Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 10. April 2006

1. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$ ähnlich sind und geben Sie eine invertierbare Matrix T an mit $TAT^{-1} = B$.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in$Mat$(n; K)$ ähnlich sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Es ist $p_A = \lambda^2 - 9$; A hat die Eigenwerte 3 und -3. Ein Eigenvektor zu 3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; zu -3 ist $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor. Wir setzen $B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $M = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist dann

$$M_{B_1}^{B_1}(\varphi_A) = M_{B_1}^{KB}(id) A M_{KB}^{B_1}(id) = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

(φ_A ist definiert durch $\varphi_A(x) = Ax$; entsprechend ist $\varphi_B(x) = Bx$.)

Es ist $p_B = \lambda^2 - 9$; B hat auch die Eigenwerte 3 und -3. Ein Eigenvektor zu 3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; zu -3 ist $\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor. Wir setzen $B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\}$ und $N = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$. Es ist dann

$$M_{B_2}^{B_2}(\varphi_B) = M_{B_2}^{KB}(id) B M_{KB}^{B_2}(id) = N^{-1}BN = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Aus $M^{-1}AM = N^{-1}BN$ folgt $B = NM^{-1}AMN^{-1}$. Damit erhält man

$$T = NM^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Es sei f die lineare Abbildung im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich der Standardbasis KB durch A gegeben ist; also $A = M_{KB}^{KB}(f)$. Es gilt dann $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1, \dots, f(e_n) = e_{n-1}$. Man betrachte nun die Basis $B' = \{e_n, e_{n-1}, \dots, e_1\}$. Wegen $f(e_n) = e_{n-1}$, $f(e_{n-1}) = e_{n-2}, \dots, f(e_1) = 0$ folgt $M_{B'}^{B'}(f) = B$. A und B beschreiben also bezüglich geeigneter Basen dieselbe lineare Abbildung, sie sind daher ähnlich.

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$, $A \neq 0$, und es gebe ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Zeigen Sie:

a) 0 ist einziger Eigenwert von A.

b) A ist nicht diagonalisierbar.

Lösung:
a) A ist nicht invertierbar, denn sonst wäre $A^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also hat das LGS $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen, d.h. 0 ist Eigenwert von A.
Wäre $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A, so gäbe es ein $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$. Dann folgt aber
$A(Ax) = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x \neq 0$ und weiter durch Induktion $A^k x = \lambda^k x \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also wäre $A^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch.
b) Nach a) ist 0 einziger Eigenwert von A. Eigenvektoren sind also nur die Lösungen des LGS $Ax = 0$. Wegen $A \neq 0$ ist der Lösungsraum dieses LGS nicht der ganze $\mathbb{R}^n$. Also gibt es keine Basis aus Eigenvektoren von A, A ist demnach nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix. Bestimmen Sie ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms alle Eigenwerte und eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von C. Geben Sie ferner eine orthogonale Matrix B so an, dass $B^\top CB$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Durch Rückgriff auf die Definition und genaues Hinsehen findet man alle Eigenwerte von C.

Lösung:
Man erkennt die Eigenwerte 0 (Matrix hat Rang 1) und -4 (Zeilensummen sind gleich -4) mit den Eigenräumen $\mathrm{Eig}(C, -4) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und

$$\mathrm{Eig}(C, 0) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Durch scharfes Hinsehen erkennt man die zweite angegebene Basis von $\mathrm{Eig}(C, 0)$, die schon orthogonal ist. Also ist

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix (eine Orthonormalbasis B) und mit f_C definiert durch $f_C(x) = Cx$ gilt:

$$M_B^B(f_C) = M_B^{KB}(id) M_{KB}^{KB}(f_C) M_{KB}^B(id) = B^{-1}CB = B^\top CB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 / 2 / 3 / 3 Punkte)

Bringen Sie die beschreibenden Gleichungen der folgenden Punktmengen durch Hauptachsentransformation auf Normalform. Um welche Punktmengen handelt es sich?
a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 10 = 0\}$
b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = 0\}$
c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 - 9 = 0\}$
d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6 = 0\}$

Lösung:

a) Es ist $2x_1^2+3x_1x_2-2x_2^2-10 = x^\top Ax-10 = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$. Aus $p_A = (2-\lambda)(-2-\lambda)-\frac{9}{4} = (\lambda-\frac{5}{2})(\lambda+\frac{5}{2})$ erhält man die Eigenwerte $\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{2}$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $S = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $x = Sy$ überführt $x^\top Ax$ in $(Sy)^\top ASy = y^\top S^\top ASy = y^\top S^{-1}ASy$. Die Matrix $S^{-1}AS$ ist aber eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{2}$ auf der Diagonalen. Die gegebene Gleichung $x^\top Ax - 10 = 0$ geht also über in die Normalform $\frac{5}{2}y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2 - 10 = 0$ bzw. $\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} = 1$. Dies ist eine im y_1, y_2-System in Richtung der y_1-Achse geöffnete Hyperbel. Die y_1-Achse ist durch den Eigenvektor zu $\frac{5}{2}$ gegeben, die y_2-Achse durch den anderen Eigenvektor.

b) Es ist $x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = x^\top Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$. $p_A = \lambda^2+\lambda-\frac{9}{4}$ liefert die Eigenwerte $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Berechnet man dazu Eigenvektoren (die zur Beantwortung der Fragen in der Aufgabenstellung aber überflüssig sind), so liefern diese dann die neuen y_1 bzw. y_2-Achsen. Im y_1, y_2-System geht die gegebene Gleichung über in die Normalform $(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{10})y_1^2 + \underbrace{(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{10})}_{<0}y_2^2 = 0$. Diese Gleichung beschreibt 2 sich schneidende Geraden und zwar

$$y_2 = \pm\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}}y_1 \,.$$

Erkennt man, dass sich der gegebene Term $x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2$ in $(x_1-2x_2)(x_1+x_2)$ faktorisieren läßt, so sieht man, dass die oben angegebenen Geraden im ursprünglichen x_1, x_2-System lauten: $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ und $x_2 = -x_1$.

c) $2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 - 9 = x^\top Ax - 9$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es ist $p_A = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$, Eigenwerte sind also 1, 3 und 0. Also geht die gegebene Gleichung in einem entsprechenden y_1, y_2, y_3-System über in die Normalform $y_1^2 + 3y_2^2 - 9 = 0$ bzw. $\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{3} = 1$. Diese Gleichung beschreibt im y_1, y_2, y_3-System einen elliptischen Zylinder.

d) Es ist $5x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3+6 = x^\top Ax+6$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & 6-\lambda \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-18) = -(\lambda-6)^2(\lambda+3)\end{aligned}$$

Eigenwerte sind also 6 und -3. Eigenvektoren zu 6 berechnen sich als Lösungen von $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} x = 0$; also sind $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Zu -3 ist dann $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor. Wir normieren, setzen $S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ und $x = Sy$. Dann geht die gegebene Gleichung über in $6y_1^2 + 6y_2^2 - 3y_3^2 + 6 = 0$ bzw. $-y_1^2 - y_2^2 + \frac{y_3^2}{2} = 1$. Dies stellt ein zweischaliges Hyperboloid dar. (Keine Punkte für $-\sqrt{2} < y_3 < \sqrt{2}$.)

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 2. Mai 2006

2. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (4 / 3 / 3 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$, und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $\langle A, B\rangle = \operatorname{Spur}(AB)$. (Ist $M = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, so ist $\operatorname{Spur} M = \sum_{i=1}^n a_{ii}$; $\operatorname{Spur} M$ ist also die Summe der Hauptdiagonalelemente von M.)

a) Untersuchen Sie, welche Bedingungen für ein Skalarprodukt die Abbildung $\langle\ ,\ \rangle$ erfüllt.

b) Es sei $U := \{A \in V \mid A \text{ symmetrisch}\}$. Zeigen Sie, daß $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf U ist.

c) Im Falle $n = 2$ sind

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ und } B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Basen von U. (Kein Beweis nötig!)
Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich der Basen B_i.

Lösung:

a) $\langle , \rangle$ ist bilinear. Beweis:

$$\begin{aligned}\langle A_1 + A_2, B\rangle &= \operatorname{Spur}((A_1 + A_2)\cdot B) = \operatorname{Spur}(A_1B + A_2B) \\ &= \operatorname{Spur}(A_1B) + \operatorname{Spur}(A_2B) \qquad \text{(klar nach Def. der Spur)} \\ &= \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle\end{aligned}$$

Die weiteren Bedingungen beweist man entsprechend.
Die Symmetrie gilt ebenfalls:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij}\right) = \operatorname{Spur}(BA) = \langle B, A\rangle$$

$\langle\ ,\ \rangle$ ist nicht positiv definit. Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$, aber $\langle A, A\rangle = \operatorname{Spur}(A^2) = 0$, da $A^2 = O$.

b) Es bleibt nach a) in diesem Fall die positive Definitheit zu zeigen. Sei $A \neq O$ symmetrisch, also $A = A^\top$.

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{Spur}(A^2) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right) > 0\,,$$

da es ein $a_{ij} \neq 0$ gibt.

c) Wird $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich $B_1 =: \{A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}\}$ durch die Matrix $C = (c_{ij})$ dargestellt, so gilt $c_{ij} = \langle A_i^{(1)}, A_j^{(1)}\rangle = \operatorname{Spur}(A_i^{(1)}A_j^{(1)})$. Man berechnet daher direkt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist $D = (d_{ij})$ die Matrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B_2, so kann man entsprechend vorgehen, oder man benutzt die Transformationsformel: Die Koordinatenvektoren k_{B_1} bzgl. B_1 der Vektoren aus B_2 sind:

$$k_{B_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad k_{B_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad k_{B_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 / 4 / 2 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade ≤ 3 (aufgefaßt als Funktionen) und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ das durch $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ definierte Skalarprodukt.

a) Bestimmen Sie die $\langle\ ,\ \rangle$ darstellende Matrix bezüglich der Basis $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$.

b) Berechnen Sie $\langle 2x^2 + x, x^3 - x^2 + x + 1 \rangle$ mittels Matrizenrechnung.

c) Es seien $f_1, f_2 \in V$ definiert durch $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x$. Berechnen Sie $d(f_1, f_2)$.

Lösung:

a) Wir nennen die gesuchte Matrix $A = (a_{ij})$ und die gegebene Basis $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$. Dann gilt $a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$, also

$$a_{ij} = \int_0^1 t^{4-i} \cdot t^{4-j}\,dt = \left[\frac{1}{9-i-j} t^{9-i-j}\right]_0^1 = \frac{1}{9-i-j}.$$

Damit erhält man

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix}.$$

b) Wegen $k_B(2x^2 + x) = (0, 2, 1, 0)^\top$ und $k_B(x^3 - x^2 + x + 1) = (1, -1, 1, 1)^\top$ folgt:

$$\langle 2x^2 + x, x^3 - x^2 + x + 1 \rangle = (0, 2, 1, 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{8}{15}, \frac{13}{20}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{113}{60}$$

(Das läßt sich natürlich durch Integration überprüfen.)

c)

$$\begin{aligned} d(f_1, f_2) &= \|f_1 - f_2\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x - 1)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1\,dx} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{41}{30}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 / 2 / 4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 0 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3, \mathbb{C})$.

a) Geben Sie die hermitesche Sesquilinearform $\langle\ ,\ \rangle_A$ explizit an.

b) Untersuchen Sie $\langle\ ,\ \rangle_A$ auf positive Definitheit.

c) Beweisen Sie, dass

$$\langle\ ,\ \rangle : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \mapsto x_1\overline{y}_1 + i\,x_1\overline{y}_3 + 2x_2\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_3 - i\,x_3\overline{y}_1 + x_3\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 \end{cases}$$

eine hermitesche Sesquilinearform ist.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle_A &= x^\top \cdot A \cdot \overline{y} \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 0 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + ix_1\overline{y}_3 + (1-i)x_2\overline{y}_1 - ix_2\overline{y}_3 - ix_3\overline{y}_1 + ix_3\overline{y}_2 + 2x_3\overline{y}_3 \end{aligned}$$

b) $\langle\ ,\ \rangle_A$ ist nicht positiv definit, denn z. B. gilt für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$: $\langle x,x\rangle_A = 0$.

c) Man kann entweder durch viel Schreibarbeit die Bedingungen für eine hermitesche Sesquilinearform nachprüfen, oder man erkennt (bei fest gewählter Standardbasis)

$$\langle x,y\rangle = (x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 1 \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \overline{y}_3 \end{pmatrix}.$$

Da A hermitesch ist ($A = \overline{A}^\top$), folgt aus Lemma 1.1, daß $\langle\ ,\ \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform ist.

Zusatzaufgabe (4 / 3 / 3 Punkte)

Eine lineare Abbildung $p : V \longrightarrow V$ eines Vektorraumes V in sich heißt **Projektion** von V, falls $p^2 = p$ gilt.
Zeigen Sie:

a) Ist p eine Projektion von V, so gilt $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

b) Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum von V, so gibt es stets eine Projektion p von V mit $U = \operatorname{Im} p$.

c) Geben Sie für $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x,y,z)\,|\,2x+y-z=0\}$ eine Projektion p wie unter b) durch Angabe der Bilder einer Basis von $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

a) $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$ ist ein Untervektorraum von V. Wir zeigen zunächst $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p = V$.
Jedes $x \in V$ läßt sich in der Form $x = p(x) + (x - p(x))$ schreiben. Dafür gilt $p(x) \in \operatorname{Im} p$ und $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$, denn $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$.
Damit ist $V = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$ gezeigt, und es bleibt $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$ zu zeigen:
Sei $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Wegen $x \in \operatorname{Ker} p$ gilt $p(x) = 0$. Wegen $x \in \operatorname{Im} p$ gibt es ein $u \in V$ mit $x = p(u)$. Hierauf wenden wir p an und erhalten $p(x) = p(p(u)) = p(u)$, da $p \circ p = p$. Mit $p(u) = x$ und $p(x) = 0$ folgt $x = 0$.

b) Ist U ein Untervektorraum von V, so sei W ein Komplement von U in V, d. h. W ist ein Untervektorraum mit $U \oplus W = V$. $p : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $p(x) = p(u + w) = u$, falls $u + w$ die eindeutige Darstellung von x mit $u \in U$ und $w \in W$ ist. Für p gilt:
1) p ist linear. (ist klar, Nachrechnen!)
2) $p^2 = p$ (denn $p^2(x) = p(p(x)) = p(p(u + w)) = p(u) = u = p(x)$)
3) $U = \operatorname{Im} p$ (klar)

c) Es ist $U = \mathrm{Span}\,\{(1,-2,0),(0,1,1)\}$. Wir wählen ein Komplement W von U in $\mathbb{R}^3$, z.B. $W = \mathrm{Span}\,\{(2,1,-1)\}$. ($W$ ist die Gerade durch den Nullpunkt senkrecht zu U.) p definieren wir wie in b), d.h. p ist der durch $p(2,1,-1) = (0,0,0)$, $p(1,-2,0) = (1,-2,0)$ und $p(0,1,1) = (0,1,1)$ eindeutig bestimmte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.
(Anschaulich haben wir p dadurch als übliche senkrechte Projektion auf die Ebene U definiert. Natürlich läßt sich W auch als jede andere Gerade durch den Ursprung wählen, die nicht in U liegt. Die dann entstehende Projektion nennt man die Projektion längs W auf U.)

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 2. Mai 2006

3. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3 / 7 Punkte)

a) Bestimmen Sie für den euklidischen Raum U aus Übungsblatt 2, Aufgabe 1 b) eine Orthonormalbasis.

b) Bestimmen Sie im Vektorraum P_3 der reellen Polynome von Grad ≤ 3 eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$).

Lösung:

a) Wir starten mit der Basis B_1 aus 1 c) und führen das Verfahren von Schmidt durch. Wegen $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 1$ ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$ und $\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = 1$ ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entsprechend sieht man, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ schon orthogonal zu v_1 und v_2 ist. Mit $\mathrm{Spur}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \mathrm{Spur}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2$ folgt $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine gesuchte ONB von U.

b) Wir starten mit der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ von P_3. Wegen $\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\,dt = 1$ ist $w_1 := 1$ schon normiert. Nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir jetzt

$$w = x - \langle x,1\rangle\,1 = x - \frac{1}{2}\,, \qquad \text{da } \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

$$\langle w,w\rangle = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12} \quad\Longrightarrow\quad \|w\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,.$$

Es folgt: $w_2 := (2x-1)\sqrt{3}$.
Das Verfahren wird iteriert.

$$w = x^2 - \langle x^2,1\rangle\,1 - \langle x^2,(2x-1)\sqrt{3}\rangle\,(2x-1)\sqrt{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\|w\|^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\,dx = \frac{1}{180} \quad\Longrightarrow\quad \|w\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

Damit wird $w_3 := (6x^2 - 6x + 1)\sqrt{5}$. Weiter:

$$\begin{aligned}
w &= x^3 - \langle x^3,1\rangle\,1 - \langle x^3,(2x-1)\sqrt{3}\rangle\,(2x-1)\sqrt{3} \\
&\quad -\langle x^3,(6x^2-6x+1)\sqrt{5}\rangle\,(6x^2-6x+1)\sqrt{5} \\
&= x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{20}(2x-1) - \frac{1}{4}(6x^2-6x+1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20} \\
\|w\|^2 &= \int_0^1 (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20})^2\,dx = \frac{1}{2800} \\
w_4 &:= \sqrt{2800}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}) = (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ist eine Orthonormalbasis von P_3.

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Im euklidischen Vektorraum $V = \mathcal{C}[-1,1]$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ sei $U := \{f \in V\,;\, f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\,\}$.
(U ist ein Teilraum von V, der Raum der geraden Funktionen; kein Beweis nötig.)
Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V.

b) Es sei $U = \mathrm{Span}\,\{(0,1,0,i), (i,0,1,0), (0,i,i,0)\}$ und $\langle x, y\rangle = x^\top \cdot \overline{y}$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie orthonormale Basen von U und von $U^\perp$.

Lösung:

a) Jede Funktion $l \in V$ läßt sich eindeutig als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion h (d. h. $h(x) = -h(-x)$ für alle x) schreiben. Aus dem Ansatz $l(x) = g(x)+h(x)$ folgt nämlich $l(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$, also $g(x) = \frac{1}{2}(l(x) + l(-x))$ und $h(x) = \frac{1}{2}(l(x) - l(-x))$, und diese Funktionen g und h sind gerade bzw. ungerade Funktionen. Nun folgt:

$$
\begin{aligned}
l \in U^\perp &\iff \langle l, f\rangle = 0 \quad \text{für jedes } l \in U \\
&\iff \int_{-1}^{1} l(x)f(x)\,dx = 0 \\
&\iff \int_{-1}^{1} (g(x) + h(x))f(x)\,dx = 0 \quad \text{falls } l \text{ wie oben aufgespalten} \\
&\iff \underbrace{\int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_{-1}^{1} h(x)f(x)\,dx}_{II} = 0
\end{aligned}
$$

Das Integral II ist stets 0, da h eine ungerade und f eine gerade Funktion ist, der Integrand also ungerade ist. Im Integral I sind f und g gerade Funktionen. I ist genau dann 0 für alle $f \in U$, wenn $g = 0$ ist. Also folgt:

$$l \in U^\perp \iff l = h \iff l \text{ ist ungerade Funktion.}$$

Damit erhält man $U^\perp = \{f \in V\,;\, f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\,\}$.

b) Die Vektoren $(0,1,0,i)$ und $(i,0,1,0)$ sind schon orthogonal. Normierung liefert also $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i)$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1,0)$. Mit $v = (0,i,i,0)$ wird nun $w = v - \langle v, w_1\rangle w_1 - \langle v, w_2\rangle w_2$ gesetzt, also

$$w = (0,i,i,0) - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i) - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2})\,.$$

Wegen $\|w\| = 1$ folgt $w_3 = w$. $B = (w_1, w_2, w_3)$ ist eine ONB von U. Um eine ONB von $U^\perp$ zu erhalten, ergänzen wir B zu einer Basis des $\mathbb{C}^4$, z.B. durch e_4. Führen wir nun das Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren mit w_1, w_2, w_3, e_4 weiter, so liefert der sich ergebende Vektor w_4 eine ONB von $U^\perp$. Mit $v = e_4$ folgt

$$
\begin{aligned}
w &= v - \langle v, w_1\rangle w_1 - \langle v, w_2\rangle w_2 - \langle v, w_3\rangle w_3 \\
&= (0,0,0,1) + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,i) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4}, \frac{i}{4}, -\frac{i}{4}, \frac{1}{4})
\end{aligned}
$$

und $w_4 = \frac{1}{\|w\|}w = (-\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2})$ ist eine gesuchte ONB von $U^\perp$.

Aufgabe 3 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^2$ die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung eine Drehung ist.

a) Spiegeln Sie zunächst an der durch $y = x$ gegebenen Geraden, anschließend an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Welche Matrix beschreibt die entstehende Drehung? Um welchen Winkel wird gedreht?

Lösung:
a) φ_1, φ_2 seien die Spiegelungen, A_1, A_2 die zugehörigen Spiegelungsmatrizen. Dann sind A_1 und A_2 orthogonal und $\det A_1 = \det A_2 = -1$. Zu $\varphi_1 \circ \varphi_2$ gehört die Matrix $A_1 \cdot A_2$; diese ist orthogonal und $\det(A_1 \cdot A_2) = (-1) \cdot (-1) = 1$; also ist $A_1 \cdot A_2$ eine Drehmatrix, d.h. $\varphi_1 \circ \varphi_2$ ist eine Drehung.

b) φ_2 sei die Spiegelung an $y = x$, φ_1 die Spiegelung an $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Es ist $\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Die Spiegelachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ schließt mit der positiven y-Achse einen Winkel von $30°$ ein, also schließt $\varphi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ mit der positiven y-Achse einen Winkel von $60°$ ein. Damit wird bei $\varphi_1 \circ \varphi_2$ der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ um $90° + 60° = 150°$ gedreht.
$A = \begin{pmatrix}\cos 150° & -\sin 150°\\ \sin 150° & \cos 150°\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ beschreibt also die Drehung $\varphi_1 \circ \varphi_2$, eine Drehung um $150°$.
Man kann natürlich auch die einzelnen Abbildungsmatrizen bestimmen und deren Produkt bilden.

Zusatzaufgabe (6 / 4 Punkte)

a) Es seien U, W Untervektorräume des endlich dimensionalen euklidischen Vektorraums V.
Zeigen Sie: $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

b) Zeigen Sie: Ist $B := \{a, b, c\}$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^3$ und sind α, β, γ die Winkel zwischen $x \neq 0$ und a, b, c, so gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Lösung:
a) (i) Beh.: $(U \cap W)^\perp \subset U^\perp + W^\perp$
Es ist $U^\perp, W^\perp \subset U^\perp + W^\perp$. Damit gilt nach Stundenübung $(U^\perp + W^\perp)^\perp \subset U^{\perp\perp} = U$ und $(U^\perp + W^\perp)^\perp \subset W^{\perp\perp} = W$. Also folgt $(U^\perp + W^\perp)^\perp \subset U \cap W$. Damit liefert wieder die Stundenübung $(U \cap W)^\perp \subset U^\perp + W^\perp$.
(ii) Beh.: $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$
Es ist $U \cap W \subset U, W$, also nach Stundenübung $U^\perp \subset (U \cap W)^\perp$ und $W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Da $(U \cap W)^\perp$ ein Untervektorraum ist, ist dann auch $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$.

b) Es sei $x = a_1 a + a_2 b + a_3 c$. Bildet man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit a, mit b und mit c und berücksichtigt, dass $\{a, b, c\}$ eine Orthonormalbasis ist, so folgt:

$$(*) \qquad \langle x, a\rangle = a_1 \quad , \quad \langle x, b\rangle = a_2 \quad , \quad \langle x, c\rangle = a_3 .$$

Ferner gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Es ist

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, a\rangle}{\|x\|\ \|a\|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{\langle x, b\rangle}{\|x\|\ \|b\|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{\langle x, c\rangle}{\|x\|\ \|c\|} .$$

Daraus folgt nun mit $(*)$ und $\|a\|^2 = \|b\|^2 = \|c\|^2 = 1$:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{\|x\|^2} + \frac{a_2^2}{\|x\|^2} + \frac{a_3^2}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1 .$$

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 15. Mai 2006

4. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (3 / 7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $O(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^\top\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie: Ist $A \in O(n)$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist A eine Diagonalmatrix.

Lösung:

a) Es ist $E \in O(n)$. Sind $A, B \in O(n)$, so folgt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^\top \cdot A^\top = (AB)^\top ,$$

also ist $AB \in O(n)$. Schließlich ist mit $A \in O(n)$ auch $A^{-1} \in O(n)$; denn

$$(A^{-1})^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top .$$

b) Zunächst gilt: Ist

$$(*) \qquad A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

orthogonal, so ist A^* orthogonal. Man berechnet nämlich

$$E_n = A^\top A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & (A^*)^\top A^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) ,$$

also $(A^*)^\top A^* = E_{n-1}$, d. h. A^* ist orthogonal.
Wir beweisen die Behauptung nun durch *vollständige Induktion* über n.
Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Sei also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ orthogonal. Wir berechnen $A^\top A$ und müssen E_n erhalten.
Zunächst folgt $a_{11}^2 = 1$, also $a_{11} \neq 0$. Multiplizieren wir weiter die erste Zeile von $A^\top$ mit den Spalten von A, so erhalten wir $a_{11}a_{12}, \dots, a_{11}a_{1n}$. Alle diese Elemente müssen 0 sein. Wegen $a_{11} \neq 0$ folgt also $a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$. A hat also die Gestalt aus $(*)$, wobei A^* eine obere Dreiecksmatrix und orthogonal ist. Auf A^* läßt sich also die Induktionsvoraussetzung anwenden, d. h. A^* ist eine Diagonalmatrix. Damit ist A als Diagonalmatrix nachgewiesen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bezüglich der Standardbasis S werde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellt durch

$$M_S^S(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass f ein orthogonaler Endomorphismus ist, und geben Sie eine Basis B an, so dass $M_B^B(f)$ die Gestalt aus Theorem 3.2 besitzt.

Lösung:

Die gegebene Matrix bezeichnen wir auch mit A. Zunächst rechnet man $AA^\top = E$ nach, d.h. f ist ein orthogonaler Endomorphismus.

An der Matrix erkennt man leicht, dass $M_S^S(f)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ gilt. Also ist $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 und damit ein Vektor in Richtung der Drehachse.

Wir bestimmen nun eine Basis B, bezüglich der die f darstellende Matrix die Gestalt aus Theorem 3.2 besitzt. Dazu wählen wir als Basis die Orthonormalbasis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^\top \quad , \quad b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^\top \quad , \quad b_3 = b_1 \times b_2 = (0,0,1)^\top .$$

Mit $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $W^{-1} = W^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$W^{-1}M_S^S(f)W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Aus $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\alpha = \frac{\pi}{6}$. f ist also eine Drehung um b_1 um $\frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $0 \neq a \in V$ sei $\varphi_a : V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi_a(x) = x - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a$. Zeigen Sie:

(i) $\varphi_a(a) = -a$ (ii) $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}$ (iii) φ_a ist selbstadjungiert (iv) φ_a ist orthogonal

Lösung:

Zunächst folgt leicht, dass φ_a linear ist, da $\psi_1(x) = x$ und $\psi_2(x) = \frac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a$ ($\psi_i : V \longrightarrow V$) linear sind, und $\varphi_a = \psi_1 - 2\psi_2$ ist.

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)}\quad \varphi_a(a) & = & a - 2\dfrac{\langle a,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a = -a \\
\text{(ii)}\quad \varphi_a(\varphi_a(x)) & = & \varphi_a(x - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a) = \varphi_a(x) - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}\varphi_a(a), \qquad \text{da } \varphi_a \text{ linear} \\
 & = & x - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a + 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a \qquad \text{nach (i)} \\
 & = & x \\
\text{(iii)}\quad \langle\varphi_a(x), y\rangle & = & \langle x - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a, y\rangle = \langle x,y\rangle - 2\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}\langle a,y\rangle \\
 & = & \langle x, y - 2\dfrac{\langle a,y\rangle}{\langle a,a\rangle}a\rangle \text{ , da } \langle a,x\rangle = \langle x,a\rangle \\
 & = & \langle x, \varphi_a(y)\rangle \\
\text{(iv)}\quad \langle\varphi_a(x), \varphi_a(y)\rangle & = & \langle x, \varphi_a(\varphi_a(y))\rangle = \langle x,y\rangle \text{ nach (iii) und (ii)}
\end{array}$$

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;K)$ heißt **idempotent**, falls $A^2 = A$ gilt.
Es sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n;K)$ äquivalent sind:

(i) $A^2 = E$

(ii) $\dfrac{1}{2}(E-A)$ ist idempotent.

(iii) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ± 1.

Lösung:
Wir schließen (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) . Es sei $B := \frac{1}{2}(E-A)$.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) :
Es sei $A^2 = E$. Dann gilt

$$B^2 = \frac{1}{4}(E-A)(E-A) = \frac{1}{4}(E^2 - A - A + A^2) = \frac{1}{2}(E-A) = B\ ,$$

also ist B idempotent.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) :
Wir zeigen: Für alle $x \in K^n$ gilt $Ax = x$ oder $Ax = -x$.
Da B idempotent ist, gilt nach Hausübung 2 (Zusatzaufgabe): $\mathrm{Ker}\, B \oplus \mathrm{Im}\, B = K^n$.
Ist nun $x \in K^n$ mit $x \in \mathrm{Ker}\, B$, so ist $Bx = 0$, d. h. $\frac{1}{2}(E-A)x = 0$, also $Ax = x$.
Ist $x \in K^n$ mit $x \in \mathrm{Im}\, B$, so gibt es $y \in K^n$ mit $By = x$. Wir multiplizieren von links mit B und erhalten unter Benutzung von $B^2 = B$: $x = Bx$. Dies liefert $\frac{1}{2}(E-A)x = x$ oder $Ax = -x$.
Wir haben gezeigt, daß jeder Vektor des K^n Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 bzw. zum Eigenwert -1 ist. Also gibt es eine Basis des K^n aus Eigenvektoren. A ist diagonalisierbar und die Diagonalmatrix enthält auf der Diagonalen die Eigenwerte von A, also nur die Elemente ± 1.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) :
Nach Voraussetzung gibt es eine invertierbare Matrix W mit

$$W^{-1}AW = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$E = (W^{-1}AW)(W^{-1}AW) = W^{-1}A^2W$$

Multiplikation von links mit W sowie von rechts mit W^{-1} ergibt $A^2 = E$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. Mai 2006

5. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad≤ 1 mit dem Skalarprodukt $\langle p,q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Der Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ sei definiert durch $f(p) := p'$. Ist f selbstadjungiert?

Bestimmen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus f^{adj} (z.B. durch Angabe einer Abbildungsmatrix).

Lösung:

Wir wählen die Orthonormalbasis $B = \{1, (2x-1)\sqrt{3}\}$ von V - siehe 3. Übungsblatt, Aufgabe 1 b).

Dann gilt $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da diese Matrix nicht symmetrisch ist, ist f nicht selbstadjungiert.

Zur Berechnung der Abbildungsmatrix $M_B^B(f^{\mathrm{adj}})$ benutzen wir die Definition der adjungierten Abbildung. Für alle $v, w \in V$ muß nämlich gelten:

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^{\mathrm{adj}}(w)\rangle$$

Das Skalarprodukt wird bezüglich B durch die Einheitsmatrix dargestellt. Bezeichnen wir mit $k_B(v)$ den Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B, so besagt diese Gleichung:

$$(M_B^B(f)k_B(v))^\top \cdot k_B(w) = k_B(v)^\top (M_B^B(f))^\top k_B(w) \overset{(*)}{=} k_B(v)^\top M_B^B(f^{\mathrm{adj}})k_B(w) \qquad \text{für alle } v, w \in V\,.$$

Jetzt benötigen wir die folgende Aussage über Matrizen:

Gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $x^\top Ay = x^\top By$, so ist $A = B$.

Beweis: Es ist $e_i^\top Ab_j = a_{ij}$. Damit folgt durch Spezialisierung auf die Vektoren der Standardbasis $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j, also $A = B$.

Damit folgt aus $(*)$: $\quad M_B^B(f^{\mathrm{adj}}) = (M_B^B(f))^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Es gilt allgemein $M_B^B(f^{\mathrm{adj}}) = (M_B^B(f))^\top$ für eine Orthonormalbasis B, wie wir gerade gezeigt haben.

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie jeweils Index und Signatur der Form $\langle\ ,\ \rangle_A$, wobei

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob es eine reelle invertierbare Matrix W gibt mit $A = W^\top BW$, und bestimmen Sie gegebenenfalls solch eine Matrix W.

Lösung:

a) Wir wenden das Verfahren aus der Stundenübung an und führen beide genannten Verfahren je einmal durch. Bei A führen wir an E elementare Zeilenumformungen durch. Rechts werden jeweils die Additionsanweisungen für die Zeilenumformungen angegeben.

$$
\begin{array}{|rrr|rrr|rr|}
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
-2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 1 \\
\hline
1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & & \\
0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Die den durchgeführten Zeilenumformungen entsprechenden Spaltenumformungen bestehen darin, das $2-$fache der ersten Spalte (der linken Matrix) zur zweiten Spalte zu addieren und anschließend das $(-1)-$fache der ersten Spalte zur dritten Spalte. Das führt auf die folgende Matrix, bei der dann gleich wieder Zeilenumformungen an Zeile 3 durchgeführt werden.

$$
\begin{array}{|rrr|rrr|c|}
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\
0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 4 & 2 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

Führt man nun noch die entsprechende Spaltenumformung durch und multipliziert die letzte Zeile und Spalte jeweils mit 3, so erhält man die folgende Endmatrix:

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 39 & 5 & 4 & 3
\end{array}\right).
$$

A ist nun diagonalisiert.

Man erkennt: A hat den Index 2 und die Signatur 1. Eine Matrix W, die auf die angegebene Diagonalmatrix transformiert, ist die Matrix $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Bei B ist $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1,2,3,4\}$. Nach unserem Verfahren addieren wir wegen $a_{12} \neq 0$ Zeile 2 zu Zeile 1 und Spalte 2 zu Spalte 1 und führen dann den Kalkül entsprechend weiter. Hier wenden wir auf E die elementaren Spaltenumformungen an; angegeben sind die zugehörigen Zeilenumformungen:

$$
\begin{array}{|rrrr|c|}
0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & \\
2 & 2 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|rrrr|rrr|}
2 & 1 & -2 & 4 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 & & \\
-2 & -1 & 0 & 1 & & 1 & \\
4 & 2 & 1 & 0 & & & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrr|c|}
2 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -2 & 5 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 5 & -8 & 1 \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \\
1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|rrrr|}
2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

A besitzt den Index 2 und die Signatur 0.
Eine Matrix W, die auf die erzeugte Diagonalmatrix transformiert, lautet

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wie bei a) bringen wir A und B (durch Zeilenumformungen) auf Diagonalgestalt.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Da A und B gleichen Index und gleiche Signatur haben gibt es eine Matrix W mit $W^\top BW = A$. Solch eine Matrix findet man, indem man A und B zunächst auf die gleiche Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ transformiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{P^\top} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}_{Q^\top} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}_{Q}$$

Nun erhält man $A = (P^\top)^{-1} \cdot Q^\top \cdot B \cdot Q \cdot P^{-1} = \underbrace{(QP^{-1})^\top}_{W^\top} B \underbrace{(QP^{-1})}_{W}$ und damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = QP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{3}\sqrt{5} - 5 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{6}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (2 / 4 / 4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

c) $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Lösung:

a) Wegen $4 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$ und $\det(A) > 0$ folgt die positive Definitheit sofort aus dem Hurwitz-Kriterium.

b) Man kann wieder das Hurwitz-Kriterium anwenden, muß aber bis $\det(A)$ rechnen. Besser ist das Verfahren der Stundenübung zur Erzeugung der Normalform des Satzes von Sylvester, das man hier nur auf A anzuwenden braucht.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 14 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 14 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 17 & -101 \end{pmatrix}$$

Hier erkennt man, dass beim letzten Schritt unten rechts eine negative Zahl entsteht. Also ist A nicht positiv definit.

c) Wir betrachten den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner n versehen mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ und darin die Basis $B = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$. Das Skalarprodukt wird in B gerade durch die Matrix A dargestellt, da $\int_0^1 x^k\,dx = \dfrac{1}{k+1}$. Also ist A positiv definit.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ und $\chi_A = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sei das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie:
A ist genau dann positiv definit, wenn für $j = 0, 1, \dots, n$ gilt: $(-1)^j a_j > 0$.

Lösung:
Da A eine hermitesche Matrix ist, sind alle Eigenwerte reell und χ_A zerfällt in Linearfaktoren. Sei also $\chi_A(x) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - x)$. Multipliziert man dieses Produkt aus und berechnet den Vorfaktor von x^j, also a_j, so muss man j-mal den Faktor $-x$ und $n-j$-mal einen Faktor der Form λ_k wählen. Ein Koeffizientenvergleich mit der vorgegebenen Form von χ_A ergibt daher

$$a_j = (-1)^j \Big(\sum_{1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_{n-j} \le n} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_{n-j}} \Big).$$

Sei nun A positiv definit. Dann sind nach Vorlesung alle Eigenwerte von A positiv. Damit ist auch jeder Term hinter dem Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung positiv und es ergibt sich die gewünschte Aussage über die Koeffizienten von χ_A.
Nun gelte die Bedingung über die Koeffizienten. Wir zeigen, dass alle Eigenwerte von A positiv sind. Daraus folgt dann nach Vorlesung die positive Definitheit von A.
Angenommen, c ist ein Eigenwert von A mit $c \le 0$. Dann ist $c^j \le 0$ für ungerades j und $c^j \ge 0$ für gerades j.
Nach Voraussetzung ist daher $a_j c^j \ge 0$ für ungerades und $a_j c^j \ge 0$ für gerades j. Es ist $a_0 > 0$ nach Voraussetzung und da alle anderen Terme $a_j c^j \ge 0$ sind, folgt $\sum_{j=0}^{n} a_j c^j = \chi_A(c) > 0$, ein Widerspruch zu $\chi_A(c) = 0$ (c ist Eigenwert von A!).

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 29. Mai 2006

6. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (6 / 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils $h := \mathrm{ggT}(f, g)$ in $K[x]$, und geben Sie Polynome $q_1, q_2 \in K[x]$ an mit $h = q_1 f + q_2 g$.

a) $f = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ und $g = x^4 + x^3 + x - 1$ in $\mathbb{R}[x]$.

b) $f = x^5 + x^4 + x^2 + x$ und $g = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$

Lösung:

a) Jeweils durch Polynomdivision erhält man:

$$\begin{aligned} f &= (2x-1)(x^4 + x^3 + x - 1) + \underbrace{(-2x^3 + 4x - 2)}_{=p_1} \\ g &= (-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}) \cdot p_1 + \underbrace{(2x^2 + 2x - 2)}_{=p_2} \\ p_1 &= (-x + 1) \cdot p_2 \end{aligned}$$

Also gilt: $h = \mathrm{ggT}(f, g) = \frac{1}{2}p_2 = x^2 + x - 1$

Rückwärtseinsetzen liefert:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}g + (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})p_1 = \frac{1}{2}g + (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})(f - (2x-1)g) \\ &= \underbrace{(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})}_{q_1} f + \underbrace{(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4})}_{q_2} g \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 &= x(x^5 + x^4 + x^2 + x) \ + \ x^4 + x^2 + 1 \\ x^5 + x^4 + x^2 + x &= (x+1)(x^4 + x^2 + 1) \ + \ x^3 + 1 \\ x^4 + x^2 + 1 &= x(x^3 + 1) \ + \ x^2 + x + 1 \\ x^3 + 1 &= (x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Also ist $h = \mathrm{ggT}(f, g) = x^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned} h &= (x^4 + x^2 + 1) + x(x^3 + 1) = (x^4 + x^2 + 1) + x(f + (x+1)(x^4 + x^2 + 1)) \\ &= (x^4 + x^2 + 1)/x^2 + x + 1) + xf = (g + xf)(x^2 + x + 1) + xf \\ &= (x^3 + x^2)f + (x^2 + x + 1)g \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

f, g und h seien Polynome über dem Körper K. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau dann Polynome p, q mit $pf + qg = h$, wenn $\mathrm{ggT}(f, g) \mid h$.

b) Die Ideale $\langle f, g \rangle$ und $\langle \mathrm{ggT}(f, g) \rangle$ sind gleich.

Lösung:

a) Sei $s = \mathrm{ggT}(f, g)$.

Es gebe zunächst h_1, h_2 mit $h_1 f + h_2 g = h$. Da $s|f$ und $s|g$, gibt es r_1 und r_2 mit $sr_1 = f$ und $sr_2 = g$. Einsetzen liefert $s(h_1 r_1 + h_2 r_2) = h$, also $s|h$.

Zum Beweis der Umkehrung sei s ein Teiler von h, d. h. es gibt ein Polynom r mit $sr = h$. Nach a) gibt es Polynome p_1, p_2 mit $p_1 f + p_2 g = s$. Dann ist $p_1 r f + p_2 r g = h$, also erfüllen $h_1 := p_1 r$ und $h_2 := p_2 r$ die Forderung.
b) Nach a) gilt $\mathrm{ggT}(f,g) \in \langle f, g\rangle$, also $\langle \mathrm{ggT}(f,g)\rangle \subset \langle f, g\rangle$.
Sei $h \in \langle f, g\rangle$, etwa $h = p_1 f + p_2 g$. Nach b) folgt $\mathrm{ggT}(f,g)|h$, d.h. $h = q \cdot \mathrm{ggT}(f,g)$, also $h \in \langle \mathrm{ggT}(f,g)\rangle$.

Aufgabe 3 (3 / 3 / 4 Punkte)
Stellen Sie jeweils die Polynome über dem genannten Körper K in der Form des Satzes 6.4 dar (also als Produkt aus Polynomen vom Grad 1 und ein Polynom ohne Nullstellen in K).
a) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 4x + 4$ und $x^4 + 8x^2 + 15$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.
b) f und g aus Aufgabe 1 b) über $\mathbb{F}_2$.
c) $x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{18}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{9}$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung:
a) Es sei $f = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 4x + 4$ und $g = x^4 + 8x^2 + 15$.
Man rät zweimal 1 als Nullstelle von f, ferner ist -2 eine Nullstelle. Polynomdivision liefert daher $f = (x-1)^2(x+2)(x^2+x+2)$. $x^2 + x + 2$ besitzt in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, also haben wir die gesuchte Zerlegung über $\mathbb{R}$ gefunden. Über $\mathbb{C}$ gilt (Nullstellen von $x^2 + x + 2$ bestimmen):

$$f = (x-1)^2(x+2)(x - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}\,i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}\,i))$$

Bei g gilt $g = (x^2+3)(x^2+5)$. Diese beiden quadratischen Polynome besitzen in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen. Also besitzt g in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen und g selbst ist die gesuchte Zerlegung.
Über $\mathbb{C}$ besitzt g genau 4 Nullstellen, die man an $g = (x^2+3)(x^2+5)$ erkennt. Die gesuchte Zerlegung lautet daher

$$g = (x - \sqrt{3}\,i)(x + \sqrt{3}\,i)(x - \sqrt{5}\,i)(x + \sqrt{5}\,i)\ .$$

b) Aus a) folgt $f = (x^2 + x + 1)(x^3 + x)$. Nun besitzt $x^2 + x + 1$ keine Nullstelle in $\mathbb{F}_2$. $x^3 + x$ läßt sich weiter zerlegen, und man erhält: $f = x(x+1)^2(x^2+x+1)$.
Bei g erkennt man direkt, dass es keine Nullstellen in $\mathbb{F}_2$ besitzt ($g(0) = g(1) = 1$). Also ist g die gesuchte Zerlegung.

c) Wir bezeichnen das Polynom mit h und suchen Nullstellen von h. Es ist $h(b) = 0$ genau dann, wenn $18h(b) = 0$ ist. Nach der Stundenübung kennen wir die Kandidaten für rationale Nullstellen. Es sind Brüche $\frac{r}{s}$ mit $r|2$ und $s|18$. So findet man die Nullstellen $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Polynomdivision liefert $h = (x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{6})(x^3 + 2)$. $x^3 + 2$ besitzt (wieder nach Stundenübung) keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$. Also ist die gesuchte Zerlegung von h gefunden.

Zusatzaufgabe (3 / 3 / 4 Punkte)
Es seien I_1 und I_2 Ideale im Polynomring $K[x]$. Beweisen oder widerlegen Sie:
a) $I_1 \cap I_2$ ist ein Ideal.
b) $I_1 \cup I_2$ ist ein Ideal.
c) $I_1 + I_2$ ist ein Ideal. (Dabei ist $I_1 + I_2 := \{P + Q \,|\, P \in I_1 \text{ und } Q \in I_2\}$.)

Lösung:
a) ist wahr. Beweis:
(I1) ist erfüllt, da der Durchschnitt von Untergruppen eine Untergruppe ist.
Zu (I2): Sei $P \in I_1 \cap I_2$ und $Q \in K[x]$.
Dann ist $P \in I_1$, also $QP \in I_1$, da I_1 ein Ideal ist. Ferner gilt auch $P \in I_2$, also $QP \in I_2$, da I_2 ein Ideal ist. Folglich ist $QP \in I_1 \cap I_2$.
b) ist falsch.
Gegenbeispiel: $I_1 = \langle x\rangle$, $I_2 = \langle 1 + x\rangle$, K beliebig.
Es ist $1 \notin I_1 \cup I_2$, denn $1 \notin I_1$ und $1 \notin I_2$. Wäre $I_1 \cup I_2$ ein Ideal, so müßte nach (I1) gelten: $(1 + x) - x = 1 \in I_1 \cup I_2$, Widerspruch!

c) ist wahr. Beweis:

(I1) gilt, da $I_1 + I_2$ eine additive Untergruppe von $K[x]$ ist.

Da $+$ kommutativ ist, ist mit $P, Q \in I_1 + I_2$ auch $P + Q \in I_1 + I_2$. Es gilt natürlich das Assoziativgesetz; ferner ist $0 \in I_1 + I_2$, da $0 \in I_1$ und $0 \in I_2$. Ebenfalls wegen der Kommutativität von $+$ erkennt man, daß zu $P = P_1 + P_2 \in I_1 + I_2$ das Polynom $-P_1 - P_2 \in I_1 + I_2$ invers ist.

(Bemerkung: Man beachte, daß hier die Kommutativität von $+$ benötigt wird. In beliebigen Gruppen ist mit Untergruppen U_1, U_2 die Menge $U_1 U_2$ i. a. keine Untergruppe!)

(I2) Sei $P \in K[x]$ und $Q \in I_1 + I_2$, d. h. $Q = Q_1 + Q_2$ $(Q_i \in I_i)$.

Es gilt $PQ = P(Q_1 + Q_2) = PQ_1 + PQ_2$, da $K[x]$ ein Ring ist. Es ist $PQ_1 \in I_1$, da I_1 ein Ideal ist und $PQ_2 \in I_2$, da I_2 ein Ideal ist. Also ist $PQ \in I_1 + I_2$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 12. Juni 2006

7. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (7 / 3 Punkte)

Bestimmen Sie bei den folgenden Matrizen jeweils das Minimalpolynom:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ idempotent

Lösung:

a) Man erkennt leicht $A - rE \neq 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $A^2 = 2A$, daher ist $\mu_A = x^2 - x$ $(= p_A)$.
Man berechnet $p_B = -(x-3)^2(x+3)$. Also kommen für μ_B nur die Polynome $x-3$, $x+3$, $(x-3)(x+3)$ und $-p_B$ in Frage. Man sieht $B - 3E \neq 0$ und $B + 3E \neq 0$ und berechnet $(B - 3E)(B + 3E) = 0$, also ist $\mu_B = (x - 3)(x + 3)$.
Für das charakteristische Polynom von C erhält man sofort

$$p_C = (x-2)^2((x-4)(x-3)-2) = (x-2)^3(x-5) \ .$$

Für μ_C gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

$$(x-2)\ ,\ (x-5)\ ,\ (x-2)^2\ ,\ (x-2)^3\ ,\ (x-2)(x-5)\ ,\ (x-2)^2(x-5)\ ,\ p_C\ .$$

(Es gibt sogar nur die letzten 3 Möglichkeiten, da μ_C die gleichen Linearfaktoren enthalten muß wie p_C - aber das ist in der Vorlesung noch nicht bewiesen worden!) Man rechnet nach:

$$C - 2E \neq 0\ ,\ C - 5E \neq 0\ ,\ (C-2E)^2 \neq 0\ ,\ (C-2E)(C-5E) \neq 0\ ,\ (C-2E)^2(C-5E) = 0\ .$$

Also gilt $\mu_C = (x-2)^2(x-5)$.

b) Sei $A \neq 0$ idempotent, d. h. $A^2 = A$, also $A^2 - A = 0$.
Ist $A = E$, so gilt $\mu_A = x - 1$, denn dies ist das normierte Polynom kleinsten Grades, welches E als Nullstelle besitzt.
Ist $A \neq E$, so ist $A^2 \neq A$ und wegen $A^2 - A = 0$ ist A Nullstelle des Polynoms $P = x^2 - x = x(x-1)$.
Also gilt $\mu_A \,|\, x(x-1)$. Wegen $\mu_A \neq x$ und $\mu_A \neq x - 1$ gilt $\mu_A = x(x-1)$.

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Beweisen Sie (ohne den Satz von Cayley-Hamilton zu benutzen):
Ist $A \in \mathrm{Mat}(2; K)$, so gilt $\mu_A | p_A$.

b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$. Zeigen Sie, dass A und $A^\top$ dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom haben.

Lösung:

a) Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so ist $p_A = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Damit berechnet sich $p_A(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = 0$. Also gilt $\mu_A|p_A$, nach Definition des Minimalpolynoms.

b) Es ist $p_A = \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^\top = \det(A^\top - \lambda E) = p_{A^\top}$.
Sei $q \in K[x]$ ein Polynom. Dann folgt aus den Rechenregeln für das Transponieren einer Matrix: $(q(A))^\top = q(A^\top)$. Ist also $q(A) = 0$, so auch $q(A^\top) = (q(A))^\top = 0$. Also gilt $\mu_A = \mu_{A^\top}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ simultan diagonalisierbar sind und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ an, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -1 & 8 \\ -4 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -10 \\ 6 & 7 & 3 & -9 \\ -2 & -5 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: 1 und 2 sind die Eigenwerte von B.

Lösung
Aus Platzgründen schreiben wir Vektoren als Zeilen.
Man berechnet zunächst das charakteristische Polynom $p_A(x) = (x+1)^2(x-3)^2$;
ferner $\mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{span}\{(0,0,1,0), (1,1,0,1)\}$ und $\mathrm{Eig}(A, 3) = \mathrm{span}\{(-1,1,0,0), (1,0,1,1)\}$.
Auf die Berechnung von p_B kann man nach dem Hinweis verzichten.
Es ist $\mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{span}\{(1,1,-1,1), (-1,-2,6,0)\}$ und $\mathrm{Eig}(B, 2) = \mathrm{span}\{(1,0,1,1), (5,3,0,5)\}$. Zu A und B existieren daher Basen aus Eigenvektoren, also sind A und B diagonalisierbar. Ferner rechnet man $AB = BA$ nach.
Damit sind die Voraussetzungen von Satz 7.1 erfüllt, also existiert eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren.
Wir starten mit $W = \mathrm{Eig}(A, -1)$ und berechnen $W_1 = W \cap \mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{span}\{(1,1,-1,1)\}$ und $W_2 = W \cap \mathrm{Eig}(B, 2) = \mathrm{span}\{(3,3,-2,3)\}$.
Nun setzen wir $W = \mathrm{Eig}(A, 3)$ und berechnen wieder $W_1 = W \cap \mathrm{Eig}(B, 1) = \mathrm{span}\{(2,1,3,3)\}$ und $W_2 = W \cap \mathrm{Eig}(B, 2) = \mathrm{span}\{(1,0,1,1)\}$.
Diese 4 berechneten Vektoren bilden eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren und mit

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \; T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Zusatzaufgabe (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$, $A \neq 0$ und für das Minimalpolynom μ_A gelte: Ist Q ein Teiler von μ_A, so ist $\deg(Q) = 0$ oder $\deg(Q) = n$.
Zeigen Sie, dass dann $K[A]$, versehen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen, ein Körper ist.

Lösung:
Da $K[A]$ ein Vektorraum ist, ist $(K[A], +)$ eine abelsche Gruppe.
Wegen $A \neq 0$ ist $A^0 = E \in K[A]$, also besitzt die Struktur ein Einselement. Die Distributivgesetze gelten für Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation; ferner gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation. Die Multiplikation ist auch kommutativ, denn:
Sind $M, N \in K[A]$, so gibt es Polynome $f, g \in K[x]$ mit $M = f(A)$ und $N = g(A)$. Nun ist

$$MN = f(A)g(A) = (fg)(A) = (gf)(A) = g(A)f(A) = NM .$$

Zu zeigen bleibt also: Ist g ein Polynom mit $g(A) \neq 0$ (Nullmatrix), so existiert ein $B \in K[A]$, also ein Polynom h mit $g(A)h(A) = E$. (Und nur hierfür braucht man die in der Aufgabe genannten Voraussetzungen!)
Es ist μ_A kein Teiler von g, da sonst $g = \mu_A h$, d.h. $g(A) = \mu_A(A)h(A) = 0$, im Widerspruch zu $g(A) \neq 0$. Da μ_A nach Voraussetzung keine echten Teiler besitzt, gilt $\mathrm{ggT}(\mu_A, g) = 1$. Nach der Stundenübung gibt es also Polynome h_1 und h_2 mit $1 = gh_1 + \mu_A h_2$. Wir setzen A ein und erhalten:

$$1(A) = E = (gh_1 + \mu_A h_2)(A) = g(A)h_1(A) + \mu_A(A)h_2(A) = g(A)h_1(A) , \quad \text{da } \mu_A(A) = 0 .$$

$h_1(A)$ ist also invers zu $g(A)$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 19. Juni 2006

8. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis B, so dass für den durch $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ gegebenen Endomorphismus f die Matrix $M_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, und geben Sie die Matrix $M_B^B(f)$ an.
Gehen Sie dabei nach dem Beweis des Satzes 8.1 der Vorlesung vor.

Lösung:
Man berechnet leicht $p_A = (x-2)(x-1)^3$ und erhält $\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{span}\{(-2,5,-4,1)^\top\} =: \mathrm{span}\{v_1\}$ sowie $\mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{span}\{(-1,3,-3,1)^\top\} =: \mathrm{span}\{v_2\}$ Wir setzen $B_1 := \{v_1, v_2, e_3, e_4\}$ und erhalten $M_{B_1}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Mit $U_1 = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und $W := \mathrm{span}\{e_3, e_4\}$ ist $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus W$. Betrachte $g : W \longrightarrow W$ mit $M_{A_1}^{A_1}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ für $A_1 := \{e_3, e_4\}$. Es ist $p_g = (x-1)^2$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $(0,0,-1,1)^\top =: v_3$. Wir ergänzen v_3 z.B. durch e_4 zu einer Basis A_2 von W. Dann ist $B = \{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ eine gesuchte Basis. Wegen $Av_3 = -v_1 + 4v_2 + v_3$ und $Ae_4 = -v_1 + 4v_2 + v_3 + e_4$ ist $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (1 / 1 / 3 / 5 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n; K)$. Zeigen Sie:
a) Ist A nilpotent und $A \neq 0$, so ist A nicht diagonalisierbar über K.
b) Ist A nilpotent und $AB = BA$, so ist auch AB nilpotent.
c) Sind A, B nilpotent und ist $AB = BA$, so ist auch $A + B$ nilpotent.
d) Ist $K = \mathbb{C}$ und gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass A und λA (über $\mathbb{C}$) ähnlich sind, so ist $|\lambda| = 1$ oder A nilpotent.

Lösung:
a) Nach Vorlesung hat eine nilpotente Matrix nur den Eigenwert 0. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Wegen $A \neq 0$ ist dies nicht der ganze K^n. Also existiert keine Basis aus Eigenvektoren zu A, d.h. A ist nicht diagonalisierbar.
b) Da $AB = BA$ ist $(AB)^k = A^k B^k$. Ist A nilpotent, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Dafür ist dann auch $(AB)^k = A^k B^k = 0$, also ist AB nilpotent.
c) Da $AB = BA$ gilt die binomische Formel $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$. Da A, B nilpotent sind, gibt es Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ und $B^n = 0$. Wähle $k = m + n$. Ist $0 \leq j \leq k$ und $j \geq m$, so ist $A^j = 0$; andernfalls ($j < m$) ist $B^{k-j} = 0$, da $k - j = m + n - j \geq m + n - m = n$. Damit ist in der binomischen Formel jeder Summand auf der rechten Seite gleich 0, also $(A+B)^n = 0$, d.h. $A + B$ ist nilpotent.

d) Zu zeigen ist: Ist $S^{-1}AS = \lambda A$ und ist A nicht nilpotent, so ist $|\lambda| = 1$.
Wäre $\lambda = 0$, so wäre A ähnlich zur Nullmatrix, selbst also die Nullmatrix, ein Widerspruch dazu, dass A nicht nilpotent sein soll. Also können wir $\lambda \neq 0$ annehmen.
Da A und λA ähnlich sind, haben sie das gleiche Minimalpolynom. Das sei $\mu_A = \mu_{\lambda A} = x^d + c_i x^i + ...$, wobei $i < d$ maximal ist mit $c_i \neq 0$. Wegen $\mu_A(A) = 0 = \mu_{\lambda A}(\lambda A)$ folgt:

$$A^d + c_i A^i + \ldots = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda^d A^d + c_i \lambda^i A^i + \ldots = 0\,.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\lambda^d \neq 0$ und Subtraktion beider Gleichungen liefert $c_i \lambda^i(\lambda^{d-i} - 1)A^i + \ldots = 0$. Da μ_A das Minimalpolynom von A ist und $c_i, \lambda \neq 0$ sind, gilt $\lambda^{d-i} - 1 = 0$, also $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 3 (4 / 2 / 4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f_A(x) = Ax$.

a) Berechnen Sie $\ker A^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
b) Wie lautet die Jordansche Normalform von A?
c) Bestimmen Sie eine Basis B, so dass $M_B^B(f_A)$ die Jordansche Normalform ist.

Lösung:

a) Man berechnet die Potenzen $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$.

Mit den Potenzen von A ergeben sich die gesuchten Kerne zu

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \operatorname{Ker} A^l = \mathbb{R}^5 \text{ für } l \geq 4,$$

wobei wir für c) als Basis von $\operatorname{Ker} A^4 = \mathbb{R}^5$ die um e_5 erweiterte Basis von $\operatorname{Ker} A^3$ wählen.
b) Es ist $\mu_A(x) = x^4$, also hat der größte Jordanblock in der JNF die Größe 4. Damit folgt, dass

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die Jordansche Normalform von A ist.
c) Zur Angabe einer Jordanbasis B gehen wir gemäß Vorlesung vor. Das zugehörige Bild der Basisvektoren ist

$$\begin{array}{cccc} w_1^{(4)}, & Aw_1^{(4)}, & A^2 w_1^{(4)}, & A^3 w_1^{(4)} \\ & & & w_1^{(1)} \end{array}$$

mit $w_1^{(4)} = e_5$ und $w_1^{(1)} = (0, -1, 0, -1, 1)^\top$ (denn $A^3(w_1^{(4)} = e_1)$.
Damit ist $B = \{A^3 w_1^{(4)}, A^2 w_1^{(4)}, A w_1^{(4)}, w_1^{(4)}, w_1^{(1)}\}$

$= \{e_1, (2,1,0,0,0)^\top, (1,1,1,0,0)^\top, e_5, (0,-1,0,-1,1)^\top\}$ eine Jordanbasis und $M_B^B(f_A)$ ist die unter b) angegebene JNF.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)

a) Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$.
Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn sie dasselbe Minimalpolynom haben.

b) Es sei $p_A(x) = (x+1)^5(x-1)^4$ und $\mu_A(x) = (x+1)^3(x-1)^2$. Welche möglichen Jordanschen Normalform kann $A \in \mathrm{Mat}(9; \mathbb{R})$ besitzen?
Welche Möglichkeiten verbleiben für die Jordansche Normalform, wenn zusätzlich $\dim \mathrm{Eig}(A, -1) = \dim \mathrm{Eig}(A, 1) = 2$ gilt?

Lösung:

a) Die Richtung von links nach rechts ist klar.
Für die andere Richtung betrachten wir die möglichen Minimalpolynome $\mu_A = \mu_B$. Es gibt drei Möglichkeiten:

$$x - a \quad , \quad (x-a)(x-b) \text{ mit } a \neq b \quad , \quad (x-a)^2.$$

In den ersten beiden Fällen sind A und B diagonalisierbar und ähnlich zur gleichen Diagonalmatrix, also selbst ähnlich. Im letzten Fall haben A und B einen 2×2-Jordanblock, und damit sind sie beide ähnlich zu $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Also sind sie auch in diesem Falle ähnlich.

b) Der größte Jordanblock zu $\lambda_1 = -1$ hat die Größe 3, der zu $\lambda_2 = 1$ die Größe 2. Mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 := (-1), B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 := (1)$$

haben die möglichen Jordanschen Normalformen das Aussehen $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$, wobei

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

und

$$V = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad V = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

ist. Also gibt es 4 mögliche Jordansche Normalformen.
Mit der Zusatzbedingung folgt

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

da es dann genau 2 Jordankästchen zum Eigenwert -1 und auch zum Eigenwert 1 geben muß.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 26. Juni 2006

9. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Es seien $A, B \in \text{Mat}(3; \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $p_A = p_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gilt.

b) Gegeben sind die folgenden Matrizen aus $\text{Mat}(4; \mathbb{C})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Matrizen ähnlich sind.

Lösung:

a) Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom, also ist nur die andere Richtung zu zeigen.
Über $\mathbb{C}$ zerfällt p_A (und auch μ_A) in Linearfaktoren. Daher machen wir eine Fallunterscheidung nach den Möglichkeiten von $\mu_A (= \mu_B)$.
μ_A und μ_B können nur folgendes Aussehen haben:

(1) $(x-a)$, $(x-a)(x-b)(x-c)$
(2) $(x-a)(x-b)$
(3) $(x-a)^2$
(4) $(x-a)^3$
(5) $(x-a)^2(x-b)$

Dabei sind a, b, c als paarweise verschieden vorausgesetzt.

Im Fall (1) sind A und B diagonalisierbar und zur gleichen Diagonalmatrix ähnlich, also selbst ähnlich.
Im Fall (4) besteht die JNF von A und B aus genau einem Jordankasten der Größe 3, also haben A und B gleiche JNF, sind also ähnlich.
Die gleiche Argumentation löst Fall (5) und Fall (3), nur liegen hier jeweils ein JK der Größe 2 (für den Eigenwert a) und ein JK der Größe 1 (für den Eigenwert a bei (3) und für b bei (5)) vor.
Es verbleibt Fall (2). Hier gibt es jeweils einen JK zum Eigenwert a und zum Eigenwert b. Die JNF hängt also von p_A bzw. p_B ab. Wegen $p_A = p_B$ ergibt sich auch hier die gleiche JNF, A und B sind also ähnlich.

b) Man berechnet $p_{M_k} = \mu_{M_k} = (x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2$. Dabei ergibt sich $\mu_{M_k} = (x-i)^2(x+i)^2$ am einfachsten aus $\text{Rang}(M_k - iE) = \text{Rang}(M_k + iE) = 3$. Daher sind die Eigenräume eindimensional, also gibt es nur jeweils ein Jordankästchen der Größe 2. Damit ist M_1 Jordansche Normalform für alle drei Matrizen, d.h. die Matrizen sind paarweise ähnlich.

Aufgabe 2 (2 / 3 / 5 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform sowie eine Jordanbasis zur Matrix A.

a) $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Man erhält als charakteristisches Polynom

$$p_A = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)\ .$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die Vektoren $r \cdot (4,-1,-2)^\top$ mit $r \neq 0$.
Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$ sind die Vektoren $r \cdot (2,-1,-1)^\top$ mit $r \neq 0$.
Da keine Basis aus Eigenvektoren existiert, lautet hier die Jordansche Normalform z. B. :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als ersten Vektor einer Jordanbasis wählen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert -3, etwa $z_1 = (2,-1,-1)^\top$. Nun muß der Hauptraum $\mathrm{Hau}\,(A,1) = \mathrm{Ker}\,(A - 1\cdot E)^2$ berechnet werden:

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -6 & -8 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -6 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -64 & -32 \\ 16 & 32 & 16 \\ 16 & 32 & 16 \end{pmatrix}$$

Wir haben (mit der Terminologie der Vorlesung):

$$U_1 = \mathrm{Ker}\,(A-E) = \mathrm{Span}\,\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

$$U_2 = \mathrm{Ker}\,(A-E)^2 = \mathrm{Span}\,\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}\ .$$

Es wird ein Vektor aus $\mathrm{Hau}\,(A,1) \setminus \mathrm{Eig}\,(A,1)$ gewählt, etwa $(1,-1,1)^\top =: w_1^{(2)} =: z_2$ und

$$z_3 := (A-E)z_2 = \begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -6 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

gesetzt. Dann ist $B = \{z_1, z_3, z_2\}$ eine Jordanbasis zu A.

b) Hier lautet das charakteristische Polynom $p_A = (x-2)^4$. Zur Berechnung des Hauptraums $\mathrm{Hau}\,(A,2)$ benötigen wir die Potenzen der Matrix $A - 2E$. Es gilt:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A-2E)^2 = O\ .$$

Wegen $\dim \mathrm{Eig}(A,2) = 3$ erkennt man, dass die Jordansche Normalform zur Matrix A (bis auf eine Permutation der Jordanblöcke) lautet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um eine Jordanbasis zu konstruieren, die auf diese Jordansche Normalform führt, berechnen wir zunächst Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Man erhält

$$\mathrm{Eig}\,(A,2) = \mathrm{Span}\,\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}\ .$$

Wir ergänzen beliebig zu einer Basis von Hau $(A, 2) = \mathbb{R}^4$, z. B. durch $u_2 = e_1 =: w_1^{(2)}$ und setzen $u_1 := (A - 2E)w_1^{(2)} = (-1, 1, 0, 1)^\top$. u_1 und u_2 werden z. B. durch die Eigenvektoren $u_3 := (0, 1, 0, 0)^\top$ und $u_4 := (-1, 0, 1, 0)^\top$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt. Die Basis $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4)$ ist eine Jordanbasis zu A mit obiger JNF.

c) Man erhält $p_A = (x - 1)^3(x - 2)^2$. Aus

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\text{Eig}\,(A, 1) = \text{Span}\,\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_1}\} =: U_1 \qquad \text{und} \qquad \text{Eig}\,(A, 2) = \text{Span}\,\{\underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_2}\} =: Z_1 .$$

Wir berechnen zunächst den Hauptraum zum Eigenwert 1.

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus Dimensionsgründen muß $(A - E)^4 = (A - E)^3$ gelten. Durch Lösen der zugehörigen Gleichungssysteme erhält man

$$\text{Ker}\,(A - E)^2 = \text{Span}\,\{x_1, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_3}\} =: U_2 , \qquad \text{Ker}\,(A - E)^3 = \text{Span}\,\{x_1, x_3, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_4}\} =: U_3 .$$

Nun berechnen wir den Hauptraum zum Eigenwert 2 (dessen Dimension 2 sein muß).

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\text{Ker}\,(A - 2E)^2 = \text{Span}\,\{x_2, \underbrace{\begin{pmatrix} -36 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_5}\} =: Z_2$$

Man erkennt, dass die Jordansche Normalform das folgende Aussehen hat:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Hier ergibt sich eine Jordanbasis "von oben nach unten" durch

$$(A-E)^2 x_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-E)x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4$$

sowie $(A-2E)x_5$ und x_5.
Eine gesuchte Jordanbasis ist also

$$B = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -36 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} .$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei P_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{R}$, und $\varphi : P_n \longrightarrow P_n$ sei definiert durch $\varphi(p) = p'$ (die Ableitung). Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von φ und eine Basis B, so dass $M_B^B(\varphi)$ Jordansche Normalform hat.

Lösung: Wir betrachten $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Es ist $\varphi(x^n) = nx^{n-1}$.

Also ist $M_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $p_\varphi = (-1)^{n+1} x^{n+1}$. Wegen $\varphi^n(x^n) = n! \neq 0$ und $\varphi^{n+1}(x^k) = 0$ für alle $0 \leq k \leq n$ ist $\mu_\varphi = x^{n+1}$. Die Jordansche Normalform besteht also nur aus einem Jordankasten der Größe $n+1$ mit dem (einzigen) Eigenwert 0 auf der Hauptdiagonale.
Die Ableitung von x^n zeigt leicht, was als Jordanbasis gewählt werden kann. $B^* = \{1, x, \frac{1}{2!}x^2, \ldots, \frac{1}{n!}x^n\}$ ist eine Jordanbasis, denn $M_{B^*}^{B^*}(\varphi)$ hat Jordansche Normalform.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)
Gegeben sei die affine Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0\} .$$

a) Die Punkte $a = (-1, 0, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $c = (0, -1, -1)$ und $d = (1, 0, 1)$ liegen in Q. Zeigen Sie, dass die Geraden durch a und b, durch b und d, durch c und d und durch a und c ganz in Q liegen.

b) Es sei g_λ die Verbindungsgerade des Punktes $\lambda a + (1-\lambda)b$ auf der Geraden durch a und b mit dem Punkt $\lambda c + (1-\lambda)d$ auf der Geraden durch c und d. Zeigen Sie, dass g_λ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ganz in Q liegt.
Zeigen Sie ferner, dass g_λ und $g_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ windschief sind.

Lösung:
a) Für Punkte x auf der Geraden durch a und b gilt:

$$x = a + \mu(b-a) = (-1, 0, 1) + \mu(1, 1, -2) = (-1+\mu, \mu, 1-2\mu) .$$

Die Quadrik wird beschrieben durch die Gleichung $x_1^2 - x_2^2 = x_3$. Wegen $(-1+\mu)^2 - \mu^2 = 1 - 2\mu$ liegt jedes obige x in Q.
Entsprechend zeigt man, dass die Geraden durch b und d, durch c und d und durch a und c ganz in Q liegen.

b) Punkte x auf g_λ haben das Aussehen

$$\begin{aligned}
x &= \lambda a + (1-\lambda)b + \mu(\lambda c + (1-\lambda)d - (\lambda a + (1-\lambda)b) \\
&= \lambda(-1,0,1) + (1-\lambda)(0,1,-1) + \mu(\lambda(0,-1,-1) + (1-\lambda)(1,0,1) \\
&\quad -\lambda(-1,0,1) - (1-\lambda)(0,1,-1)) \\
&= (\underbrace{\mu-\lambda}_{x_1}, \underbrace{1-\lambda-\mu}_{x_2}, \underbrace{2\lambda+2\mu-4\lambda\mu-1}_{x_3}) \\
x_1^2 - x_2^2 &= \mu^2 - 2\lambda\mu + \lambda^2 - (1 + \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda - 2\mu - 2\lambda\mu) \\
&= 2\lambda + 2\mu - 4\lambda\mu - 1 = x_3
\end{aligned}$$

Also liegt g_λ ganz in Q.
Wir betrachten nun die vier Punkte

$$z_1 := \lambda a + (1-\lambda)b\,,\ z_2 := \lambda c + (1-\lambda)d\,,\ z_3 := \lambda' a + (1-\lambda')b\,,\ z_4 := \lambda' + (1-\lambda')d\,,$$

und zeigen, dass $v_1 := z_1 - z_2$, $v_2 := z_1 - z_3$ und $v_3 := z_1 - z_4$ als Vektoren des $\mathbb{R}^3$ genau für $\lambda \neq \lambda'$ linear unabhängig sind. Daraus folgt, dass die genannten Geraden windschief sind.
Einsetzen von a, b, c, d und Differenzbildung liefert

$$\begin{aligned}
v_1 &= \lambda(-1,0,1) + (1-\lambda)(0,1,-1) - \lambda(0,-1,-1) - (1-\lambda)(1,0,1) = (-1,1,-2+4\lambda) \\
v_2 &= (\lambda' - \lambda, \lambda' - \lambda, 2\lambda - 2\lambda') \\
v_3 &= (\lambda' - \lambda - 1, \lambda' - \lambda + 1, 2(\lambda' + \lambda - 1))
\end{aligned}$$

Auf lineare Unabhängigkeit untersuchen wir mittels der Determinante:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2(2\lambda-1) \\ \lambda'-\lambda & \lambda'-\lambda & 2(\lambda-\lambda') \\ \lambda'-\lambda-1 & \lambda'-\lambda+1 & 2(\lambda'+\lambda-1) \end{vmatrix}
&= (\lambda'-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2(2\lambda-1) \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda'-\lambda-1 & \lambda'-\lambda+1 & 2(\lambda'+\lambda-1) \end{vmatrix} \\
&= (\lambda'-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4\lambda-4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda'-\lambda-1 & 2 & 4\lambda'-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-\lambda') \begin{vmatrix} 2 & 4(\lambda-1) \\ 2 & 4(\lambda'-1) \end{vmatrix} \\
&= -8(\lambda-\lambda')^2
\end{aligned}$$

Die Determinante ist also 0 genau für $\lambda = \lambda'$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 3. Juli 2006

10. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (2 /1 /1 / 3 / 3 Punkte)

Bringen Sie die affinen Quadriken auf Normalform gemäß Theorem 10.1 der Vorlesung.

a) $Q = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 6x_2 + 1 = 0\}$

b) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0\}$

c) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0\}$

d) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0\}$

e) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 + 18x_3^2 + 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 12x_2x_3 - 6x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 4 = 0\}$

Lösung:

Die Normalform ergibt sich jeweils aus dem Rang m der erweiterten Matrix A, sowie dem Rang m^* und dem Index k der Teilmatrix A^*.

a) Die erweiterte Matrix ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix und die in A unten rechts stehende $2 \times 2-$Matrix A^* bringen wir wie üblich auf Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $m = 3$, $m^* = 2$ und $k = 2$.

Normalform: $y_1^2 + y_2^2 = 1$ **Kreis**.

Entsprechend gehen wir bei den weiteren Teilen der Aufgabe vor:

b) $m = 2$, $m^* = 2$, $k = 1$, Normalform: $y_1^2 - y_2^2 = 0$ **zwei sich schneidende Geraden**.

Oder man "sieht":

$$3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0 \iff 3(x_1 - \frac{2}{3})(x_2 + \frac{4}{3}) = 0 \,.$$

Daher liegen zwei sich schneidende Geraden vor.

c) $m = 3$, $m^* = 1$, $k = 1$, Normalform: $y_1^2 + 2y_2 = 0$ **Parabel**.

d) $m = 4$, $m^* = 3$, $k = 2$, Normalform: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ **einschaliges Hyperboloid**.

e) $m = 3$, $m^* = 1$, $k = 1$, Normalform: $y_1^2 + 2y_2 = 0$ **parabolischer Zylinder**.

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Quadrik

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 - 23 = 0\}$$

eine Hyperbel darstellt, und geben Sie den Schnittpunkt ihrer Asymptoten in x_1, x_2-Koordinaten an.

b) Zeigen Sie, dass die Quadrik

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{15}{4}x_1^2 + \frac{13}{4}x_2^2 + 5x_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_1x_2 + (9 - 12\sqrt{3})x_1 - (12 + 9\sqrt{3})x_2 - 30x_3 + 93 = 0\}$$

ein Ellipsoid darstellt, und geben Sie dessen Hauptachsen und den Mittelpunkt in x_1, x_2, x_3-Koordinaten an.

Lösung:

a) Wir beginnen hier nicht mit der Typisierung, sondern berechnen zunächst Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & x+2 \end{vmatrix} = (x - \frac{5}{2})(x + \frac{5}{2})$$

Zu $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ist $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor.
Zu $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ ist $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor.
Mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ folgt als Gleichung der Quadrik:

$$\frac{5}{2}y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{15}{\sqrt{10}}y_1 - \frac{5}{\sqrt{10}}y_2 - 23 = 0 \iff (y_1 - \frac{3}{\sqrt{10}})^2 - (y_2 + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 = 10$$

Mit $z_1 = y_1 - \frac{3}{\sqrt{10}}$ und $z_2 = y_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}$ folgt $z_1^2 - z_2^2 = 10$. Also liegt eine Hyperbel vor.
Mit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Für $z_1 = z_2 = 0$ folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$. Dies ist der Mittelpunkt der Hyperbel im x_1, x_2-System.

b) Wir gehen entsprechend a) vor:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{15}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & x - \frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = (x-5)((x - \frac{15}{4})(x - \frac{13}{4}) - \frac{3}{16}) = (x-5)(x-3)(x-4) .$$

Man erhält die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$. Normierte Eigenvektoren zu den λ_i sind die folgenden Vektoren v_i:

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Transformation $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:B}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ überführt die gegebene Quadrik in die Quadrik mit der Gleichung

$$4(y_1^2 - 6y_1) + 3(y_2^2 - 6y_2) + 5(y_3^2 - 6y_3) + 93 = 0 .$$

Mittels quadratischer Ergänzung und der Transformation $z_1 = y_1 - 3$, $z_2 = y_2 - 3$, $z_3 = y_3 - 3$ wird daraus die Gleichung

$$4z_1^2 + 3z_2^2 + 5z_3^2 - 15 = 0 \iff \frac{z_1^2}{3,75} + \frac{z_2^2}{5} + \frac{z_3^2}{3} = 1 .$$

Dies ist ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $a = \sqrt{3,75}$, $b = \sqrt{5}$ und $c = \sqrt{3}$. Im y_1, y_2, y_3-System liegt der Mittelpunkt im Punkt $(3,3,3)$, im x_1, x_2, x_3-System ergibt er sich aus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B \left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

zu

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(0,0,0) = (1,-1,1)$, $f(1,1,1) = (0,-3,3)$, $f(1,1,0) = (4,6,1)$ und $f(2,0,0,) = (3,3,-1)$ gibt. Geben Sie eine 3×3-Matrix A und ein $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ an mit $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$. Ist f eine Affinität? Wenn ja, wie lautet f^{-1} in der Form $f^{-1}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{c}$?

Lösung:

Gibt es solch ein affines f, so hat f die Form $f(\vec{v}) = F(\vec{v}) + \vec{w_0}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, wobei F eine lineare Abbildung ist.

Aus $f(0,0,0) = (1,-1,1)$ folgt $\vec{w_0} = (1,-1,1)$, da $F(0) = 0$ für lineares F gilt. Dann muß gelten:

$$\begin{aligned} F(1,1,1) &= (0,-3,3) - (1,-1,1) &&= (-1,-2,2) \\ F(1,1,0) &= (4,6,1) - (1,-1,1) &&= (3,7,0) \\ F(2,0,0) &= (3,3,-1) - (1,-1,1) &&= (2,4,2) \end{aligned}$$

Da $\{(1,1,1),(1,1,0),(2,0,0)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es genau ein solches F. Die Darstellungsmatrix A berechnet sich wie üblich:

$$\begin{aligned} F(1,0,0) &= \tfrac{1}{2}F(2,0,0) = (1,2,-1) \\ F(0,1,0) &= F(1,1,0) - F(1,0,0) = (2,5,1) \\ F(0,0,1) &= F(1,1,1) - F(1,1,0) = (-4,-9,2) \end{aligned} \qquad \text{also} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Es ist also $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da A invertierbar ist ($\det A \neq 0$), ist F ein Automorphismus, also f eine Affinität. Nach Satz 10.1 gilt also $f^{-1}(\vec{v}) = F^{-1}(\vec{v}) - F^{-1}(\vec{w_0})$. Man berechnet $A^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, also $F^{-1}(\vec{w}) = A^{-1}\vec{w}$ und daher $F^{-1}(\vec{w_0}) = A^{-1}\vec{w_0} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, also $f^{-1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} - \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein echter Unterraum von V. Ferner sei $r :=\dim V - \dim U$. Zeigen Sie, dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in V^*$ gibt mit $U = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \ker \lambda_i$.

Welche Aussage erhalten Sie daraus speziell für $\dim U = n-1$?

Lösung:

Es sei $\dim V = n$ und $\dim U = k$, also $r = n - k$. Nun sei $\{a_1, \ldots, a_k\}$ eine Basis von U. Diese Basis können wir dann durch r Vektoren $a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}$ zu einer Basis von V ergänzen.

Wir definieren nun r Linearformen $\lambda_i : V \longrightarrow K$ (also Elemente aus dem Dualraum V^*) durch:

$$\lambda_i(a_j) = 0 \text{ für } j \neq k+i \quad , \quad \lambda_i(a_{k+i}) = 1 \qquad i = 1, \ldots, r$$

Behauptung: $U = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_i$

Sei $x \in U$. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$ mit $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$. Für $i = 1, \ldots, r$ gilt $\lambda_i(x) = \lambda_i(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k) = 0$ nach Definition der λ_i. Also ist $x \in \operatorname{Ker} \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, r$,
d. h. $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_i$.
Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_i$. Da $x \in V$ ist, gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+r} \in K$ mit

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+r} a_{k+r} .$$

Nach Definition von λ_i folgt $\lambda_i(x) = \alpha_{k+i}$ für $i = 1, \ldots, r$. Wegen $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \lambda_i$ folgt $\alpha_{k+i} = 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Damit hat x die Darstellung $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$, also $x \in U$.
Für U mit $\dim U = n - 1$ (solche Unterräume von V nennt man üblicherweise Hyperebenen) gibt es also eine Linearform, so dass U der Kern dieser Linearform ist, d.h. U ist durch eine lineare Gleichung der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$ beschreibbar (U ist die Lösungsmenge dieses homogenen LGS).

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. W. EBELING, DR. D. WILLE

Hannover, den 10. Juli 2006

11. (und letztes) Übungsblatt: Lineare Algebra II

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Es sei $B = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die duale Basis B^*, und geben Sie die Elemente von B^* in der Form $\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ an.

b) Es sei P_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Die Abbildung $\varphi : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$ ist nach Vorlesung ein Element des Dualraums $(P_2)^*$. Geben Sie die Darstellung von φ bezüglich der zu $B = \{1, x, x^2\}$ dualen Basis B^* von $(P_2)^*$ an.

Lösung:

a) Nach Stundenübung ergibt sich

$$M^{B^*}_{\mathrm{KB}^*}(\mathrm{id}) = (M^B_{\mathrm{KB}}(\mathrm{id})^\top)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 = b_1^* = 8e_1^* - e_2^* - 3e_3^* & \text{also} & \varphi_1(\vec{x}) = 8x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \varphi_2 = b_2^* = -5e_1^* + e_2^* + 2e_3^* & \text{also} & \varphi_2(\vec{x}) = -5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \varphi_3 = b_3^* = 10e_1^* - e_2^* - 4e_3^* & \text{also} & \varphi_3(\vec{x}) = 10x_1 - x_2 - 4x_3 \end{array}$$

b) Gesucht ist die Darstellung $\varphi = \alpha \cdot 1^* + \beta \cdot x^* + \gamma \cdot (x^2)^*$. Nach Definition von B^* folgt $\varphi(1) = \alpha$, $\varphi(x) = \beta$, $\varphi(x^2) = \gamma$, also

$$\alpha = \int_0^1 1\,dx = 1 \quad , \quad \beta = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad , \quad \gamma = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} ,$$

und damit $\varphi = 1^* + \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{3}(x^2)^*$.
(x^* ist beispielsweise diejenige lineare Abbildung von P_2 in $\mathbb{R}$ mit $x^*(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_1$. Also ist $\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2$ und das ist nach Definition von φ über das Integral klar.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei der Unterraum $U = \mathrm{span}\,\{(1,1,0,0,1), (1,0,1,0,0)\}$ des $\mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie unter Angabe der zugehörigen 1×5-Matrizen eine Basis des zu U orthogonalen Unterraums U^0 von $(\mathbb{R}^5)^*$.

Lösung:

Es ist $U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$. Wegen $\dim U^0 = \dim V - \dim U$ und $\dim U = 2$ folgt $\dim U^0 = 3$.
Gesucht sind also drei linear unabhängige Linearformen $\varphi_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{i5})$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $\varphi_i(1,1,0,0,1) = \varphi_i(1,0,1,0,0) = 0$. Das führt auf ein LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} .$$

Eine Basis des Lösungsraumes kann als Basis von U^0 interpretiert werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

liefert mit den freien Variablen x_3, x_4, x_5 z.B. eine Basis $\{(0,-1,0,0,1),(0,0,0,1,0),(-1,1,1,0,0)\}$. Diese Vektoren - als 1×5-Matrizen aufgefaßt - sind eine Basis von U^0.

Aufgabe 3 (5 / 5 Punkte)
$B=\{(1,1,0)^\top,(0,1,1)^\top,(1,0,1)^\top\}$ und $C=\{(1,1,0,0)^\top,(0,1,1,1)^\top,(0,0,1,1)^\top,(0,0,0,1)^\top\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ sei gegeben durch $M_C^B(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $f^*(\varphi)(2,1,2)$ für das Funktional φ mit $\varphi(\vec{x})=3x_1-x_3+x_4$.
b) Berechnen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ und hiermit Basen von $\ker f^*$ und von $\operatorname{im} f^*$.

Lösung:
a) Für $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ ist die duale Abbildung f^* eine Abbildung $f^*:(\mathbb{R}^4)^*\longrightarrow(\mathbb{R}^3)^*$. $f^*(\varphi)$ ist also ein Element aus $(\mathbb{R}^3)^*$ - wird also durch eine 1×3-Matrix beschrieben. Wir kennen $\varphi(\vec{x})=3x_1-x_3+x_4$, also ist der Koordinatenvektor von φ bezüglich der zur kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ dualen Basis KB_4^* gerade $(3,0,-1,1)^\top$. Multipliziert man diesen an die Matrix $M_{KB_3^*}^{KB_4^*}(f^*)=:M$, so erhält man den Koordinatenvektor von $f^*(\varphi)$ bezüglich der zur kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ dualen Basis KB_3^* - den man dann als die gesuchte 1×3-Matrix, die $f^*(\varphi)$ darstellt, interpretieren kann.
Wir kennen die Matrix $M_C^B(f)$ und damit nach der grundlegenden Formel der Vorlesung die Matrix

$$M_{B^*}^{C^*}(f^*)=(M_C^B(f))^\top\ .$$

Die übliche Transformationsformel liefert

$$M=M_{KB_3^*}^{KB_4^*}(f^*)=M_{KB_3^*}^{B^*}(\mathrm{id})M_{B^*}^{C^*}(f^*)M_{C^*}^{KB_4^*}(\mathrm{id})\ . \qquad (*)$$

Nun ist $M_{KB_3^*}^{B^*}(\mathrm{id})=(M_B^{KB_3}(\mathrm{id}))^\top=(M_{KB_3}^B(\mathrm{id})^{-1})^\top=(M_{KB_3}^B(\mathrm{id})^\top)^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

und

$$M_{C^*}^{KB_4^*}(\mathrm{id})=(M_{KB_4}^C(\mathrm{id}))^\top=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Damit lautet das rechts stehende Produkt in (*):

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&0&1&1\\1&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&5&3&2\\1&1&1&2\\1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

Aus

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&5&3&2\\1&1&1&2\\1&1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

folgt $f^*(\varphi)=(1\ \ 2\ \ 2)$, also $f^*(\varphi)(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2+2x_3$, d.h. $f^*(\varphi)(2,1,2)=8$.
b) Mit $A=M_C^B(f)$ löst man $A\vec{x}=0$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&2\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Der Lösungsraum wird von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt, der als Koordinatenvektor bezüglich B zu interpretieren ist. Damit folgt: $\ker f = \operatorname{span}\{-\vec{b_1} + \vec{b_3}\} = \operatorname{span}\{(0,-1,1)^\top\}$.
Ferner ist $\operatorname{im} f = \operatorname{span}\{\vec{c_1} + 2\vec{c_2}, \vec{c_1} + \vec{c_3} + \vec{c_4}\}$, da die ersten beiden Spalten von A linear unabhängig sind. Also ist $\operatorname{im} f = \{(1,3,2,2)^\top, (1,1,1,2)^\top\}$.
Nach Vorlesung ist $\operatorname{im} f^* = (\ker f)^0$ und $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^0$. Wie in Aufgabe 2 erhält man $(\ker f)^0$ durch den Lösungsraum von $x_2 - x_3 = 0$, also durch $\operatorname{span}\{(1,0,0)^\top, (0,1,1)^\top\}$ und $(\operatorname{im} f)^0$ durch den Lösungsraum von $\begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = 0 \end{array}$, also durch $\operatorname{span}\{(-2,0,0,1)^\top, (-1,-1,2,0)^\top\}$.
$\ker f^*$ wird also durch die Funktionale mit den Matrizen $(1 \;\; 0 \;\; 0)$ und $(0 \;\; 1 \;\; 1)$ aufgespannt, $\operatorname{im} f^*$ durch die Funktionale mit den Matrizen $(-2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)$ und $(-1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 0)$.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)

V sei ein $K-$Vektorraum endlicher Dimension, U und W seien Untervektorräume von V.
Beweisen Sie:
a) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$
b) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

Lösung:
a) “ $\subseteq$ “
Sei $\varphi \in (U + W)^0$, also $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in U + W$. Wegen $U \subseteq U + W$ und $W \subseteq U + W$ ist dann $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in U$, also $\varphi \in U^0$ und $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in W$, also $\varphi \in W^0$. Es folgt $\varphi \in U^0 \cap W^0$.
“ $\supseteq$ “
Sei $\varphi \in U^0 \cap W^0$ und $v \in U + W$. Zu zeigen ist $\varphi(v) = 0$.
Es gibt $x \in U, y \in W$ mit $v = x + y$. Also

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{da } \varphi \text{ linear} \\ &= 0 + 0 \quad \text{da } \varphi \in U^0 \text{ und } \varphi \in W^0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) “ $\supseteq$ “
Sei $\varphi \in U^0 + W^0$, also $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in U^0$ und $\varphi_2 \in W^0$. Für $z \in U \cap W$ gilt $\varphi(z) = (\varphi_1 + \varphi_2)(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) = 0 + 0 = 0$, also $\varphi \in (U \cap W)^0$.
“ $\subseteq$ “
Sei $\varphi \in (U \cap W)^0$, also $\varphi(z) = 0$ für alle $z \in U \cap W$. Zu zeigen ist: $\varphi \in U^0 + W^0$.
Sei B_1 eine Basis von $U \cap W$. Wir ergänzen durch B_2 zu einer Basis von U und durch B_3 zu einer Basis von W. Dann ist $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ eine Basis von $U + W$ (Dimensionsformel), wobei die Vereinigung disjunkte Vereinigung ist. Wir ergänzen nun noch durch B_4 zu einer Basis von V. Nun können wir $\varphi_1 \in U^0$ und $\varphi_2 \in W^0$ definieren mit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Wir setzen

$\varphi_1(z) = 0$ für alle Vektoren aus B_1, B_2, B_4
$\varphi_1(z) = \varphi(z)$ für alle Vektoren aus B_3
$\varphi_2(z) = 0$ für alle Vektoren aus B_1 und B_3
$\varphi_2(z) = \varphi(z)$ für alle Vektoren aus B_2 und B_4.

Dadurch sind φ_1 und φ_2 als lineare Abbildungen eindeutig festgelegt, da sie auf Basen von V definiert sind. Auf $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ gilt $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) = (\varphi_1 + \varphi_2)(z)$, also ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Es ist $\varphi_1 \in U^0$, $\varphi_2 \in W^0$, also $\varphi \in U^0 + W^0$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. Juli 2006

Klausur zur Linearen Algebra II

Jede Aufgabe 10 Punkte

Erlaubte Hilfsmittel: Eigene Aufzeichnungen, Skripte, Bücher
keine elektronischen Hilfsmittel

Lösungsskizzen

Aufgabe 1

Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? Wenn ja, geben Sie eine zur Matrix ähnliche Diagonalmatrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Aufgabe ist ohne Rechenaufwand lösbar; Sie müssen Ihre Antwort aber jeweils begründen.

Lösung:
A ist symmetrisch, also diagonalisierbar.
0 ist Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2, da $\operatorname{Rang} A = 1$. Ferner ist 3 ein Eigenwert von A (Zeilensummen beachten!). Damit ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
$B^\top$ ist ein 3×3-Jordankasten mit Minimalpolynom $\mu_{B^\top} = (x-1)^3$. Wegen $\mu_B = \mu_{B^\top}$ zerfällt das Minimalpolynom von B nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren; B ist nicht diagonalisierbar.
C ist symmetrisch, also diagonalisierbar.
C ist (reell) orthogonal, besitzt also nur die Eigenwerte 1 und -1. Da $\operatorname{Rang}(C+E) = 2$ ist, ist 2 die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1. Also hat auch -1 die geometrische Vielfachheit 2, und daher ist C ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit genau zwei Einsen und zwei Einträgen -1 auf der Hauptdiagonalen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die $n \times n$-Matrix $A := \begin{pmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+1 & x & \dots & x \\ x & x & x+1 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x & x+1 \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit ist, wenn $x > -\frac{1}{n}$ ist.

Lösung:
Für $x = 0$ gilt die Behauptung, da $A = E$ positiv definit ist und $0 > -\frac{1}{n}$ gilt.
A ist diagonalisierbar, da A symmetrisch ist; A hat also nur reelle Eigenwerte. Wenn man erkennt, dass für $x \neq 0$ die Matrix $A - E$ den Rang 1 hat, so folgt, dass 1 Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $n-1$ ist. Es fehlt der letzte Eigenwert, den man aus den gemeinsamen Zeilensummen als $nx+1$ erkennt. A ist also genau dann positiv definit, wenn $nx + 1 > 0$ gilt und das ist äquivalent zu $x > -\frac{1}{n}$.
2. Lösungsmöglichkeit:
Man berechnet $\det A = nx+1$ (z.B. 1. Zeile von allen anderen Zeilen subtrahieren, dann das (-1)-fache der Spalten 2 bis n zur 1. Spalte addieren).

Ist A also positiv definit, so folgt aus dem Hurwitz-Kriterium $x > -\frac{1}{n}$.
Ist umgekehrt $x > -\frac{1}{n}$, so ist auch $x > -\frac{1}{k}$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$ und damit liefert das Hurwitz-Kriterium die positive Definitheit von A.

Aufgabe 3

Der Endomorphismus f des $\mathbb{R}^4$ sei gegeben durch $M_E^E(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie eine Jordanbasis B des $\mathbb{R}^4$ zu f, sowie die zugehörige Matrix $M_B^B(f)$.

Lösung:
Man sieht sofort $p_A = x^3(x+2)$. $(A+2E)x = 0$ liefert den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, -2) = \mathrm{span}\{(2,1,0,0)^\top\}$. Ferner sieht man auch sofort $\mathrm{Eig}\,(A, 0) = \mathrm{span}\{e_2, e_3\}$. Damit ist der Hauptraum von A zum Eigenwert 0 der Lösungsraum von $A^2x = 0$. Von A^2 braucht man nur die erste Zeile, die sich zu $(4\ 0\ 0\ -2)$ berechnet. Das liefert sofort $\mathrm{Hau}\,(A, 0) = \mathrm{span}\{e_2, e_3, (1,0,0,2)^\top\}$.

Mit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine JB und } M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (5 / 5 Punkte)
Gegeben sind die beiden Quadriken:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_2 - 8 = 0\} \\ Q_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2x_3 + x_2 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie jeweils die affine Normalform der Quadriken.
b) Skizzieren Sie den durch Q_1 gegebenen Kegelschnitt in der x_1, x_2-Ebene.

Lösung:

a) Die Gleichung für Q_1 schreibt sich $(1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} -8 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$

Mit $A = \begin{pmatrix} -8 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\mathrm{Rang}\,A^* = \mathrm{Index}\,A^* = 1$ und $\mathrm{Rang}\,A = 3$ (denn $\det A \neq 0$).
Damit lautet die affine Normalform für Q_1: $y_1^2 + 2y_2 = 0$ (Parabel)

Entsprechend erhält man bei Q_2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Rang}\,A = 3$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Rang}\,A^* = 2$ und $\mathrm{Index}\,A^* = 1$.
Die affine Normalform lautet: $y_1^2 - y_2^2 = 1$ (hyperbolischer Zylinder)

b) Es ist $p_{A^*} = (x-1)^2 - 1 = x(x-2)$. Ein Eigenvektor zu $\lambda = 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; zu $\lambda = 2$ ist es $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Mit $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ geht die Gleichung der Quadrik über in $2z_1^2 + 4z_2 - 8 = 0$ bzw. $z_1^2 + 2(z_2 - 2) = 0$.
Wir setzen $y_1 = z_1$ und $y_2 = z_2 - 2$ und erhalten $y_1^2 + 2y_2 = 0$ bzw. $y_2 = -\frac{1}{2}y_1^2$. Damit läßt sich die Parabel leicht skizzieren.

Aufgabe 5 (4 / 6 Punkte)

a) $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ sei gegeben durch $\varphi = 2b_1^* + b_2^*$, wobei $B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ die zu $B = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ duale Basis ist. Geben Sie φ in der Form $\varphi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = ax + by$ an.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\vec{x}$. Berechnen Sie $f^*\varphi$ (φ wie in a)) und $M_{E^*}^{B^*}(f^*)$. (E^* ist die zu $\{e_1, e_2, e_3\}$ duale Basis in $(\mathbb{R}^3)^*$, B^* die Basis aus a).)

Lösung:

a) Wir wissen $\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = 2$ und $\varphi(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = 1$.

Damit folgt $\varphi(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) - \varphi(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = 2 - 1 = 1$. Also ist $\varphi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = x + y$.

b) Gesucht ist $M_{E^*}^{B^*}(f^*) = M_{(E_3)^*}^{B^*}(f^*) = (M_B^{E_3}(f))^\top$.

Bekannt ist $A := M_{E_2}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M_B^{E_3}(f) &= M_B^{E_2}(id) \cdot M_{E_2}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\-2 & 1 & -3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also gilt $M_{E^*}^{B^*}(f^*) = \begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}$.

$f^*\varphi$ ist in E^* gegeben durch $\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$,

d.h. $f^*\varphi = 4e_1^* + 3e_2^* + e_3^*$ oder ausgeschrieben $f^*\varphi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 3x_2 + x_3$.