Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 7. Februar 2002

1. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 8./9.4.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (2, 2, 3 Punkte)

Der Vektorraum $V = C[-1,1]$ sei mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ versehen.

a) Es seien $f_1, f_2 \in V$ definiert durch $f_1(t) = |t| - 1$ und $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$.
Berechnen Sie den Abstand von f_1 und f_2.

b) Können Sie Funktionen $0 \neq h \in V$ angeben, die zu f_1 und f_2 orthogonal sind?

c) Es sei $U := \{f \in V\,;\, f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\,\}$.
(U ist ein Teilraum von V, der Raum der geraden Funktionen; kein Beweis nötig.)
Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V.

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)

a) Es sei $U = \text{Span}\,\{(0,1,0,i), (i,0,1,0), (0,i,i,0)\}$ und $\langle x, y\rangle = {}^t\overline{x} \cdot y$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie orthonormale Basen von U und von $U^\perp$.

b) Es sei P_3 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade ≤ 3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von P_3 (bezüglich $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$).

Aufgabe 3 (2, 4 Punkte)

a) Es sei $A \in SO(3)$ und F sei diejenige orthogonale Abbildung mit $A = M_E(F)$, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Nach Satz 9.21 gibt es dann eine Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$ mit $M_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$, wobei $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie: $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\,\text{Spur}\,(A) - 1)\,.$

b) Bezüglich der Standardbasis E werde $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellt durch

$$M_E(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis B an, so daß $M_B(F)$ die Gestalt aus Satz 9.21 besitzt.
Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung F im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (3, 3 Punkte)

Eine quadratische Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichung (Q).
Bringen Sie Q durch orthogonalen Koordinatenwechsel auf die Gestalt

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + c = 0.$$

Geben Sie eine geometrische Deutung der Hyperfläche an.

a) (Q) $\quad x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 9$

b) (Q) $\quad 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 = 6$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 8. April 2002

2. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 15./16.4.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3, 3 Punkte)

a) Im $\mathbb{R}^2$ sei F die Spiegelung an der durch $y = ax$ gegebenen Geraden. Bestimmen Sie die Matrix A mit $F = h_A$.

b) Zeigen Sie, dass der durch $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ gegebene Endomorphismus $F = h_A$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung ist, die mit der x-Achse den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Es sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Der Endomorphismus $F : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $F(p) := p'$.
Bestimmen Sie die zu F adjungierte Abbildung F^{adj}.
Ist F selbstadjungiert?

Aufgabe 4 (4, 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie jeweils Index und Signatur der Form $\langle\ ,\ \rangle_A$, wobei

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob es eine reelle invertierbare Matrix W gibt mit $A = {}^tWBW$, und bestimmen Sie gegebenenfalls solch eine Matrix W.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 15. April 2002

3. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 22./23.4.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (1, 2, 3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

c) $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ und $\chi_A = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ sei das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie:
A ist genau dann positiv definit, wenn für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt: $(-1)^{n-j} a_j > 0$.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)

Bestimmen Sie für $f, g \in K[x]$ ein normiertes Polynom p mit $\langle p \rangle = \langle f, g \rangle$.
a) $K = \mathbb{R}$, $f = x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2$, $g = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 2$
b) $K = \mathbb{F}_2$, $f = x^6 + x^5 + x^3 + x^2$, $g = x^4 + x^2 + 1$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Zeigen Sie:
Ein Körper K ist genau dann endlich, wenn jede Abbildung $f : K \longrightarrow K$ eine Polynomabbildung ist.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 22. April 2002

4. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 29./30.4.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass A idempotent ist, berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume von A und beschreiben Sie den Homomorphismus f mit $f = h_A$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Dann sind für $A \in \mathrm{Mat}\,(n, K)$ äquivalent:

(i) $A^2 = E$

(ii) $\dfrac{1}{2}(E - A)$ ist idempotent.

(iii) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ± 1.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)

Es sei $N \in \mathrm{Mat}(n, K)$ nilpotent. Zeigen Sie:

a) Ist $N \neq 0$, so ist N nicht diagonalisierbar über K.

b) Ist $\mu \in K$ beliebig und $N \neq 0$, so ist auch $\mu E + N$ nicht diagonalisierbar über K.

Aufgabe 4 (4, 3 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$.

a) Es sei $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass AB und BA das gleiche charakteristische Polynom haben.

b) Zeigen Sie, dass $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ generell gilt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 29. April 2002

5. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 6./7.5.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von A:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ idempotent

Aufgabe 2 (3, 2, 2 Punkte)
Es sei $P = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[x]$ mit $n \geq 1$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:
a) $P = \chi_A$. **b)** $P = \mu_A$
c) Ist λ Eigenwert von A, so ist ${}^t(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$ Eigenvektor von A zu λ.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ und für das Minimalpolynom μ_A gelte: Ist P ein Teiler von μ_A, so ist $\deg(P) = 0$ oder $\deg(P) = n$.
Zeigen Sie, dass dann $K[A]$, versehen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen, ein Körper ist.

Aufgabe 4 (je 3 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils eine Spektralzerlegung für die Matrizen $A_i \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 6. Mai 2002

6. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 13./14.5.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (je 2 Punkte)

Geben Sie möglichst einfache Matrizen an, die die Eigenwerte 1 und 2 besitzen und für die
a) algebraische und geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich sind.
b) algebraische und geometrische Vielfachheit von 1 übereinstimmen, von 2 aber nicht.
c) algebraische und geometrische Vielfachheit bei beiden Eigenwerten verschieden sind.
Bitte schreiben Sie nicht nur die Matrizen auf, sondern begründen Sie, warum Sie die von Ihnen angegebenen Matrizen gewählt haben.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei λ ein Eigenwert von $A \in$Mat(n, K) und $P \in K[x]$. Zeigen Sie, dass dann $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(A)$ ist.

Aufgabe 3 (4, 2 Punkte)

a) Zeigen Sie:
Ist $A \in$Mat(n, K) diagonalisierbar über K, so ist Rang(A) =Rang(A^k) für alle $k \geq 1$.
b) Gilt in a) auch die Umkehrung?

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in$Mat$(3, \mathbb{R})$ die Jordan-Chevalley-Zerlegung $A = H + N$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 13. Mai 2002

7. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 27./28.5.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ gleichzeitig diagonalisierbar sind und geben Sie eine Matrix $W \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ an, so dass $W^{-1}AW$ und $W^{-1}BW$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -1 & 8 \\ -4 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -10 \\ 6 & 7 & 3 & -9 \\ -2 & -5 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4, 2 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U sei eine Untergruppe von G. Auf G ist eine Relation $\sim$ durch

$$a \sim b \iff a \circ b^{-1} \in U$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.

b) Beschreiben Sie für $G = S_3$ (die symmetrische Gruppe) und für $U = A_3$ die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)

a) Es sei $V = \mathbb{R}^5$ und $U = \mathrm{Span}\,\{e_1 + e_2, e_1 - e_4\}$. Bestimmen Sie eine Basis von V/U und schreiben Sie für a mit ${}^t a = (5, -2, -3, -5, 1)$ den Vektor $a + U \in V/U$ als Linearkombination dieser Basis.

b) V sei $K-$Vektorraum, U sei Untervektorraum von V. Zeigen Sie:
Sind $a_1 + U, \ldots, a_n + U$ linear unabhängig, so sind auch die Repräsentanten $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 4 (4, 2 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $U(h_A, a_1)$, $U(h_A, a_2)$ und das kleinste $l \in \mathbb{N}$ mit $A^l = 0$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}\, A^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 27. Mai 2002

8. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 3./4.6.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3, 2 Punkte)

a) Es sei $\chi_A(x) = (x-2)^6(x+1)^4$ und $\mu_A(x) = (x-2)^4(x+1)^2$. Welche möglichen Jordanschen Normalformen kann $A \in \mathrm{Mat}(10, \mathbb{R})$ besitzen?
Welche Möglichkeiten verbleiben für die Jordansche Normalform, wenn zusätzlich $\dim \mathrm{Eig}(A, 2) = \dim \mathrm{Eig}(A, -1) = 2$ gilt?

b) Charakterisieren Sie die Ähnlichkeitsklassen der zerfallenden $(3, 3)$-Matrizen über K.

Aufgabe 2 (2, 3, 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform sowie eine Jordanbasis zur Matrix A.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt 0 als einzigen Eigenwert.
Bestimmen Sie mit dieser Information für die Matrix A eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei V_n der Vektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$ über $\mathbb{R}$, und $\varphi : V_n \longrightarrow V_n$ sei definiert durch $\varphi(p) = p'$. Geben Sie eine Basis B an, so daß $M_B(\varphi)$ Jordansche Normalform hat.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 3. Juni 2002

9. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 10./11.6.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (4, 3 Punkte)
Im projektiven Raum $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ seien die Punkte

$$P_1 = (1 : -1 : 0 : 0)\ ,\ P_2 = (1 : 0 : 1 : 0)\ ,\ P_3 = (1 : 0 : 0 : 1)\ ,\ P_4 = (0 : 0 : -1 : 1)$$

sowie die Hyperebene $H = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)\ ;\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ gegeben.
Sei L_{ij} die von P_i und P_j aufgespannte Gerade in $\mathbb{P}$. ($i \neq j$). Bestimmen Sie:

a) $L_{12} \vee L_{34}$ und $L_{12} \cap L_{34}$ sowie $L_{12} \vee L_{23}$ und $L_{12} \cap L_{23}$.

b) $H \cap L_{ij}$ für alle $i \neq j$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es seien $P_1 = (i : 0 : 1)$, $P_2 = (0 : i - 1 : 2i)$, $P_3 = (\alpha : 1 : -i) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $U = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ein eindimensionaler projektiver Unterraum von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ist, und beschreiben Sie U in der üblichen Form, d.h. bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $U = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\,;\, ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$.

Aufgabe 3 (2, 3, 2 Punkte)
Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = p$, und es sei $\mathbb{P} = \mathbb{P}(K^3)$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{P}$ besitzt genau $p^2 + p + 1$ Punkte.

b) $\mathbb{P}$ enthält genau $p^2 + p + 1$ Geraden.

c) Auf jeder Geraden in $\mathbb{P}$ liegen genau $p + 1$ Punkte.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Jede Projektivität von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 10. Juni 2002

10. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 17./18.6.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ seien die Punkte

$$P_0 = (1:2:0) \quad , \quad P_1 = (0:-1:2) \quad , \quad P_2 = (0:0:1) \quad , \quad E = (1:0:1)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, E) ein projektives Koordinatensystem in $\mathbb{P}$ ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von $Q_1 = (1:2:3)$ und $Q_2 = (0:1:1)$ bezüglich dieses Koordinatensystems. Bestimmen Sie ferner die Koordinaten eines allgemeinen Punktes $Q = (x_0 : x_1 : x_2)$ bezüglich dieses Koordinatensystems.

Aufgabe 2 (4, 4 Punkte)

Es sei $\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (t_0 : t_1) & \longmapsto & (t_0^3 : t_0^2 t_1 : t_0 t_1^2 : t_1^3) \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass φ wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie: $\operatorname{Im}\varphi = \{(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \; ; \; \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \leq 1\}$.

Aufgabe 3 (2, 3, 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Affinität $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f_a(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , f_a(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} , f_a(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ -3 \end{pmatrix} , f_a(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $f_a(x) = Ax + b$.

c) Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Projektivität $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit $f|_{\mathbb{R}^3} = f_a$ und berechnen Sie $f(2:1:-1:2)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $Q = \{x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \; ; \; q(x) = 0\}$ eine Quadrik in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie: $\operatorname{Sing}(Q) = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n\}$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 17. Juni 2002

11. Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 24./25.6.2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3, 2, 1 Punkte)

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ seien die folgenden drei Quadriken gegeben:
$Q_1 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2) \; ; \; x_0^2 + 5x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_0x_1 - 6x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0\}$
$Q_2 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2) \; ; \; -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0\}$
$Q_3 = \{x = (x_0 : x_1 : x_2) \; ; \; 5x_0^2 + 8x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_0x_1 + 8x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0\}$.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalformen bzgl. projektiver Äquivalenz.

b) Untersuchen Sie, welche der Quadriken (projektiv) äquivalent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mit $\varphi(Q_i) = Q_j$.

c) Berechnen Sie $\operatorname{Sing}(Q_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 (1, 3, 1 Punkte)

Eine Abbildung φ sei gegeben durch $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ ((t_0 : t_1), (u_0 : u_1)) & \longmapsto & (t_0u_0 : t_0u_1 : t_1u_0 : t_1u_1) \end{array} \right.$.

Zeigen Sie:

a) φ ist wohldefiniert.

b) $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ist eine Quadrik Q.

c) Q ist äquivalent zu $Q' = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \; ; \; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Klassifizieren Sie die folgenden affinen Quadriken als affine Teile projektiver Quadriken durch Berechnung von d, u, d^*, u^* und Angabe der Normalform gemäß Satz 14.1 der Vorlesung.
$Q_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 6x_2 + 1 = 0\}$
$Q_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1x_2 - 4x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$
$Q_3 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0\}$
$Q_4 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0\}$

Aufgabe 4 (je 3 Punkte)

Wie Aufgabe 3 für die folgenden Quadriken:
$Q_5 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0\}$
$Q_6 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 10x_1 - 20x_2 + 20x_3 + 21 = 0\}$

Hinweis: Die Klausur zur Linearen Algebra 2 findet am
Do 11.7.02 von 16.30 - 19.00 Uhr im Audi Max statt.
Teilnahmevoraussetzung: Mindestens 100 Punkte in den Hausübungen.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 24. Juni 2002

12. (und letztes) Übungsblatt: **Lineare Algebra II**

Abgabe: 1./2. 7. 2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3, 3 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die affine Quadrik

$$Q = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 - 23 = 0\}$$

eine Hyperbel darstellt, und geben Sie den Schnittpunkt ihrer Asymptoten (den Mittelpunkt) in x_1, x_2-Koordinaten an.

b) Zeigen Sie, daß die affine Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{15}{4}x_1^2 + \frac{13}{4}x_2^2 + 5x_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x_1x_2 + (9-12\sqrt{3})x_1 - (12+9\sqrt{3})x_2 - 30x_3 + 93 = 0\}$$

ein Ellipsoid darstellt, und geben Sie dessen Mittelpunkt an.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0$ die allgemeine Gleichung 2. Grades. Ferner sei $D := \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix}$. Zeigen Sie:

Gilt $\begin{vmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{vmatrix} \neq 0$, und besitzt die obige Gleichung mindestens eine Lösung, so beschreibt die affine Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0\}$$

eine Ellipse, falls $D > 0$ gilt.
eine Parabel, falls $D = 0$ gilt.
eine Hyperbel, falls $D < 0$ gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

U, V und W seien $K-$Vektorräume und $\mathrm{Bil}\,(U, V; W) := \{F : U \times V \longrightarrow W \; ; \; F \text{ bilinear}\}$. $\mathrm{Bil}\,(U, V; W)$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum über K.

Zeigen Sie: $\mathrm{Bil}\,(U, V; W) \cong \mathrm{Hom}\,(U, \mathrm{Hom}\,(V, W)) \cong \mathrm{Hom}\,(V, \mathrm{Hom}\,(U, W))$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien U und V Vektorräume über K, ferner seien $u \in U$ und $v \in V$ mit $u \otimes v \neq 0$ in $U \otimes V$ gegeben.
Zeigen Sie:
$u \otimes v = u' \otimes v' \iff$ es gibt $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $u' = \lambda u$ und $v' = \lambda^{-1} v$.