INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

30. Januar 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beweis durch vollständige Induktion:

Für $n = 1$ ist $p\,(X) = X + a_0$ und $A = (-a_0) \in M_1(K)$, also $\chi_A(X) = X + a_0 = p\,(X)$.

Die Behauptung gelte für jedes normierte Polynom vom Grad n, p habe den Grad $n+1$, also $p(X) = X^{n+1} + a_nX^n + \ldots + a_0$.

Entwickelt man $|XE - A(p)|$ nach der ersten Spalte, so erhält man:

$$|XE - A(p)| = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & X & -1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & X + a_n \end{vmatrix} + (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \star & \ddots & 0 \\ & & & -1 \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante ist gerade $|XE - A(q)|$ für das normierte Polynom $q\,(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i+1}X^i$. Nach Induktionsvorraussetzung ist $|XE - A(q)| = q\,(X)$.

Also gilt
$$\begin{aligned} |XE - A(p)| &= Xq(X) + (-1)^n(-1)^n a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}X^{i+1} + a_0 = \sum_{i=0}^{n+1} a_iX^i = p\,(X)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) $$<u \times v,\, w> \;=\; < \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3\,,\; w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 >$$
$$= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \det(uvw)\,.$$

(b) $\|u \times v\|^2 = < u \times v, u \times v > = \ldots = \|u\|^2\|v\|^2 - < u, v >^2$, Ausrechnen!.

(c) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - < u, v >^2$, nach (b) und $< u, v >= \|u\| \cdot \|v\| \cos \sphericalangle(u, v)$, nach Vorl.,
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 \sphericalangle(u,v) = \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2 \sphericalangle(u,v)) \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2 \sphericalangle(u,v) \\ \Longrightarrow \quad \|u \times v\| &= \|u\|\|v\| \sin \sphericalangle(u,v)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) $A \in M_n(\mathbb{C})$, setze $B := \frac{1}{2}(A + \overline{A}^t)$ und $C := \frac{1}{2i}(A - \overline{A}^t)$. Dann gilt $A = B + iC$ und (nach kurzer Rechnung) $\overline{B}^t = B$, $\overline{C}^t = C$, also sind B, C hermitesch.

(b) Man erhält:
$$B = \frac{1}{2}(A + \overline{A}^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 2+i \\ 1+2i & 1 & 2+3i \\ 2-i & 2+3i & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \frac{1}{2i}(A - \overline{A}^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & -1 & 2-i \\ 1+2i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(a) $\mathrm{d}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \sqrt{< f_1 - f_2\,,\, f_1 - f_2 >} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f_1 - f_2)^2\, dt} = \ldots = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$.

(b) Sei $U \;=\; \{f \in V \mid f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in [-1, 1]\ \}$ und
$U^{\perp} \;=\; \{g \in V \mid <g, f> = 0 \text{ für alle } f \in U\ \}$.

Beh.: $U^{\perp} = W := \{f \in V \mid f(t) = -f(-t) \text{ für alle } t \in [-1, 1]\ \}$, Unterraum der ungeraden Funktionen.

(i) Ist $g \in W$ ungerade und $f \in U$ gerade, dann ist $g \cdot f$ ungerade und
$\int_{-1}^{1} g(t)f(t)\, dt = <g, f> = 0$, d.h. $g \in U^{\perp}$, also $W \subseteq U^{\perp}$.

(ii) Bekanntlich läßt sich jede Funktion $h \in V$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen.
Sei $h \in U^{\perp}$ etwa $h = f + g \in$ mit $f \in U$ gerade und $g \in W$ ungerade. Dann gilt
$<h, f> = 0 \iff <f + g, f> = 0 \iff <f, f> + <g, f> = 0 \iff < f, f > = 0$

$$\iff \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt = 0 \Longrightarrow f \equiv 0, \text{ da } f \text{ stetig ist.}$$

Also ist $h = g \in W$ d.h. $U^{\perp} \subseteq W$ und folglich $W = U^{\perp}$.

Aufgabe 5*

(a) Durch Berechnung der entsprechenden Integrale erhält man:

$$M = \begin{pmatrix} <1,1> & <1,X> & <1,X^2> & <1,X^3> \\ <X,1> & <X,X> & <X,X^2> & <X,X^3> \\ <X^2,1> & <X^2,X> & <X^2,X^2> & <X^2,X^3> \\ <X^3,1> & <X^3,X> & <X^3,X^2> & <X^3,X^3> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(b) $<2X^2 + X\,,\, X^3 - X^2 + X + 1> = \;(0, 1, 2, 0)M(1, 1, -1, 1)^t = \ldots = \underline{\underline{\frac{113}{60}}}$.

(c) Eine Orthonormalbasis C des Unterraums $< 1, X, X^2 >$ ist (nach mühsamer Rechnung)
$C = \{1, \sqrt{3}\,(2X - 1), \sqrt{5}\,(6X^2 - 6X + 1)\}$.

(d) Der Koordinatenvektor $\varphi_C(X + 1) = \frac{1}{6}(9, \sqrt{3}\,, 0)^t$.

(e) Der Abstand $\mathrm{d}(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_{0}^{1} (t^2 - t^3)^2\, dt} = \ldots = \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{105}}}$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

7./8. April 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 6

(a) $M_i M_i^\top = \ldots = E \Longrightarrow M_i \in \mathcal{O}(3)$.
Da $\det M_1 = \det M_4 = -1$ und $\det M_2 = \det M_3 = 1$, gilt $M_2, M_3 \in \mathcal{SO}(3)$.

(b) $\text{Spek}\,(M_1) = \text{Spek}\,(M_2) = \{1, -1\}$, $\text{Spek}\,(M_3) = \{1, \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}\}$, $\text{Spek}\,(M_4) = \{-1, \mathrm{e}^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\}$ (*Hinweis*!).

(i) $\dim \text{Eig}\,(M_1, -1) = 1$ und $a_1 = (4, 1, 1)^\top$.
$\dim \text{Eig}\,(M_1, 1) = 2$ und $a_2 = (1, -2, -2)^\top$, $a_3 = (0, 1, -1)^\top$.

$$B_1 := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha = 0}.$$

F_1 ist die Spiegelung an der Ebene $4x + y + z = 0$.

(ii) $\dim \text{Eig}\,(M_2, 1) = 1$ und $a_1 = (1, 3, -1)^\top$.
$\dim \text{Eig}\,(M_2, -1) = 2$ und $a_2 = (3, -1, 0)^\top$, $a_3 = (-1, -3, -10)^\top$.

$$B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha = \pi}.$$

F_2 ist die Spiegelung an der Geraden $< a_1 >$.

(iii) $M_3(1, 1, 1)^\top = (1, 1, 1)^\top$. Also $(1, 1, 1)^\top \in \text{Eig}\,(M_3, 1)$.

$$B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1 & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}.$$

F_3 ist die Drehung um die Gerade $< a_1 >$ um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(iv) $M_4(1, 1, 1)^\top = -(1, 1, 1)^\top$. Also $(1, 1, 1)^\top \in \text{Eig}\,(M_4, -1)$.

$$B_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1 & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{B_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha = \frac{2\pi}{3}}.$$

F_4 ist die Drehung um die Gerade $< a_1 >$ um den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ mit Spiegelung an der Ebene $x + y + z = 0$.

Aufgabe 7

(a) $$\chi_M(X) = |XE - M| = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$

Man sieht: $\text{Spek}_{\mathbb{C}}(M) = \{1, -1, i, -i\}$ bzw. $\text{Spek}_{\mathbb{R}}(M) = \{1, -1\}$.

(b) $M\overline{M}^\top = \ldots = E$, also M unitär. LGS lösen ergibt eine ON–Basis aus Eigenvektoren:

$$B := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix} \text{ mit } M_B(F_{\mathbb{C}}) = B^{-1}MB = \ldots = \text{diag}\,(1, -1, i, -i).$$

(c) $MM^\top = \ldots = E$, also M orthogonal. LGS lösen ergibt eine ON–Basis aus Eigenvektoren:

$$C := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ mit } M_C(F_{\mathbb{R}}) = C^{-1}MC = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \underline{\alpha = \frac{\pi}{2}}.$$

Aufgabe 8

(a) $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 = 36 \iff (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 36 \iff: \ x^\top Mx = 36.$

$\chi_M(X) = X^2 - 25X,\ \lambda_1 = 0,\ a_1 = (4, -3)^\top,\ \lambda_2 = 25,\ a_2 = (3, 4)^\top,$

$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ONB aus Eigenvektoren (Hauptachsen).

Die Substitution $x = Ay$ führt auf $25y_2^2 = 100$, also $y_2 = \pm 2$, das sind zwei parallele Geraden: $x_2 = -\frac{3}{4}x_1 \pm \frac{3}{2}$.

(b) $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 = 36$

$$\iff (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 36 \iff: \ x^\top Mx = 36.$$

$\chi_M(X) = (X - 9)^2,\ \lambda_1 = 0,\ a_1 = (2, -1, 2)^\top,\ \lambda_{2,3} = 9,\ a_2 = (2, 2, -1)^\top,\ a_3 = (-1, 2, 2)^\top,$

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ONB aus Eigenvektoren (Hauptachsen).

Die Substitution $x = Ay$ führt auf $y_2^2 + y_3^2 = 4$, das ist ein Kreiszylinder vom Radius 2 mit Achse $< a_1 >$.

Aufgabe 9

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist hermitesch und folglich alle EW reell und A unitär diagonalisierbar.

$\chi_A(X) = \ldots = X^3 - X$, $\mathrm{Spek}\,(A) = \{0, 1, -1\}$.

LGS lösen (mit den EW $0, 1, -1$) ergibt eine ONB aus Eigenvektoren (Spalten von S):

$S := \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. S ist unitär! mit $\overline{S}^\top AS = \ \mathrm{diag}\,(0, 1, -1)$.

Aufgabe 10*

(a) $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $B = A\overline{A}^\top \Longrightarrow \overline{B}^\top = \overline{A\overline{A}^\top}^\top = (\overline{A}A^\top)^\top = A\overline{A}^\top = B$, also B hermitesch.

(b) Ist A invertierbar und $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top \neq 0$, so ist auch $w := A^\top v \neq 0$ und da das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{C}^n$ positiv definit ist

$s_B(v, v) = v^\top B\overline{v} = v^\top A\overline{A}^\top\overline{v} = (A^\top v)^\top\overline{(A^\top v)} = w^\top\overline{w} > 0.$

s_B ist also positiv definit.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

14./15. April 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 11

(a) $x^2 + 4y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$,
Ellipse mit Mittelpunkt $M = (0,0)$ und Halbachsen $a = 2$, $b = 1$.

(b) $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0 \iff (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$,
Kreis mit Mittelpunkt $M = (-2,1)$ und Radius $r = 3$.

(c) $9x^2 - 54x + 4y^2 + 16y + 61 = 0 \iff \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$,
Ellipse mit Mittelpunkt $M = (3,-2)$ und Halbachsen $a = 2$, $b = 3$.

(d) $9y^2 - 4x^2 + 16x + 54y + 29 = 0 \iff -\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$,
nach oben/unten geöffnete Hyperbel mit $M = (2,-3)$ und Halbachsen $a = 3$, $b = 2$.

(e) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 54y - 101 = 0 \iff \frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$,
nach links/rechts geöffnete Hyperbel mit $M = (2,-3)$ und Halbachsen $a = 3$, $b = 2$.

(f) $x^2 = 4(x+y) \iff (x-2)^2 = 4(y+1)$, nach oben geöffnete Parabel
mit Scheitelpunkt $S = (2,-1)$, Halbparameter $p = 2$ und Nullstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

(g) $y^2 - 2x^2 - xy = 0 \iff (y-2x)(y+x) = 0$,
zwei sich schneidende Geraden: $y = 2x$ und $y = -x$.

(h) $y^2 + 9x^2 - 6xy + y - 3x = 0 \iff (y-3x)(y-3x+1) = 0$,
zwei parallele Geraden: $y = 3x$ und $y = 3x - 1$.

(i) $x^2 + y^2 = 2(x+y-1) \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$, Punkt $(1,1)$.

Aufgabe 12

(a) $\chi_s(X) = \ldots = (X-2)(X+1)X$, also $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0,\ k = l = \dim W_0 = 1$,
Radikal $W_0 =< (0,1,1)^\top >$.

(b) $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3) \Longrightarrow M_{\tilde{B}}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $B = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_B(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbb{R}^3 =< b_1 > \oplus < b_3 > \oplus < b_2 >=< b_1 + b_3 > \oplus < b_3 > \oplus < -b_2 + 2b_3 >$ (zum Beispiel).

Aufgabe 13

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{O}(n) &\Longrightarrow \text{die Zeilen (und die Spalten) von } A=(a_{ij}) \text{ bilden eine ON–Basis des } \mathbb{R}^n,\\
&\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \text{ für } i=1,\dots,n,\\
&\Longrightarrow a_{ii}^2 \le 1 \text{ also } |a_{ii}| \le 1 \text{ für } i=1,\dots,n,\\
&\Longrightarrow |\operatorname{Spur} A| = |a_{11}+\ldots+a_{nn}| \le |a_{11}|+\ldots+|a_{nn}| \le n.
\end{aligned}
$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $|a_{11}+\ldots+a_{nn}| = n$.
Wegen $|a_{ii}| \le 1$ folgt daraus $a_{11}=\ldots=a_{nn}=1$ oder $a_{11}=\ldots=a_{nn}=-1$.
Das Gleichheitszeichen gilt also genau für $A=E$ oder $A=-E$.

Aufgabe 14*

(a) $\chi_s(X) = \ldots = (X^2-2X-4)X$, also $\lambda_1 = 1+\sqrt{5}\,,\ \lambda_2 = 1-\sqrt{5}\,,\ \lambda_3 = 0,\ k=l=\dim W_0 = 1,$
Radikal $W_0 = <(0,1,0)^\top>$.

(b) Eigenwerte (paarweise verschieden): Eigenvektoren (paarweise orthogonal):

$\lambda_1 = 1+\sqrt{5}$ $(2i,0,1-\sqrt{5}\,)^\top,\ \|(2i,0,1-\sqrt{5}\,)^\top\| = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$\lambda_2 = 1-\sqrt{5}$ $(2i,0,1+\sqrt{5}\,)^\top,\ \|(2i,0,1+\sqrt{5}\,)^\top\| = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$\lambda_3 = 0$ $(0,1,0)^\top$

Normieren liefert: $S = (s_1,s_2,s_3) = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2i}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(3)$

und $\overline{S}^\top AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $\mathbb{C}^3 = <s_1> \oplus <s_3> \oplus <s_2>$.
s_1,s_2,s_3 sind paarweise orthogonal
bezüglich s, weil $\overline{S}^\top AS = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, und
bezüglich des Standardskalarprodukts, weil $\overline{S}^\top ES = \overline{S}^\top S = E$ gilt.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

22. April 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 15

(a) $x^t D_\alpha x = \ldots = (x_1^2 + x_2^2)\cos\alpha$, also D_α positiv definit genau für $\cos\alpha > 0$, d.h. $\alpha \in [0, \pi/2)$.

(b) S_α ist symmetrisch mit $\det S_\alpha = -1$ (Spiegelung), also S_α nicht positiv definit.

(c) A hermitesch, $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$, also alle EW positiv, d.h. A positiv definit.
Oder: Alle Hauptminoren sind positiv: $|A_1| = 2,\ |A_2| = 4,\ |A_3| = 6$, d.h. A positiv definit.

(d) A_n ist symmetrisch. Durch vollständige Induktion zeigt man: $\det A_n = n+1$.
Also sind alle Hauptminoren positiv, d.h. A_n positiv definit.

Aufgabe 16

(a) Ist $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $A \in M_n(K)$ hermitesch (symmetrisch) und positiv semidefinit, so ist $A = \overline{S}^t D S$ mit $S \in \mathcal{O}(n)$, also $\overline{S}^t S = E$ und $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$.
Dann gilt: $A = \overline{S}^t D S = \overline{S}^t D^2 S = (S^{-1} D S)^2 = M^2$ mit $M = S^{-1} D S \in M_n(K)$.

(b) A ist hermitesch und positiv definit (Aufgabe 15 c). $S = (s_1, s_2, s_3) := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
ist ON–Basis aus Eigenvektoren: $S = \overline{S}^t = S^{-1}$ und für $W := \operatorname{diag}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ gilt

$$(S^{-1} W S)^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & -i(1-\sqrt{3}) \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ i(1-\sqrt{3}) & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^2 = \ldots = A.$$

Aufgabe 17

(a) s ist symmetrisch, da $s(A,B) := \operatorname{Spur}(A^t B) = \operatorname{Spur}(A^t B)^t = \operatorname{Spur}(B^t A) = s(B,A)$.
s ist bilinear, das s symmetrisch ist
und $s(x_1 A_1 + x_2 A_2, B) = \operatorname{Spur}((x_1 A_1 + x_2 A_2)^t B) = \ldots = x_1 s(A_1, B) + x_2 s(A_2, B)$.
s ist positiv definit, da $s(A,A) = \operatorname{Spur}(A^t, A) = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2\Big) \geq 0$.

(b) $\{E_{ij} \mid i,j = 1, \ldots, n\}$ ist eine ON–Basis von V, da $s(E_{ij}, E_{ij}) = \operatorname{Spur}(E_{ij}^t E_{ij}) = \operatorname{Spur}(E_{jj}) = 1$ und für $(i,j) \neq (k,l)$ folgt $s(E_{ij}, E_{kl}) = \operatorname{Spur}(E_{ij}^t E_{kl}) = \operatorname{Spur}(0) = 0$.

(c) (1) $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ ist eine Basis für U.

(2) $\dim U = 3$, $\dim U^\perp = 1$ und $E_{12} - E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U^\perp$, also $U^\perp = < \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} >$.
z.B. gilt $s(E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}) = \operatorname{Spur}(-E_{11} + E_{22}) = 0$.

(3) $s(E_{12} \pm E_{21}, E_{12} \pm E_{21}) = \operatorname{Spur}(E_{11} + E_{22}) = 2$. Also ist
$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ ON–Basis für U und $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ ON–Basis für $U^\perp$.

Aufgabe 18

(a) Haben $A, B \in M_n(K)$, $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben Anzahlen k bzw. l positiver und negativer Eigenwerte, so folgt aus dem Trägheitssatz von Sylvester:
Es gibt $S_1, S_2 \in \mathrm{GL}(K)$ mit $S_1^t A S_1 = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{l}, 0, \ldots, 0) = S_2^t B S_2$.

Für $S := S_1 S_2^{-1} \in \mathrm{GL}(K)$ gilt $S^t A S = (S_1 S_2^{-1})^t A (S_1 S_2^{-1}) = B$.

(b) Man berechnet $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -2\sqrt{5} & 7 \\ 0 & \sqrt{5} & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

und für $S = S_1 S_2^{-1} = \ldots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2-5\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 4-4\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ gilt $S^t A S = B$.

Aufgabe 19*

Sei $(V, <,>)$ ein unitärer Raum, $a_1, \ldots, a_l$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren und $v \in V$:

$$\begin{aligned}
0 &\le \| v - \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > a_k \|^2 \\
&= < v - \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > a_k \,,\, v - \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > a_k > \\
&= < v, v > - \sum_{k=1}^{l} < a_k, v >< v, a_k > - \sum_{k=1}^{l} \overline{< a_k, v >} < a_k, v > \\
&\qquad + < \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > a_k \,,\, \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > a_k > \\
&= < v, v > - \sum_{k=1}^{l} < a_k, v > \overline{< a_k, v >} - \sum_{k=1}^{l} \overline{< a_k, v >} < a_k, v > \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{l} \overline{< a_k, v >} < a_k, v > \qquad \text{a_k sind paarweise orth. Einheitsvektoren, also } < a_k, a_l >= \delta_{kl}. \\
&= < v, v > - \sum_{k=1}^{l} \overline{< a_k, v >} < a_k, v > \qquad (\text{da } < a_k, v > \overline{< a_k, v >} = \overline{< a_k, v >} < a_k, v >) \\
&= \| v \|^2 - \sum_{k=1}^{l} | < a_k, v > |^2 \qquad (\text{da } < \overline{z} z = |z|^2 \text{ für } z \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Also gilt $\sum_{k=1}^{l} | < a_k, v > |^2 \le \| v \|^2$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

28./29. April 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 20

(a) $\operatorname{ggT}(372, 237) = \ldots = 3 = \ldots = \underline{-7} \cdot 372 + \underline{11} \cdot 237.$

(b) $\operatorname{ggT}(2X^5 + X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 1\,,\, X^4 + X^3 + X - 1) = \ldots = 2X^2 + 2X - 2$ und
$2X^2 + 2X - 2 = \ldots = \underline{\tfrac{1}{2}(X+1)}(2X^5 + X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 1) + \underline{2(X-1)}(X^4 + X^3 + X - 1).$

Aufgabe 21

(a)
$$\begin{aligned} X^6 - 2X^4 - X^2 + 2 &= (X-1)(X+1)(X^2-2)(X^2+1) && \text{in } \mathbb{Q}[X],\\ &= (X-1)(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+1) && \text{in } \mathbb{R}[X],\\ &= (X-1)(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-i)(X+i) && \text{in } \mathbb{C}[X],\\ &= (X+1)(X+2)(X+3)(X+4)(X^2+3) && \text{in } \mathbb{Z}_5[X]. \end{aligned}$$

(b) Ein Polynom zweiten oder dritten Grades ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle im Körper hat. Ein reduzibles Polynom vierten Grades ohne Nullstelle ist Quadrat irreduzibler Polynome zweiten Grades. Man erhält also:

Grad	irreduzible Polynome
1	X, $X+1$,
2	X^2+X+1 (einziges irreduzibles Polynom zweiten Grades!),
3	X^3+X^2+1, X^3+X+1,
4	X^4+X^3+1, X^4+X^2+1, X^4+X+1, $X^4+X^3+X^2+X+1$.
	Es gilt $X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)^2$.

(c) (1) Faktorisierung:
$$\begin{aligned} X^5+X^4+1 &= (X^2+X+1)(X^3+X+1),\\ X^5+X+1 &= (X^2+X+1)(X^3+X^2+1), \text{ also } \operatorname{ggT} = X^2+X+1. \end{aligned}$$

(2) Euklidischer Algorithmus:
$$\begin{aligned} X^5+X^4+1 &= (X^5+X+1) + (X^4+X)\\ X^5+X+1 &= X(X^4+X) + (X^2+X+1)\\ X^4+X &= (X^2+X)(X^2+X+1) + 0 \end{aligned}$$

also $\operatorname{ggT} = X^2+X+1$ (letzter von 0 verschiedener Rest),
und $\operatorname{ggT} = X^2+X+1 = \ldots = X(X^5+X^4+1) + (X+1)(X^5+X+1)$ (Rückwärtseinsetzen).

Aufgabe 22

(a) $s \in R \setminus \{0\} \implies s \cdot 1 = s \implies \rho(s) = \rho(s\cdot 1) \geq \rho(1)$, also $\rho(1) = \min\{\rho(s) \mid s \in R\setminus\{0\}\}$.

(b) $r \in R^\times$, etwa $rs = 1 \implies \rho(1) = \rho(rs) \geq \rho(r) \implies \rho(r) = \rho(1)$, wegen (a).
$r \in R\setminus\{0\}$, $\rho(r) = \rho(1)$, $1 = qr + b$ mit $\rho(b) < \rho(r) = \rho(1) \implies b = 0$, also $1 = qr$, d.h. $r \in R^*$.

Aufgabe 23

(a) $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$, $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g \Longrightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$.
Annahme $q_1 \neq q_2$. Es folgt $\deg g > \deg(r_2 - r_1) = \deg g + \deg(q_1 - q_2) \geq \deg g$ Widerspruch.
Also gilt $q_1 = q_2$ und folglich auch $r_1 = r_2$.
Die Polynome q und r sind bei der Division mit Rest also eindeutig bestimmt.

(b) Seien $p, q, h \in K[X]$ mit $pf + qg = h$.
Da $\operatorname{ggT}(f,g)$ ein Teiler von f und von g ist, ist $\operatorname{ggT}(f,g)$ ein Teiler von h.
Ist $\operatorname{ggT}(f,g) = sf + tg$ ein Teiler von h, etwa $r \cdot \operatorname{ggT}(f,g) = h$, dann gilt $pf + q = h$ für $p := rs$, $q := rt \in K[X]$.

(c) $\operatorname{ggT}(f,g) = \ldots = X^2 - X + 1 = \ldots = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}(x+1)g$ und $h = \ldots = (X^2 - X + 1)(2X^2 - X + 3)$, also $(2X^2 - X + 3)(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}(x+1)g) = (X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{2})f + (-X^3 - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - 3)g$.

Aufgabe 24*

Annahme: Es gibt $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ mit $x^n - 2 = f(X)g(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \cdot \sum_{j=0}^{s} b_j X^j$, mit $r, s > 0$ und $r + s = n$.

Dann folgt $a_0 b_0 = -2$ und es gelte etwa $2 \mid a_0$ und $2 \nmid b_0$.
Nicht alle Koeffizienten a_i sind durch 2 teilbar, da sonst alle Koeffizienten von $X^n - 2$ durch 2 teilbar wären. Sei a_k, $0 < k \leq r < n$ der erste Koeffizient, der nicht durch 2 teilbar ist.
Dann gilt fürden Koeffizienten 0 von X^k: $0 = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k$. 2 teilt alle Summanden außer $a_k b_0$, die Summe und damit 0 ist also ungerade. Widerspruch. Also ist $X^n - 2$ in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel. (Daraus folgt übrigens auch die Irreduzibilität im Quotientenkörper $\mathbb{Q}$.)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

5./6. Mai 2003

Lineare Algebra 2
Lösungshinweise zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 25

Annahme: $(2, X)$ sei ein Hauptideal, etwa $(2, X) = (f)$ mit $f \in \mathbb{Z}[X]$.
Aus $2 \in (f)$ folgt $f = \pm 2$, da $(f) \neq \mathbb{Z}[X]$, also $f \neq \pm 1$ ist.
Nun folgt aus $X \in (f) = (2)$, dass alle Koeffizienten von X gerade sind. Widerspruch
$(2, X)$ ist also kein Hauptideal in $\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 26

(a) Ist $z = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$, so ist ($\bar{z}$ konjugiert komplexe Zahl).
$\rho(a + b\sqrt{-5}\,) = a^2 + 5b^2 = (a + b\sqrt{-5}\,)(a - b\sqrt{-5}\,) = (a + b\sqrt{-5}\,)\overline{(a + b\sqrt{-5}\,)} = z\bar{z}$.
Also gilt $\rho(zw) = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\,\overline{w} = z\bar{z}w\overline{w} = \rho(z)\rho(w)$.

(b) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ gilt: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}\,) \cdot (1 - \sqrt{-5}\,)$.
Bleibt zu zeigen, dass die Faktoren irreduzibel sind:
Annahme: $2 = zw$ (echte Zerlegung)
$\Longrightarrow 4 = \rho(2) = \rho(z)\rho(w)$, also $2 = \rho(z) = a^2 + 5b^2,\ a, b \in \mathbb{Z}$, Widerspruch.
Ebenso zeigt man, dass 3 mit $\rho(3) = 9$ und $1 \pm \sqrt{-5}$ mit $\rho(1 \pm \sqrt{-5}\,) = 6$ irreduzibel sind.
Die Zerlegung in irreduzible Elemente (bis auf Einheiten und Reihenfolge) ist in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ also nicht eindeutig, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ also nicht euklidisch, da jeder euklidische Ring faktoriell ist (Vorl.).

Aufgabe 27

(a) Da $K[X]$ ein euklidischer Ring, also ein Hauptidealring ist, sei etwa $I =: (f),\ f \in K[X]$.
$K[X]/I$ ist ein kommutativer Ring und für $I \neq K[X]$ ist $1 = 1 + I$ und $0 = 0 + I = I$.
Ist $K[X]/I$ Körper, so ist I echtes Ideal, also f keine Einheit. Wäre f nicht irreduzibel, etwa $f = gh$ mit $g, h \in K[X] \setminus K$ echte Teiler von f, also $g, h \notin I$, d.h. $g + I, h + I \neq I = 0$, so wären $g + I$ und $h + I$ Nullteiler: $(g + I)(h + I) = gh + I = f + I = I = 0$, d.h. $K[X]/I$ kein Körper. Widerspruch, also ist f irreduzibel.

Ist f irreduzibel, also $(f) \neq K[X]$ und $g \notin I = (f)$, so sind f, g teilerfremd, also $\operatorname{ggT}(f, g) = 1$. Ist etwa $pf + qg = 1$, dann ist $(q + I)(g + I) = 1 + I$. In $K[X]/I$ ist also jedes von I, also von 0 verschiedene Element invertierbar, $K[X]/I$ also ein Körper.

(b) $\mathbb{Z}_2[X]/(X^4 + X^3 + 1)$ ist ein Körper, da $X^4 + X^3 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[X]$ ist (Aufgabe 21 (b)).

(c) Man berechnet mit dem euklidischen Algorithmus
$1 = (X + 1)(X^4 + X^3 + 1) + (X^3 + X^2 + X)(X^2 + X + 1)$, also
$((X^2 + X + 1) + I)^{-1} = (X^3 + X^2 + X) + I$.

Aufgabe 28

(a) $a \cdot R = R = 1 \cdot R \Longleftrightarrow a \sim 1 \Longleftrightarrow a \in R^\times$.

(b) $a \sim b \Longleftrightarrow$ es gibt $e, f \in R^\times$ mit $a = eb$, $b = fa \Longrightarrow \rho(a) \geq \rho(b) \geq \rho(a) \Longrightarrow \rho(a) = \rho(b)$.
Die Umkehrung ist falsch: X, $X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ haben gleichen Grad, sind aber nicht assoziiert, d.h. unterscheiden sich nicht um einen rationalen Faktor.

(c) Sei $a = bc$ mit $b, c \in R \setminus R^\times$ und $b = qa + r$ mit $r = 0$ oder $\rho(r) < \rho(b)$.
Dann folgt aus $r = 0$ sofort $b = qa = qcb$, also $qc = 1$, d.h. $c \in R \setminus R^\times$, Widerspruch.
Ist $\rho(r) < \rho(a)$ und $0 \neq r = b - qa = b(1 - qc)$, so gilt $\rho(b) \leq \rho(r) < \rho(a)$, also $\rho(b) < \rho(a)$.

Aufgabe 29*

(a) Sei $fg = \sum\limits_{k=0}^{r+s} c_k X^k$ und p ein nichttrivialer Teiler aller Koeffizienten von fg. Da die Koeffizienten von f bzw. g teilerfremd sind, teilt p nicht alle Koeffizienten von f bzw. g! Seien
$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_i X^i + \ldots + a_r X^r,\ a_r \neq 0$, mit i minimal mit $p \nmid a_i$ und
$g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_j X^j + \ldots + b_s X^s,\ b_s \neq 0$, mit j minimal mit $p \nmid b_j$.
$c_{i+j} = a_i b_j + [a_{i-1} b_{j+1} + \ldots + a_0 b_{j+i}] + [a_{i+1} b_{j-1} + \ldots + a_{i+j} b_0] =: a_i b_j + A + B$.
Nun gilt $p | A, B, c_{i+j}$, aber $p \nmid a_i b_j$, Widerspruch.
Also sind auch die Koeffizienten von fg teilerfremd.

(b) Die Aussage ist sicher für Polynome vom Grad 1 richtig. Ist das Polynom mindestens zweiten Grades $f \in \mathbb{Z}[X]$ in $\mathbb{Q}[X]$ reduzibel (die Koeffizienten von f seien oBdA. teilerfremd), etwa $f = GH$ mit Polynomen mindestens ersten Grades $G, H \in \mathbb{Q}[X]$, dann gibt es (Nenner beseitigen, ggT der Koeffizienten vorklammern,...) $a, b \in \mathbb{Z}$ und $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ mit $bf = agh$, wobei der ggT der Koeffizienten von g und h und nach (a) auch von gh gleich 1 ist.
Also ist $a = \pm b$, d.h. $f = \pm gh$ und folglich f reduzibel.

(c) Da $x^n - 2$ in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist (Aufgabe 24*), ist $x^n - 2$ auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel (nach (b)).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

12./13. Mai 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 30

(a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \quad \chi_A \quad = X^2 - (a_{11} + a_{22})X + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22})$

$\Longrightarrow \quad \chi_A(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22})E = \ldots = 0.$

Also gilt $\mu_A | \chi_A$, nach Definition des Minimalpolynoms.

(b) Ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis aus Eigenvektoren mit $M_B(F) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, dann ist $\chi_F = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \in K[X]$ und $\chi_F(F) = (F - \lambda_1 \mathrm{id}) \cdots (F - \lambda_n \mathrm{id})$.

Ist $\lambda_i \neq \lambda_j$, so ist $(F - \lambda_i \mathrm{id})b_j = (\lambda_j - \lambda_i)b_j$ Eigenvektor zu λ_j.

Also gilt $\chi_F(F)b_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, also $\chi_F(F) = 0$, das heisst $\mu_F | \chi_F$, nach Aufgabe 33 (c).

Wäre μ_F ein echter Teiler von χ_F, etwa $\mu_F | \frac{\chi_F}{X - \lambda_i}$,

dann wäre $\mu_F(F)b_i \neq 0$ (Eigenvektor zu λ_i), also $\mu_F(F) \neq 0$, Widerspruch. Also gilt $\mu_F = \chi_F$.

Aufgabe 31

(a) Es gilt $0 \in K[A]v$ und $K[A]v + K[A]v \subseteq K[A]v$ und $K \cdot K[A]v \subseteq K[A]v$, also ist $K[A]v$ ein Untervektorraum von K^n.

(b) Sicher ist $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ ein Erzeugendensystem von $K[A]v$, da $\deg \mu_A \leq n$ ist. Ist $k \in \mathbb{N}$ minimal mit $\{v, Av, \ldots, A^k v\}$ linear abhängig, so ist $A^k v \in < v, Av, \ldots, A^{k-1}v >$, also mit Induktion auch $A^{k+l}v \in < v, Av, \ldots, A^{k-1}v >$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Ist $\dim K[A]v = d$, so ist also $\{v, Av, \ldots, A^{d-1}v\}$ linear unabhängig, d.h. eine Basis für $K[A]v$.

Aufgabe 32

$\chi_A = \det(XE - A) = \ldots = X^3 - 3X^2 - 9X + 27 = (X - 3)^2(X + 3)$.

Also kommen für μ_A nur die beiden Polynome $(X - 3)(X + 3)$ oder $\chi_A = (X - 3)^2(X + 3)$ in Frage.

Es ist$\mu_A = (X - 3)(X + 3)$, weil

(1) $(A - 3E)(A + 3E) = \ldots = 0$ ist,

(2) $\dim \operatorname{Eig}(A, 3) = \ldots = 2$ ist, da $\operatorname{Rang}(A - 3E) = \ldots = 1$ ist,

(3) A diagonalisierbar ist, bzw. eine Basis $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus Eigenvektoren hat.

Ist $\mathrm{Eig}\,(A,3) =< v_1, v_2 >$ und $\mathrm{Eig}\,(A,-3) =< w >$, so sind die zweidimensionalen A–invarianten Unterräume genau die, die von zwei linear unabhängigen Eigenvektoren erzeugt werden, also folgende:

$\mathrm{Eig}\,(A,3) =< v_1, v_2 >$ und $< av_1 + bv_2, w >$, für $(a,b) \neq (0,0)$.

Begründung: Ist $U =< a, b >$ ein zweidimensionaler A–invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^3$, so kann man die Basis $B_U = \{a, b\}$ durch Hinzunahme eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda \in \{3, -3\}$ zu einer Basis B von $\mathbb{R}^3$ ergänzen!

Also $M_B(F_A) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, mit $A_1 = M_{B_U}(F_A|_U)$.

Da $\mu_{A_1} | \mu_A$, ist auch A_1 diagonalisierbar und U hat eine Basis aus Eigenvektoren, ist also von obiger Form.

Aufgabe 33

$\mathrm{Rang}\, A = n \Longleftrightarrow \mathrm{Kern}\, A = \mathrm{Eig}\,(A,0) = \{0\} \Longleftrightarrow 0 \notin \mathrm{Spek}\, A = \{\lambda \in K \mid \mu(\lambda) = 0\} \Longleftrightarrow \mu_A(0) \neq 0 \Longleftrightarrow \mu_A = \sum_{i=0}^{d} c_i X^i \in K[X]$, mit $c_0 \neq 0$.

Aufgabe 34

Da A diagonalisierbar ist, zerfällt χ_A in Linearfaktoren und $\mu_A = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind.

Wären λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte mit den dann linear unabhängigen Eigenvektoren v_1, v_2, so ist weder $v_1 + v_2 = 0$ noch $A(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$, denn daraus würde wegen der linearen Unabhängigkeit von v_1, v_2 sofort $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$ folgen. Alle Eigenwerte sind also gleich.

A hat also genau einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Eig}\,(A,\lambda) = K^n$, also $(A - \lambda E)v = 0$ für alle $v \in K^n$. Also gilt $\mu_A = X - \lambda$.

Aufgabe 35*

Wegen $\chi_B = X^3 - X^2 + 2X - 3$ ist nach Aufgabe 33 $\mathrm{Rang}\, B = 3$, also f_B bijektiv, d.h. $\mathrm{Kern}\, B = \{0\}$ und $\dim f_B^{-1}(\mathrm{Kern}\, A) = \dim \mathrm{Kern}\, A$.

Es gilt $ABv = 0 \Longleftrightarrow Bv \in \mathrm{Kern}\, A \Longleftrightarrow v \in f_B^{-1}(\mathrm{Kern}\, A)$

und wegen $\chi_A = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$ ist $\dim \mathrm{Eig}\,(A,0) = 1$

und folglich $\dim \mathrm{Kern}\, AB = \dim f_B^{-1}(\mathrm{Kern}\, A) = \dim \mathrm{Kern}\, A = \dim \mathrm{Eig}\,(A,0) = 1$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

19./20. Mai 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 36

$d \,|\, g, h \Longrightarrow$ Kern $d(A) \subseteq$ Kern $g(A) \cap$ Kern $h(A)$.
Nach dem Satz von Bézout gibt es $s, t \in K[X]$ mit $d = sg + th$.
Ist also $v \in$ Kern $g(A) \cap$ Kern $h(A)$,
dann gilt $d(A)v = s(A)g(A)v + t(A)h(A)v = 0$, also $v \in$ Kern $d(A)$.

Aufgabe 37

(a) $\chi_A = \det(XE - A) = \ldots = X^3 + 2X^2 - 5X - 6 = (X+1)(X-2)(X+3) = \mu_A$.

(b) Nachrechnen!

(c) Es gilt $g = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ und $h = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$.
Also $\chi_A \,|\, g \cdot h$ und folglich $(g \cdot h)(A) = 0$.

(d) $\operatorname{ggT}(g, h) = (X - 2)$, also Kern $g(A) =$ Kern $(A - 2E) =$ Eig $(A, 2) =< (1,1,1)^t >$.

$$\begin{aligned} \text{Kern}\, g(A) \cap \text{Kern}\, h(A) &= \Big(\text{Eig}\,(A,-1) \oplus \text{Eig}\,(A,2)\Big) \cap \Big(\text{Eig}\,(A,2) \oplus \text{Eig}\,(A,-3)\Big) \\ &= \text{Eig}\,(A,2) =< (1,1,1)^t > . \end{aligned}$$

Aufgabe 38

(a) Sind $A, B \in M_n(K)$ diagonalisierbar und ist $\chi_A = \chi_B$, dann sind A, B der gleichen Diagonalmatrix ähnlich, also $A \sim B$.

(b) diag $(1,1,2)$ und diag $(1,2,2)$ haben das gleiche Minimalpolynom, sind aber nicht ähnlich.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben gleiches charakteristisches Polynom $\chi = (X-1)^4$ und gleiches Minimalpolynom $\mu = (X-1)^2$, sind aber nicht ähnlich.

Aufgabe 39

$\chi_A = (X-3)(X-6)^2$ und $\chi_B = (X-3)(X+6)(X-9)$.
Da $\mathrm{Eig}\,(A,6) = \ldots =< (2,1,0)^t, (0,1,1) >$, also $\mu_A = (X-3)(X-6)$, ist A und wegen $\mu_B = (X-3)(X+6)(X-9)$ natürlich auch B diagonalisierbar.

Da $AB = BA = \begin{pmatrix} 57 & -42 & 114 \\ -24 & 48 & -66 \\ -39 & 42 & -96 \end{pmatrix}$ ist, sind A, B simultan diagonalisierbar:

Es ist $\chi_B = X^3 - 6X^2 - 45X + 162 = \ldots = (X+6)(X-3)(X-9)$ und man erhält

$\mathrm{Eig}\,(B,-6) = \ldots =< (2,-1,-2)^t >$,
$\mathrm{Eig}\,(B,3) = \ldots =< (-4,-1,1)^t >$,
$\mathrm{Eig}\,(B,9) = \ldots =< (1,-2,-1)^t >$,

Also ist $\{(2,-1,-2)^t, (-4,-1,1), (1,-2,-1)^t\}$ schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus gemeinsamen Eigenvektoren.

Mit $P := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ gilt

$M_P(f_A) = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(6,6,3)$ und $M_P(f_B) = P^{-1}BP = \mathrm{diag}\,(3,-6,9)$.

Aufgabe 40*

(a) Ist $v \in \mathrm{Eig}\,(A,\lambda)$, dann gilt $ABv = BAv = \lambda Bv$, also $Bv \in \mathrm{Eig}\,(A,\lambda)$.

(b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, dann ist $K^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Eig}\,(A,\lambda_i)$.

Ist $v = \sum_{i=1}^{k} a_i \in \mathrm{Eig}\,(B,\mu)$ mit $a_i \in \mathrm{Eig}\,(A,\lambda_i)$, dann ist $Bv = \sum_{i=1}^{k} Ba_i = \mu v = \sum_{i=1}^{k} \mu a_i$.
Da K^n direkte Summe der $\mathrm{Eig}\,(A,\lambda_i)$ ist, gilt $Ba_i = \mu a_i$, also $a_i \in \mathrm{Eig}\,(B,\mu)$.
Also ist jeder Eigenvektor von B als Summe von gemeinsamen Eigenvektoren darstellbar.

(c) Da es eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von B gibt, bilden die gemeinsamen Eigenvektoren ein Erzeugendensystem von K^n. Folglich gibt es eine Basis von K^n aus gemeinsamen Eigenvektoren von A und B. A und B sind also simultan diagonalisierbar.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

26./27. Mai 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 41

Ist $A \in \mathrm{GL}(K)$, so gilt nach Aufgabe 33:

$\mu_A = \sum_{i=0}^{d} c_i X^i,\ c_d = 1$ mit $c_0 \neq 0$. Es folgt $\mu_A(A) = A^d + \ldots + c_0 E = 0$.

Für $f(X) := -\frac{1}{c_0}\sum_{i=1}^{d} c_i X^i \in K[X]$ gilt $f(0) = 0$ und $f(A) = E$, also $A \cdot (-\frac{1}{c_0})\sum_{i=1}^{d} c_i A^{i-1} = E$,

d.h. $A^{-1} = \frac{1}{-c_0}(\sum_{i=1}^{d} c_i A^{i-1}) \in K[A]$.

Aufgabe 42

(a) $A \in M_n(K)$ ist genau dann nilpotent, wenn $\mu_A = X^d$ ist. $A \in M_n(K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Ist also $\mu_A = X^d$, so zerfällt μ_A genau dann in paarweise verschiedene Linearfaktoren, wenn $\mu_A = X$ ist, also $A = 0$ ist.

(b) Ist $A^n = 0$ und $AB = BA$, so ist $(AB)^n = A^n B^n = 0B^n = 0$, also AB nilpotent.

(c) Ist $A^n = 0$ und $B^m = 0$ und $AB = BA$, so gilt für $l := m + n$:

$(A+B)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k B^{l-k} = 0$, da $k \geq n$ oder $l - k \geq m$ ist. $A + B$ ist also nilpotent.

Aufgabe 43

(a) Für $\overline{f}:\ V/U \to V/U$ mit $\overline{f}(v+U) = f(v) + U$ gilt

(1) $\overline{f}(v_1 + U + v_2 + U) = \ldots = f(v_1 + v_2) + U = \ldots = \overline{f}(v_1 + U) + \overline{f}(v_2 + U)$,

(2) und für alle $r \in K$ auch $\overline{f}(r(v+U)) = \ldots = f(rv) + U = \ldots = r\overline{f}(v+U)$.

(b) Ist $B = B_U \cup \{b_{d+1}, \ldots, b_n\}$, so gilt, da U f–invariant ist: $M_B(f) = \begin{pmatrix} C_1 & \star \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$, $C_1 \in M_d(K)$.

$\overline{B} := \{b_{d+1} + U, \ldots, b_n + U\}$ ist eine Basis von V/U,

denn $< \overline{B} >= V/U$ und

$\sum_{i=d+1}^{n} r_i(b_i + U) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=d+1}^{n} (r_i b_i + U) = 0 \Longleftrightarrow (\sum_{i=d+1}^{n} r_i b_i) + U = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=d+1}^{n} r_i b_i \in U.$

Also $r_i = 0$ für $i = d+1, \ldots, n$. Also ist $\overline{B}$ linear unabhängig und somit eine Basis von V/U.

Für $i = d+1, \ldots, n$ gilt $\overline{f}(b_i + U) = f(b_i) + U$, also $M_{\overline{B}}(\overline{f}) = C_2$.

(c) Ist f trigonalisierbar, etwa $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist auch C_2 eine obere Dreiecksmatrix.

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: $M_B(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_3(\mathbb{R})$ ist

nicht trigonalisierbar, da $\chi_A = (X^2+1)(X-1)$ nicht in Linearfaktoren zerfällt (über $\mathbb{R}$), während $M_{\overline{B}}(\overline{f}) = (1)$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 44

(a) $A^3 \neq 0$ und $A^4 = 0$, also A nilpotent mit Nilpotenzindex 4 und Minimalpolynom $\mu_A = X^4$.

(b) $\operatorname{Kern} A^0 = \operatorname{Kern} E = \{0\}$
$\operatorname{Kern} A^1 = \operatorname{Eig}(A,0) =< (0,0,0,0,-1,1)^t, (1,-1,-1,1,0,0)^t >$ mit $\dim \operatorname{Kern} A^1 = 2$,
$\operatorname{Kern} A^2 = \operatorname{Kern} A^1 \cup < (0,0,0,1,0,0)^t, (0,0,0,0,1,0)^t >$ mit $\dim \operatorname{Kern} A^2 = 4$,
$\operatorname{Kern} A^3 = \operatorname{Kern} A^2 \cup < (1,-1,0,0,0,0)^t >$ mit $\dim \operatorname{Kern} A^3 = 5$,
$\operatorname{Kern} A^4 = \mathbb{R}^6$ mit $\dim \operatorname{Kern} A^4 = 6$.

(c) Man erhält: $\lambda' = (2,2,1,1) \vdash 6$, also $\lambda = (\lambda')' = (4,2) \vdash 6$, also $Y(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$

und $J_\lambda = J_\lambda(0) = \begin{pmatrix} J_4(0) & 0 \\ 0 & J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $b := (0,1,1,0,0,0)^t \in \operatorname{Kern} A^4 \setminus \operatorname{Kern} A^3$. Sei $b_i = A^{4-i}b,\ i = 1,2,3,4$, insbesondere $b_4 = b$,
dann ist $U :=< b_1, b_2, b_3, b_4 >=< A^3b, A^2b, Ab, b >$ ein 4-dim. A–invarianter Unterraum.
$c := (0,0,0,0,1,0)^t \in \operatorname{Kern} A^2 \setminus \operatorname{Kern} A^1$ und $c_2 \notin U$. Sei $c_i = A^{2-i}c,\ i = 1,2$,
dann ist $W :=< c_1, c_2 >=< Ac, c >$ ein 2-dim. A–invarianter Unterraum und $\mathbb{R}^6 = U \oplus W$.

b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2		

$B := \{b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2\}$ ist eine gesuchte Jordanbasis und für
$S := (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, c_1\, c_2) \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ gilt $S^{-1}AS = J_\lambda$.

Aufgabe 45*

Zu zeigen: Ist $S^{-1}AS = \lambda A$ und ist A nicht nilpotent, dann ist $|\lambda| = 1$.
Zunächst ist $\lambda \neq 0$, da $A = 0$ nilpotent ist.
Sei $\mu_A = \mu_{S^{-1}AS} = \mu_{\lambda A} = X^d + c_i X^i + \ldots$, wobei $d > i$ maximal ist mit $c_i \neq 0$.
Dann gilt $A^d + c_i A^i + \ldots = 0$ und $\lambda^d A^d + c_i \lambda^i A^i + \ldots = 0$, also $c_i \lambda^i (\lambda^{d-i} - 1) A^i + \ldots = 0$.
Da μ_A Minimalpolynom und $c_i, \lambda \neq 0$ sind, gilt $\lambda^{d-i} - 1 = 0$, also $|\lambda| = 1$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

2./3. Juni 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 46

(a) $\chi_{M_k} = \mu_{M_k} = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$ für $k = 1, 2, 3$.
M_1 gemeinsame Jordansche Normalform über $\mathbb{C}$, also die Matrizen über $\mathbb{C}$ und folglich M_2 und M_3 über $\mathbb{R}$ ähnlich.

(b) Mit $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} := \{\operatorname{Im} a_1, \operatorname{Re} a_1, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_2\}$ gilt
$M_1 b_1 = M_1(\operatorname{Im} a_1) = M_1(\frac{1}{2i}(a_1 - \overline{a_1}) = \frac{1}{2}(a_1 + \overline{a_1}) = \operatorname{Re} a_1 = b_2$.
Ebenso sieht man: $M_1 b_2 = \ldots = -b_1$, $M_1 b_3 = \ldots = b_1 + b_4$, $M_1 b_4 = \ldots = b_2 - b_3$.
Also $M_B(f) = M_2(f)$.
M_3 ist Begleitmatrix von $\chi = (X^2+1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$.
Wähle etwa $c := b_3$ und $C := \{c, M_2 c, {M_2}^2 c, {M_2}^3 c\}$.
Dann ist C Basis von $\mathbb{C}^4$ und $M_C(f) = M_3$.

Aufgabe 47

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Man erhält $\chi_A = \ldots = (X+1)^3 X$ und $\mu_A = (X+1)^2 X$, denn

$A + E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots = (A+E)^3.$

$\operatorname{Eig}(A, -1) = \ldots =< (0,0,0,1)^t, (1,0,-1,0)^t >$ und $\operatorname{Kern}(A+E) = \operatorname{Eig}(A,-1) \cup < (0,1,0,0) >$.
$\operatorname{Eig}(A, 0) = \operatorname{Kern} A = \ldots =< (1,0,-2,0)^t >$.

Jordanbasis: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und es gilt $P^{-1} A P = J$, wobei

$$J = J_2(-1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die Zerlegung von J in Diagonalmatrix plus nilpotenter Matrix ist.
Die additive J–C–Zerlegung von A ist also

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \chi_B = \ldots = (X-12)^2(X-6). \text{ Man erhält:}$$

$\operatorname{Eig}(B,12) = \operatorname{Kern}(B-12E) =< (1,1,1)^t >$ und $\operatorname{Kern}(B-12E)^2 =< (1,1,1)^t, (0,1,1)^t >$.
Ebenso $\operatorname{Eig}(B,6) = \operatorname{Kern}(B-6E) =< (1,1,-1)^t >$.
Mit $b_2 = (0,1,1)^t$ und $b_1 = (B-12E)(0,1,1)^t = (-2,-2,-2)^t$ und $c_1 = (1,1,-1)^t$
ergibt sich eine Jordanbasis $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mit $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $B = \ldots = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} =: D + N$ (additive J–C–Zerlegung von B).

Mit $U := D^{-1}(D+N) = E + D^{-1}N = \ldots = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ gilt

$B = UD = DU = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ (multiplikative J–C–Zerlegung von B).

Aufgabe 48

Ist $A \sim E_r \oplus O_{n-r} =: B$ etwa $A = PBP^{-1}$, dann folgt $A^2 = PB^2P^{-1} = PBP^{-1} = A$.

Sei nun $A^2 = A$.

Ist $\{b_1, \ldots, b_r\}$ Basis von $\operatorname{Bild} A$ und $\{b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ Basis von $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Eig}(A,0)$,

dann ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von K^n,

denn für $v \in K^n$ gilt $v = Av + (v - Av)$ mit $Av \in \operatorname{Bild} A$ und $(v - Av) \in \operatorname{Kern} A$ und

aus $v \in \operatorname{Bild} A \cap \operatorname{Kern}$ folgt $0 = Av = v$.

Ist $v \in \operatorname{Bild} A$ etwa $v = Aw$, dann ist $Av = A^2w = Aw = v$, also $v \in \operatorname{Eig}(A,1)$. Also sind $b_1, \ldots, b_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und wie oben gesehen $\{b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert 0 und folglich $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis aus Eigenvektoren von K^n.

A ist somit diagonalisierbar und $A \sim \begin{pmatrix} E_r & \\ & O_{n-r} \end{pmatrix}$.

Man sieht $\chi_A = (X-1)^r X^{n-r}$, $\mu_A = (X-1)X$ und $\operatorname{Spur} A = r$.

Aufgabe 49

(1) Da $|K| = \infty$ ist, gibt es ein $\lambda \in K$ mit $\chi_A(\lambda) \neq 0$.

(2) $(\lambda E - A)^{-1}B =: \tilde{B}$ ist nilpotent [Aufgabe 42 (b)], denn B ist nilpotent und
$(\lambda E - A)^{-1}B = B(\lambda E - A)^{-1} \Longleftrightarrow B(\lambda E - A) = (\lambda E - A)B$
$\Longleftrightarrow \lambda BE - BA = \lambda EB - AB \Longleftrightarrow AB = BA$.

(3) Da $\tilde{B}$ nilpotent ist, gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}\tilde{B}P = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

Also folgt $P^{-1}(E - \tilde{B})P = E - P^{-1}\tilde{B}P = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(E - \tilde{B}) = 1$.

(4) Sei $\lambda \in K$ mit $\chi_A(\lambda) \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A+B} &= \det(\lambda E - (A + B)) = \det(\lambda E - A - (\lambda E - A)\tilde{B})) \\ &= \det(\lambda E - A)(E - \tilde{B}) = \det(\lambda E - A) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Also stimmen χ_{A+B} und χ_A als Polynomfunktion überein und – da $|K| = \infty$ ist – auch als Polynome aus $K[X]$.

Aufgabe 50*

$$A \sim J_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix} \in M_n(K), \text{ also } \mu_A = \chi_A = (X - a)^n.$$

Sei $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$. Dann ist

$\mathcal{A} - aE = \begin{pmatrix} A - aE & A \\ 0 & A - aE \end{pmatrix}$ und mit Induktion über $k \in \mathbb{N}$:

$(\mathcal{A} - aE)^k = \begin{pmatrix} (A - aE)^k & kA(A - aE)^{k-1} \\ 0 & (A - aE)^k \end{pmatrix}$ und folglich

$(\mathcal{A} - aE)^n = \begin{pmatrix} 0 & nA(A - aE)^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $(\mathcal{A} - aE)^{n+1} = 0$. Man erhält also

$$\mu_{\mathcal{A}} = \begin{cases} (X - a)^{n+1} & \text{, für } n \not\equiv 0 \bmod \mathrm{Char}\, K, \\ (X - a)^n & \text{, für } n \equiv 0 \bmod \mathrm{Char}\, K. \end{cases}$$

Aus $\dim \mathrm{Eig}\,(\mathcal{A}, a) = 2$ folgt

$$\mathcal{A} \sim \begin{cases} \begin{pmatrix} J_{n+1}(a) & 0 \\ 0 & J_{n-1}(a) \end{pmatrix} & \text{, für } n \not\equiv 0 \bmod \mathrm{Char}\, K, \\ \begin{pmatrix} J_n(a) & 0 \\ 0 & J_n(a) \end{pmatrix} & \text{, für } n \equiv 0 \bmod \mathrm{Char}\, K. \end{cases}$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

16./17. Juni 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 51

(a) $\mathcal{U}_1$: Ebene $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathrm{I\!R}$, $U_1 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$,

$\mathcal{U}_2$: Ebene $x_1 - x_2 + x_3 = 3$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathrm{I\!R}$, $U_2 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$,

$\mathcal{U}_3$: Gerade $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r \in \mathrm{I\!R}$. $U_3 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} >$.

(b) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = (1, -1, 1) + < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = 1$, $U_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$,

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_3$ $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3) = 1$, $U_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3} = U_{\mathcal{U}_3} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} >$,

$\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 = \{(2, 0, 1)\}$ $\dim(\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3) = 0$ $U_{\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3} = \{0\}$.

(c) Dimensionssatz: $(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap \mathcal{U}_3 \neq \emptyset$, Schnitt zweier nichtparalleler Geraden in $\mathcal{U}_1$, also

$$2 = \dim((\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \vee \mathcal{U}_3) = \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) + \dim\mathcal{U}_3 - \dim((\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap \mathcal{U}_3)$$
$$= 1 + 1 - 0 = 2.$$

Aufgabe 52

(a) Ist $\alpha\mathcal{U} = \emptyset$, dann ist $\alpha\mathcal{U}$ affiner Unterraum von $\mathcal{B}$.
Sei also $\alpha\mathcal{U} \neq \emptyset$, also auch $\mathcal{U} \neq \emptyset$, etwa $P \in \mathcal{U}$. Sei $Q \in \mathcal{U}$, $\alpha Q \in \alpha\mathcal{U}$, dann
$V_{\alpha\mathcal{U}} = \{\overrightarrow{\alpha P \alpha Q} \mid \alpha Q \in \alpha\mathcal{U}\} = \{\hat{\alpha}\,(\overrightarrow{PQ}) \mid Q \in \mathcal{U}\} = \hat{\alpha}\, V_{\mathcal{U}}$.
$V_{\mathcal{U}} \leq V_{\mathcal{A}}$, also $\hat{\alpha}\, V_{\mathcal{U}} \leq V_{\mathcal{B}}$, d.h. $\alpha\mathcal{U}$ ist affiner Unterraum von $\mathcal{B}$.

(b) Ist $\mathcal{W} = \emptyset$, dann ist auch $\overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W}) = \emptyset$, also affiner Unterraum von $\mathcal{A}$.
Sei also $\mathcal{W} \neq \emptyset$, etwa $P \in \overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W})$, $\alpha P \in \mathcal{W}$, dann gilt
$\overrightarrow{PQ} \in V_{\overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W})} \iff Q \in \overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W}) \iff \alpha Q \in \mathcal{W} \iff \hat{\alpha}\,(\overrightarrow{PQ}) \in V_{\mathcal{W}} \iff \overrightarrow{PQ} \in \hat{\alpha}^{-1}(V_{\mathcal{W}})$.
Also $V_{\overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W})} = \hat{\alpha}^{-1}(V_{\mathcal{W}}) \leq V_{\mathcal{A}}$, d.h. $V_{\overset{-1}{\alpha}(\mathcal{W})}$ ist affiner Unterraum von $V_{\mathcal{A}}$.

(c) Da $\emptyset$ zu allen affinen Unterräumen parallel ist, seien $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \neq \emptyset$.
$\mathcal{U} \parallel \mathcal{U}' \iff U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$. Sei etwa $V_{\mathcal{U}} = U \subseteq U' = V_{\mathcal{U}'}$.
Dann gilt $V_{\alpha\mathcal{U}} = \hat{\alpha}\, V_{\mathcal{U}} = \hat{\alpha}\, U \subseteq \hat{\alpha}\, U' = \hat{\alpha}\, V_{\mathcal{U}'} = V_{\alpha\mathcal{U}'}$, also $\alpha\mathcal{U} \parallel \alpha\mathcal{U}'$.

(d) Sei etwa $V_{\mathcal{W}} = W \subseteq W' = V_{\mathcal{W}'}$.
Dann gilt $V_{\overset{-1}{\alpha}\mathcal{W}} = \hat{\alpha}^{-1}(V_{\mathcal{W}}) \subseteq \hat{\alpha}^{-1}(V_{\mathcal{W}'}) = V_{\overset{-1}{\alpha}W'}$, also $\overset{-1}{\alpha}\,\mathcal{W} \parallel \overset{-1}{\alpha}\,\mathcal{W}'$.

Aufgabe 53

$\rho \quad : x' = Ax$ mit $A = a\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$, $\omega \in [0, 2\pi)$,

$\tau \quad : x' = x + t$,

$\delta \quad : x' = D(x - z) + z$ mit $D = Dx + (E - D)z = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$, $\omega \in [0, 2\pi)$,

$\sigma \quad : x' = a(x - s) + s$.

(a) Seien $\rho \neq \mathrm{id}$, d.h. $A \neq E$, $\omega \neq 0$ und τ mit Translationsvektor t gegeben.
Sei $D := \frac{1}{a}A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$.
Für $a \neq 1$ setze $z := 0$ und $s := \frac{1}{1-a}t$
$a = 1$ setze $z := (E - D)^{-1}t$ und $s := 0$

$E - D = \begin{pmatrix} 1 - \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & 1 - \cos\omega \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da $\det(E - D) = 2(1 - \cos\omega) \neq 0$ ist für $\omega \neq 0$.

(b) Seien Drehung δ und Streckung σ gegeben.
$\sigma \circ \delta(x) = \sigma(\delta(x)) = a(D(x - z) + z - s) + s = aDx + a(E - D)z + (1 - a)s$.
Setze also $A := aD$ und $t := a(E - D)z + (1 - a)s$.

Aufgabe 54

Sei $\overrightarrow{PQ_i} =: \lambda_i \overrightarrow{PP_i}$, also $\lambda_i = \mathrm{TV}\,(PP_iQ_i)$.
$P_1 \vee P_2$ ist genau dann parallel zu $Q_1 \vee Q_2$, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt mit $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$, also $\lambda_2 \overrightarrow{PP_2} - \lambda_1 \overrightarrow{PP_1} = \lambda(\overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2}) = \lambda \overrightarrow{PP_2} - \lambda \overrightarrow{PP_1}$, also – wegen der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{PP_2}$ – wenn $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ist.
Ebenso ist $P_1 \vee P_3$ genau dann parallel zu $Q_1 \vee Q_3$, wenn $\lambda = \lambda_1 = \lambda_3$ ist.
Also erhält man $\overrightarrow{Q_2Q_3} = \overrightarrow{Q_2Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_3} = \ldots = \lambda \overrightarrow{P_2P_3}$, d.h. auch $P_2 \vee P_3$ und $Q_2 \vee Q_3$ sind parallel.

Aufgabe 55*

$\overrightarrow{PP'} = \mu\left(\frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} + \frac{\overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PR}\|}\right) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PQ} + \lambda \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ} + \lambda(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$.

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ erhält man
$\lambda = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|}$ und $1 - \lambda = \frac{\|\overrightarrow{PR}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\|}$.

Also $\dfrac{\mathrm{TV}\,(QRP')}{\mathrm{TV}\,(RQP')} = \dfrac{\|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PR}\|}$. Die andere Gleichung ergibt sich aus $\mathrm{TV}\,(QRP') = \dfrac{1}{\mathrm{TV}\,(QP'R)}$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

23./24. Juni 2003

Lineare Algebra 2

Lösungshinweise zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 56

$A', B', C' \in \mathcal{A}$ sind die Seitenmittelpunkte des Dreiecks A, B, C.

Mit $a := \overrightarrow{PA}$, $a' := \overrightarrow{PA'}$ und $b := \overrightarrow{PB}$, $b' := \overrightarrow{PB'}$ und $c := \overrightarrow{PC}$, $c' := \overrightarrow{PC'}$ und $x := \overrightarrow{PQ}$ gilt $a' = \frac{b+c}{2}$, $b' = \frac{a+c}{2}$, $c' = \frac{a+b}{2}$ und folglich

$A \vee A' :\quad a + r(\frac{b+c}{2} - a)$ Gerade durch A und A',
$B \vee B' :\quad b + t(\frac{a+c}{2} - b)$ Gerade durch B und B'.

Gleichsetzen ergibt: $a + r(\frac{b+c}{2} - a) = b + t(\frac{a+c}{2} - b) \iff \ldots \iff r = t = \frac{2}{3}$, da $b - a$ und $c - a$ lin. unabhängig sind.

Also schneiden sich $A \vee A'$ und $B \vee B'$ in S, mit $s = \overrightarrow{PS} = a + \frac{2}{3}(\frac{b+c}{2} - a) = \frac{1}{3}(a + b + c)$.
Analog schneiden sich $A \vee A'$ und $C \vee C'$ in S.

(b) Es ist $s = a + \frac{2}{3}(\frac{b+c}{2} - a)$ und also $\overrightarrow{AA'} = a' - a = \frac{b+c}{2} - a = \frac{3}{2}(s - a) = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AS}$, also $\mathrm{TV}\,(ASA') = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 57

$s = \overrightarrow{MS} = \frac{1}{3}(a + b + c)$ (Stundenübung) und $h = \overrightarrow{MH} = a + b + c$,
denn $(h - a) \perp (b - c)$, da $< h - a, b - c > = < b + c, b - c > = \|b\|^2 - \|c\|^2 = 0$.
Wegen $s = \frac{1}{3}h$ liegen M, S, H auf einer Geraden (*Eulersche* Gerade) und $\mathrm{TV}\,(MSH) = 3$.

Aufgabe 58

$\mathcal{K}$ sei ein kartesisches Koordinatensystem von $\mathcal{A} = \mathrm{I\!R}^2$ und x bzw. x' Koordinatenvektor von P bzw. $\alpha(P)$. A sei die zu der Kongruenz α gehörende orthogonale Matrix, also $x' = Ax + t$.
Zu diskutieren sind folgende Fälle:

$t = 0$	α ist eine Spiegelung oder eine Drehung, also Produkt zweier Spiegelungen nach LA 1, Aufgabe 39.
$t \neq 0$, $A = E$	α ist eine Translation, also Produkt zweier Spiegelungen an parallelen Geraden orthogonal zu t im Abstand $\frac{1}{2}\|t\|$.
$t \neq 0$, $A \neq E$ $\det A = -1$	α ist eine Spiegelung gefolgt von einer Translation, also Produkt dreier Spiegelungen.
$t \neq 0$, $A \neq E$ $\det A = 1$	α ist eine Drehung gefolgt von einer Translation, also eine Drehung mit gleicher Drehmatrix A und Drehzentrum $x_0 = (E - A)^{-1}t$, also Produkt zweier Spiegelungen. Denn $Ax + t = A(x - x_0) + x_0 \iff (E - A)x_0 = t \iff x_0 = (E - A)^{-1}t$, das LGS ist eindeutig lösbar, da $1 \notin \mathrm{Spek}\,A$.

Jede Kongruenz des affinen Raumes $\mathcal{A} = \mathrm{I\!R}^2$ ist also Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen.

Aufgabe 59

(a) $Q_c = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + c$, also

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$\chi_A = \ldots = (X-2)^2(X+4)$, also $\operatorname{Spek} A = \{2, -4\}$,

$r(Q_c) = \operatorname{Rang} A = 3$,

$\hat{r}\,(Q_c) = \operatorname{Rang}\,\hat{A} = \begin{cases} 3, \text{ falls } c = 0 \\ 4, \text{ falls } c \neq 0 \end{cases}$,

$t(Q_c) = 2$, (2 doppelte Nullstelle).

	Normalform		Quadrik
c	Kongruenzklasse	Ähnlichkeitsklasse	
$c < 0$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 + c = 0$	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
$c = 0$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$	Doppelkegel
$c > 0$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 + c = 0$	$-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid

(b) Drehmatrix aus Eigenvektoren von A: $S = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(c)

$c = -2$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = 2$	einschaliges Hyperboloid
$c = 0$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = 0$	Doppelkegel
$c = 2$	$2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = -2$	zweischaliges Hyperboloid

Aufgabe 60*

Gegeben der affine Raum $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2^n$. Affinitäten sind bijektive affine Abbildungen:
$\alpha \in \operatorname{Aff}(A): \quad x' = Ax + t$, mit $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}_2)$ und $t \in \mathbb{Z}_2^n$.

Ist k die Anzahl der invertierbaren n–reihigen Matrizen über $\mathbb{Z}_2$, so gibt es genau $k \cdot |\mathbb{Z}_2^n| = k \cdot 2^n$ Affinitäten. Bleibt k zu bestimmen:

Für die erste Spalte a_1 von $A = (a_1, \ldots, a_n)$ gibt es $2^n - 1$ Möglichkeiten. Sind die Spalten $a_1, \ldots, a_r$ schon gewählt, so hat $< a_1, \ldots, a_r >$ genau 2^r Elemente und es gibt für die Spalte a_{r+1} von A noch $2^n - 2^r$ Möglichkeiten.
Also ist $k = (2^n - 2^0)(2^n - 2^1) \ldots (2^n - 2^{n-1})$ und

$$k \cdot 2^n = 2^n \prod_{i=0}^{n-1} (2^n - 2^i) = \text{ Anzahl der Affinitäten } = \text{ Ordnung der affinen Gruppe } \operatorname{Aff}(\mathcal{A}).$$