3,-3)\ ,\ {}^t(7,15,-5)\ ,\ {}^t(4,2,-2))$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, ist diese Abbildung bijektiv, also ein Automorphismus.

b) Aus a) folgt $b = t = {}^t(-1, 1, 2)$. Ist E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, so ist $A = M_E(g)$ gesucht, und bekannt ist

$$M_{B_1,E}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 3 & 15 & 2 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
A &= M_E(g) = M_{B_1,E}(g) \cdot M_{E,B_1}(id) = M_{B_1,E}(g) \cdot (M_{B_1,E}(id))^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 3 & 15 & 2 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Zu f gehört nach Vorlesung die Matrix

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $f(2 : 1 : -1 : 2) = (1 : 3 : 4 : 2)$, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $Q = \{x = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ q(x) = 0\}$ eine Quadrik in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie: $\operatorname{Sing}(Q) = \{(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n\}$

Lösung

Es sei q durch die Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben, also $q(x) = \sum\limits_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu$. Für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt dann

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} a_{\nu i} x_\nu + \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq i}}^{n} a_{i\mu} x_\mu + 2a_{ii} x_i = \sum_{l=0}^{n} 2a_{il} x_l \ ,$$

da A symmetrisch ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sing}(Q) &= \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ 2Ax = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ 2a_{i0}x_0 + 2a_{i1}x_1 + \ldots + 2a_{in}x_n = 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n\} \\
&= \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \ ; \ \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 24. Juni 2002

11. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3, 2, 1 Punkte)

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ seien die folgenden drei Quadriken gegeben:

$Q_1 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ x_0^2 + 5x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_0x_1 - 6x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0\}$

$Q_2 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0\}$

$Q_3 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ 5x_0^2 + 8x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_0x_1 + 8x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0\}$.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalformen.

b) Untersuchen Sie, welche der Quadriken (projektiv) äquivalent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mit $\varphi(Q_i) = Q_j$.

c) Berechnen Sie $\mathrm{Sing}\,(Q_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Lösung:

a) Zu den Quadriken Q_i gehören die folgenden Matrizen A_i:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}\ ,\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Wir bringen die Matrizen nach dem üblichen Verfahren auf Normalform:

$$A_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{=:{}^tS_1}$$

$$A_2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{7}} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} & -2\sqrt{\frac{2}{7}} \end{array}\right)$$

$$A_3 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36}{5} & -\frac{18}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{6}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Die Normalformen lauten:

$$\begin{aligned} Q_1' &= \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\} = Q_2' \\ Q_3' &= \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ x_0^2 + x_1^2 = 0\} \end{aligned}$$

Bei Q_2 gilt nämlich

$$Q_2 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2)\ ;\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0\}\ ,$$

und der Rechnungsbeginn mit $-A_2$ liefert die Endmatrix

$$-A_2 \quad \rightsquigarrow \quad \ldots \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{7}} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} & -2\sqrt{\frac{2}{7}} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{=:\,{}^tS_2} .$$

b) Nur Q_1 und Q_2 sind projektiv äquivalent. Die Rechnung unter a) liefert $B = {}^tS_1A_1S_1 = {}^tS_2(-A_2)S_2$. Es folgt $A_1 = ({}^tS_1)^{-1}\,{}^tS_2(-A_2)S_2S_1^{-1}$. Mit $S = S_2S_1^{-1}$ folgt ${}^tS = ({}^tS_1)^{-1}\,{}^tS_2$, also $A_1 = {}^tS(-A_2)S$. Eine gesuchte Projektivität φ mit $\varphi(Q_1) = Q_2$ ist damit durch S gegeben, denn

$$\begin{aligned} x \in Q_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \in Q_2 \Longleftrightarrow {}^t(Sx)(-A_2)Sx = 0 \Longleftrightarrow {}^t(Sx)A_2Sx = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad {}^tx\,{}^tSA_2Sx = 0 \Longleftrightarrow {}^txA_1x = 0\ . \end{aligned}$$

Berechnung von S:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S = S_2S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{7}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{7}} & 2\sqrt{\frac{2}{7}} \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} & -3\sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{10} \\ 1 & 2 - 2\sqrt{\frac{2}{7}} & -3 + 4\sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

c) Wegen $\operatorname{Rang} A_1 = \operatorname{Rang} A_2 = 3$ folgt $\operatorname{Sing}(Q_1) = \operatorname{Sing}(Q_2) = \emptyset$. Es bleibt das Gleichungssystem $A_3x = 0$ zu lösen. Wir benutzen die Rechung in a) und erhalten damit

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem $A_3x = 0$ hat also die Lösungsmenge $L = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right.$. Also gilt $\operatorname{Sing}(Q_3) = \{(-2 : 1 : 2)\}$.

Aufgabe 2 (1, 3, 1 Punkte)

Eine Abbildung φ sei gegeben durch $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ ((t_0 : t_1), (u_0 : u_1)) & \longmapsto & (t_0u_0 : t_0u_1 : t_1u_0 : t_1u_1) \end{array} \right.$.

Zeigen Sie:

a) φ ist wohldefiniert.

b) $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ist eine Quadrik Q.

c) Q ist äquivalent zu $Q' = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})\ ;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

Lösung:

a) φ ist wohldefiniert, da für $\alpha, \beta \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi((\alpha t_0 : \alpha t_1), (\beta u_0 : \beta u_1)) &= \alpha\beta t_0u_0 : \alpha\beta t_0u_1 : \alpha\beta t_1u_0 : \alpha\beta t_1u_1) \\ &= (t_0u_0 : t_0u_1 : t_1u_0 : t_1u_1) \end{aligned}$$

b) Behauptung: $\operatorname{Im}\varphi = \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})\ ;\ x_0x_3 - x_1x_2 = 0\} =: Q$.
Sei $x \in \operatorname{Im}\varphi$. Dann hat x das Aussehen $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (t_0u_0 : t_0u_1 : t_1u_0 : t_1u_1)$ und dafür gilt $x_0x_3 - x_1x_2 = t_0u_0t_1u_1 - t_0u_1t_1u_0 = 0$, also ist $x \in Q$.
Sei nun $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in Q$.
1. Fall: $x_0 = 0$.
Es folgt $x_1x_2 = 0$. Ist $x_1 = 0$, so setze $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $u_0 = x_2$, $u_1 = x_3$. Es ist $(u_0 : u_1) \in P^1(\mathbb{C})$, da $(x_2, x_3) \neq (0,0)$ sein muß (sonst ist $x = 0 \notin \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$). Ferner gilt $\varphi((t_0 : t_1), (u_0 : u_1)) = (0 : 0 : x_2 : x_3) = x$, also $x \in \operatorname{Im}\varphi$.
Ist $x_2 = 0$, so setze $u_0 = 0, u_1 = 1, t_0 = x_1, t_1 = x_3$. Es ist $(x_1 : x_3) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, da sonst $(0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Ferner gilt $\varphi((t_0 : t_1), (u_0 : u_1)) = (0 : x_1 : 0 : x_3) = x$, also $x \in \operatorname{Im}\varphi$.
2. Fall: $x_0 \neq 0$.
Für $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in Q$ gilt dann $x = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \frac{x_3}{x_0})$ und $\frac{x_3}{x_0} = \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0}$. Es folgt

$$\varphi((1 : \frac{x_2}{x_0}), (1 : \frac{x_1}{x_0})) = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \frac{x_3}{x_0}) = x\ .$$

c) Zu der in b) definierten Quadrik Q gehört die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Da diese Matrix den Rang 4 besitzt, ist $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ nach Satz 13.6 der Vorlesung äquivalent zu

$$Q' = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})\ ;\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}\ .$$

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Klassifizieren Sie die folgenden affinen Quadriken als affine Teile projektiver Quadriken durch Berechnung von d, u, d^*, u^* und Angabe der Normalform gemäß Satz 14.1 der Vorlesung.

$Q_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 6x_2 + 1 = 0\}$
$Q_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1x_2 - 4x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$
$Q_3 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0\}$
$Q_4 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0\}$

Lösung:
Zu Q_1 gehört die projektive Quadrik

$$Q_1^{'} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \; ; \; x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_0x_1 - 6x_0x_2 + x_0^2 = 0\}$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix und die in A unten rechts stehende $2 \times 2-$Matrix bringen wir wie üblich auf Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $\quad d = -1 \; , \; u = 0 \; , \; d^* = -1 \; , \; u^* = -1.$
Normalform: $\quad x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \quad$ (Typ 2) $\qquad$ **Ellipse**.
Bei Q_2 geht man entsprechend vor:
$d = -1 \; , u = 0 \; , d^* = -1 \; , u^* = 0$, Normalform: $\quad x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 \quad$ (Typ 3) $\qquad$ **Hyperbel**.
Bei Q_3 wiederum entsprechende Rechnung, oder man "sieht":

$$3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0 \iff 3(x_1 - \frac{2}{3})(x_2 + \frac{4}{3}) = 0 \; .$$

Daher liegen **zwei sich schneidende Geraden** vor, und aus der Tabelle folgt:
$d = 0, \; u = 1 \; , \; d^* = -1 \; , \; u^* = 0$, Normalform: $\quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad$ (Typ 1)
Bei Q_4 Vorgehen wie bei Q_1:
$d = -1 \; , \; u = 0 \; , \; d^* = u^* = 0$, Normalform: $\quad x_1^2 = x_0x_2 \quad$ (Typ 4) $\qquad$ **Parabel**.

Aufgabe 4 $\qquad$ (je 3 Punkte)
Wie Aufgabe 3 für die folgenden Quadriken:
$Q_5 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0\}$
$Q_6 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 10x_1 - 20x_2 + 20x_3 + 21 = 0\}$

Lösung
Q_5:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$d = -1 \; , \; u = 1 \; , \; d^* = -1 \; , \; u^* = 0$, Normalform: $\quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 \quad$ (Typ 2)
einschaliges Hyperboloid.
Rechnung bei Q_6 wie bei Q_5 führt auf:
$d = 0 \; , \; u = d^* = u^* = 1$, Normalform: $\quad x_1^2 = x_0x_2 \quad$ (Typ 4) $\qquad$ **parabolischer Zylinder**.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 1. Juli 2002

12. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3, 3 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die affine Quadrik

$$Q = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 - 23 = 0\}$$

eine Hyperbel darstellt, und geben Sie den Schnittpunkt ihrer Asymptoten (den Mittelpunkt) in x_1, x_2-Koordinaten an.

b) Zeigen Sie, daß die affine Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \frac{15}{4}x_1^2 + \frac{13}{4}x_2^2 + 5x_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_1x_2 + (9 - 12\sqrt{3})x_1 - (12 + 9\sqrt{3})x_2 - 30x_3 + 93 = 0\}$$

ein Ellipsoid darstellt, und geben Sie dessen Mittelpunkt an.

Lösung:

a) Wir beginnen hier nicht mit der Typisierung, sondern berechnen zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} x - 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & x + 2 \end{vmatrix} = (x - \frac{5}{2})(x + \frac{5}{2})$$

Zu $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ist $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor.

Zu $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ist $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor.

Mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ folgt als Gleichung der Quadrik:

$$\frac{5}{2}y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{15}{\sqrt{10}}y_1 - \frac{5}{\sqrt{10}}y_2 - 23 = 0 \iff (y_1 - \frac{3}{\sqrt{10}})^2 - (y_2 - \frac{1}{\sqrt{10}})^2 = 10$$

Mit $z_1 = y_1 - \frac{3}{\sqrt{10}}$ und $z_2 = y_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}$ folgt $z_1^2 - z_2^2 = 10$. Also liegt eine Hyperbel vor.
Mit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $z_1 = z_2 = 0$ folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$. Dies ist der Mittelpunkt der Hyperbel im x_1, x_2-System.

b) Wir gehen entsprechend a) vor:

$$\begin{vmatrix} x-\frac{15}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & x-\frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = (x-5)((x-\frac{15}{4})(x-\frac{13}{4})-\frac{3}{16}) = (x-5)(x-3)(x-4)\ .$$

Man erhält die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$. Normierte Eigenvektoren zu den λ_i sind die folgenden Vektoren v_i:

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ überführt die gegebene Quadrik in die Quadrik mit der Gleichung

$$4(y_1^2 - 6y_1) + 3(y_2^2 - 6y_2) + 5(y_3^2 - 6y_3) + 93 = 0\ .$$

Mittels quadratischer Ergänzung und der Transformation $z_1 = y_1 - 3$, $z_2 = y_2 - 3$, $z_3 = y_3 - 3$ wird daraus die Gleichung

$$4z_1^2 + 3z_2^2 + 5z_3^2 - 15 = 0 \iff \frac{z_1^2}{3,75} + \frac{z_2^2}{5} + \frac{z_3^2}{3} = 1\ .$$

Dies ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a = \sqrt{3,75}$, $b = \sqrt{5}$ und $c = \sqrt{3}$. Im y_1, y_2, y_3-System liegt der Mittelpunkt im Punkt ${}^t(3,3,3)$, im x_1, x_2, x_3-System ergibt er sich aus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

zu

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0$ die allgemeine Gleichung 2. Grades. Ferner sei $D := \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix}$. Zeigen Sie:

Gilt $\begin{vmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{vmatrix} \neq 0$, und besitzt die obige Gleichung mindestens eine Lösung, so beschreibt die affine Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0\}$$

eine Ellipse, falls $D > 0$ gilt.
eine Parabel, falls $D = 0$ gilt.
eine Hyperbel, falls $D < 0$ gilt.

Lösung:

Geht man zur projektiven Quadrik

$$\overline{Q} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \ ; \ ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2 = 0\}$$

über, so gehört dazu die Matrix $A = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$. Wegen $\det A \neq 0$ folgt $\operatorname{Rang} A = 3$, d. h. es ist $d = 2 - 3 = -1$. Aus Satz 14.1 ergibt sich, daß die möglichen Normalformen lauten:

(1)	Typ 2:	$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$	für $x_0 = 1$: Ellipse
(2)	Tpy 3:	$-x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	für $x_0 = 1$: leere Menge
(3)	Typ 3:	$x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	für $x_0 = 1$: Hyperbel
(4)	Typ 4:	$x_1^2 = x_0x_2$	für $x_0 = 1$: Parabel

(2) scheidet davon nach Voraussetzung aus, da Q nicht leer sein soll.

Wir betrachten nun die Matrix $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Es ist $D = \det A'$. A' läßt sich mittels einer orthogonalen Matrix auf $A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ transformieren, wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A' sind. Es ist $\det A' = \det A^* = \lambda_1\lambda_2$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} \det A' > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \, , \ \lambda_2 \text{ haben gleiches Vorzeichen (und sind } \neq 0). \\ &\Longrightarrow \quad u^* = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

Nach der Tabelle des Satzes 14.1 ist die Normalform damit durch (1) gegeben, d.h. Q beschreibt eine Ellipse.

$$\begin{aligned} \det A' < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \, , \ \lambda_2 \text{ haben unterschiedliches Vorzeichen.} \\ &\Longrightarrow \quad u^* = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Nach der Tabelle aus Satz 14.1 liegt (3) vor, d.h. Q beschreibt eine Hyperbel.

$$\begin{aligned} \det A' = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Rang} A' = 1 \qquad (\operatorname{Rang} A' = 0 \text{ ist unmöglich, da sonst } \det A = 0). \\ &\Longrightarrow \quad d^* = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Nach der Tabelle aus Satz 14.1 liegt (4) vor, d.h. Q beschreibt eine Parabel.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

U, V und W seien $K-$Vektorräume und $\operatorname{Bil}(U, V; W) := \{F : U \times V \longrightarrow W \ ; \ F \text{ bilinear}\}$. $\operatorname{Bil}(U, V; W)$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum über K.

Zeigen Sie: $\operatorname{Bil}(U, V; W) \cong \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \cong \operatorname{Hom}(V, \operatorname{Hom}(U, W))$.

Lösung:

Wir zeigen zunächst $\operatorname{Bil}(U, V; W) \cong \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W))$.
Dazu definieren wir eine Abbildung $\Phi : \operatorname{Bil}(U, V; W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W))$ wie folgt:
Ist $\varphi \in \operatorname{Bil}(U, V; W)$, so sei $\Phi(\varphi) \in \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W))$ diejenige Abbildung mit

$$\Phi(\varphi)(u) \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

definiert durch $(\Phi(\varphi)(u))(v) = \varphi(u, v)$.
$\Phi(\varphi)(u) \in \operatorname{Hom}(V, W)$ folgt sofort aus der Linearität von φ im zweiten Argument.

$\Phi(\varphi)\in\mathrm{Hom}\,(U,\mathrm{Hom}\,(V,W))$ folgt aus der Linearität von φ im ersten Argument. Dies rechnen wir einmal nach:
$\Phi(\varphi)(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)$ ist diejenige Abbildung mit

$$\begin{aligned}(\Phi(\varphi)(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2))(v) &= \varphi(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,v)\\ &= \alpha_1\varphi(u_1,v)+\alpha_2\varphi(u_2,v)\\ &= (\alpha_1\Phi(\varphi)(u_1))(v)+(\alpha_2\Phi(\varphi)(u_2))(v)\\ &= (\alpha_1\Phi(\varphi)(u_1)+\alpha_2\Phi(\varphi)(u_2))(v)\end{aligned}$$

Ferner ist Φ linear, denn

$$\begin{aligned}(\Phi(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(u))(v) &= (\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(u,v)\\ &= \alpha_1\varphi_1(u,v)+\alpha_2\varphi_2(u,v)\\ &= \alpha_1(\Phi(\varphi_1)(u))(v)+\alpha_2(\Phi(\varphi_2)(u))(v)\\ &= ((\alpha_1\Phi(\varphi_1)+\alpha_2\Phi(\varphi_2))(u))(v)\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß Φ bijektiv ist. Dazu sei

$$\Psi\ :\ \mathrm{Hom}\,(U;\ \mathrm{Hom}\,(V,W))\longrightarrow \mathrm{Bil}\,(U,V;W)$$

wie folgt definiert:
Ist $\varphi\in\mathrm{Hom}\,(U;\mathrm{Hom}\,(V,W))$, so ist $\varphi(u)\in\mathrm{Hom}\,(V,W)$, also eine lineare Abbildung von V nach W. Wir setzen

$$\Psi(\varphi)(u,v)=(\varphi(u))(v)\ .$$

Ψ ist bilinear, denn

$$\begin{aligned}\Psi(\varphi)(\alpha u_1+\beta u_2,v) &= (\varphi(\alpha u_1+\beta u_2))(v)\\ &= (\alpha\varphi(u_1)+\beta\varphi(u_2))(v)\\ &= \alpha\varphi(u_1)(v)+\beta\varphi(u_2)(v)\\ &= \alpha\Psi(\varphi)(u_1,v)+\beta\Psi(\varphi)(u_2,v)\\ \Psi(\varphi)(u,\alpha v_1+\beta v_2) &= (\varphi(u))(\alpha v_1+\beta v_2)\\ &= \alpha\varphi(u)(v_1)+\beta\varphi(u)(v_2)\\ &= \alpha\Psi(\varphi)(u,v_1)+\beta\Psi(\varphi)(u,v_2)\end{aligned}$$

Nach der Definition von Φ und Ψ gilt:

$$\Phi\circ\Psi=id_{\mathrm{Hom}\,(U,\mathrm{Hom}\,(V,W))}\qquad\text{und}\qquad \Psi\circ\Phi=id_{\mathrm{Bil}\,(U,V;W)}\ .$$

Also ist Φ bijektiv.
Als nächstes zeigen wir: $\mathrm{Bil}\,(U,V;W)\cong\mathrm{Bil}\,(V,U;W)$.
Dies folgt, da $\Theta\ :\mathrm{Bil}\,(U,V;W)\longrightarrow\mathrm{Bil}\,(V,U;W)$, wobei $\Theta(\varphi)$ durch $(\Theta(\varphi))(v,u)=\varphi(u,v)$ definiert ist, offenbar ein Isomorphismus ist. Mit dem zuerst Gezeigten ergibt sich

$$\mathrm{Bil}\,(U,V;W)\cong\ \mathrm{Bil}\,(V,U;W)\cong\ \mathrm{Hom}\,(V,\ \mathrm{Hom}\,(U,W))\ ,$$

also auch

$$\mathrm{Bil}\,(U,V;W)\cong\ \mathrm{Hom}\,(U,\ \mathrm{Hom}\,(V,W))\cong\ \mathrm{Hom}\,(V,\ \mathrm{Hom}\,(U,W))\ .$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien U und V Vektorräume über K, ferner seien $u \in U$ und $v \in V$ mit $u \otimes v \neq 0$ in $U \otimes V$ gegeben.
Zeigen Sie:
$u \otimes v = u' \otimes v' \iff$ es gibt $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $u' = \lambda u$ und $v' = \lambda^{-1} v$.
Lösung:
"$\Longleftarrow$"

$$\begin{aligned} u' \otimes v' &= (\lambda u) \otimes (\lambda^{-1} v) = \lambda\lambda^{-1}(u \otimes v) \quad \text{da } \otimes \text{ bilinear} \\ &= u \otimes v \end{aligned}$$

"$\Longrightarrow$"
Es sei $u \otimes v = u' \otimes v'$. Annahme: u und u' sind linear unabhängig.
Dann sind auch u und $-u'$ linear unabhängig, und es folgt:

$$u \otimes v + (-u') \otimes v' = 0 \ .$$

Aus Lemma 15.4 folgt nun $v = v' = 0$, also $u \otimes v = u \otimes 0 = 0$, ein Widerspruch.
Also gibt es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $u' = \lambda u$. ($\lambda \neq 0$ muß gelten, da sonst $u' \otimes v' = 0 \otimes v' = 0$ gelten würde.)
Entsprechend folgt, daß es ein $\mu \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $v' = \mu v$. Das liefert

$$u' \otimes v' = (\lambda u) \otimes (\mu v) = (\lambda\mu)(u \otimes v) = u \otimes v \ ,$$

also $\lambda\mu = 1$, d. h. $\mu = \lambda^{-1}$.