Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 10. April 2006

1. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 24./25.4.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$ ähnlich sind und geben Sie eine invertierbare Matrix T an mit $TAT^{-1} = B$.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n; K)$ ähnlich sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$, $A \neq 0$, und es gebe ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Zeigen Sie:

a) 0 ist einziger Eigenwert von A.

b) A ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix. Bestimmen Sie ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms alle Eigenwerte und eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von C. Geben Sie ferner eine orthogonale Matrix B so an, dass $B^\top CB$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Durch Rückgriff auf die Definition und genaues Hinsehen findet man alle Eigenwerte von C.

Aufgabe 4 (2 / 2 / 3 / 3 Punkte)

Bringen Sie die beschreibenden Gleichungen der folgenden Punktmengen durch Hauptachsentransformation auf Normalform. Um welche Punktmengen handelt es sich?

a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 10 = 0\}$

b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2 = 0\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2 - 9 = 0\}$

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 6 = 0\}$

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 24. April 2006

2. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 2.5.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (4 / 3 / 3 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$, und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}\,(AB)$. (Ist $M = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, so ist $\mathrm{Spur}\, M := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$; $\mathrm{Spur}\, M$ ist also die Summe der Hauptdiagonalelemente von M.)

a) Untersuchen Sie, welche Bedingungen für ein Skalarprodukt die Abbildung $\langle\ ,\ \rangle$ erfüllt.

b) Es sei $U := \{A \in V \mid A \text{ symmetrisch}\}$. Zeigen Sie, daß $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf U ist.

c) Im Falle $n = 2$ sind

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ und } B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Basen von U. (Kein Beweis nötig!)
Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich der Basen B_i.

Aufgabe 2 (4 / 4 / 2 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grade ≤ 3 (aufgefaßt als Funktionen) und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ das durch $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ definierte Skalarprodukt.

a) Bestimmen Sie die $\langle\ ,\ \rangle$ darstellende Matrix bezüglich der Basis $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$.

b) Berechnen Sie $\langle 2x^2 + x, x^3 - x^2 + x + 1\rangle$ <u>mittels Matrizenrechnung</u>.

c) Es seien $f_1, f_2 \in V$ definiert durch $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x$. Berechnen Sie $d(f_1, f_2)$.

Aufgabe 3 (4 / 2 / 4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 0 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,(3, \mathbb{C})$.

a) Geben Sie die hermitesche Sesquilinearform $\langle\ ,\ \rangle_A$ explizit an.

b) Untersuchen Sie $\langle\ ,\ \rangle_A$ auf positive Definitheit.

c) Beweisen Sie, dass

$$\langle\ ,\ \rangle : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1\overline{y}_1 + i\, x_1\overline{y}_3 + 2x_2\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_3 - i\, x_3\overline{y}_1 + x_3\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3 \end{cases}$$

eine hermitesche Sesquilinearform ist.

Zusatzaufgabe (4 / 3 / 3 Punkte)

Eine lineare Abbildung $p : V \longrightarrow V$ eines Vektorraumes V in sich heißt **Projektion** von V, falls $p^2 = p$ gilt.
Zeigen Sie:

a) Ist p eine Projektion von V, so gilt $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

b) Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum von V, so gibt es stets eine Projektion p von V mit $U = \mathrm{Im}\, p$.

c) Geben Sie für $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$ eine Projektion p wie unter b) durch Angabe der Bilder einer Basis von $\mathbb{R}^3$ an.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 2. Mai 2006

3. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 8./9.5.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3 / 7 Punkte)

a) Bestimmen Sie für den euklidischen Raum U aus Übungsblatt 2, Aufgabe 1 c) eine Orthonormalbasis.

b) Bestimmen Sie im Vektorraum P_3 der reellen Polynome von Grad ≤ 3 eine Orthonormalbasis (bezüglich $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$).

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Im euklidischen Vektorraum $V = \mathcal{C}[-1,1]$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ sei $U := \{f \in V \,;\, f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-1,1]\,\}$.
(U ist ein Teilraum von V, der Raum der geraden Funktionen; kein Beweis nötig.)
Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V.

b) Es sei $U = \mathrm{Span}\,\{(0,1,0,i),(i,0,1,0),(0,i,i,0)\}$ und $\langle x, y\rangle = x^\top \cdot \overline{y}$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie orthonormale Basen von U und von $U^\perp$.

Aufgabe 3 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^2$ die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung eine Drehung ist.

a) Spiegeln Sie zunächst an der durch $y = x$ gegebenen Geraden, anschließend an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$. Welche Matrix beschreibt die entstehende Drehung? Um welchen Winkel wird gedreht?

Zusatzaufgabe (6 / 4 Punkte)

a) Es seien U, W Untervektorräume des endlich dimensionalen euklidischen Vektorraums V.
Zeigen Sie: $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

b) Zeigen Sie: Ist $B := \{a, b, c\}$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^3$ und sind α, β, γ die Winkel zwischen $x \neq 0$ und a, b, c, so gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ .$$

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 8. Mai 2006

4. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 15./16.5.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (3 / 7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $O(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^\top\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeigen Sie: Ist $A \in O(n)$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist A eine Diagonalmatrix.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bezüglich der Standardbasis S werde $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dargestellt durch

$$M_S^S(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f ein orthogonaler Endomorphismus ist, und geben Sie eine Basis B an, so dass $M_B^B(f)$ die Gestalt aus Theorem 3.2 besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $0 \neq a \in V$ sei $\varphi_a : V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi_a(x) = x - 2\dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a$. Zeigen Sie:

(i) $\varphi_a(a) = -a$ (ii) $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}$ (iii) φ_a ist selbstadjungiert (iv) φ_a ist orthogonal

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n;K)$ heißt **idempotent**, falls $A^2 = A$ gilt.
Es sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n;K)$ äquivalent sind:

(i) $A^2 = E$

(ii) $\dfrac{1}{2}(E - A)$ ist idempotent.

(iii) A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen ± 1.

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. W. EBELING, DR. D. WILLE

Hannover, den 15. Mai 2006

5. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 22./23.5.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei V der euklidische Vektorraum der Polynome vom Grad≤ 1 mit dem Skalarprodukt $\langle p,q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Der Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ sei definiert durch $f(p) := p'$. Ist f selbstadjungiert?

Bestimmen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus f^{adj} (z.B. durch Angabe einer Abbildungsmatrix).

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie jeweils Index und Signatur der Form $\langle\ ,\ \rangle_A$, wobei

$$(i)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob es eine reelle invertierbare Matrix W gibt mit $A = W^\top BW$, und bestimmen Sie gegebenenfalls solch eine Matrix W.

Aufgabe 3 (2 / 4 / 4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf positive Definitheit:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & 11 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 9 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

c) $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ und $\chi_A = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sei das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie:

A ist genau dann positiv definit, wenn für $j = 0, 1, \ldots, n$ gilt: $(-1)^j a_j > 0$.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. Mai 2006

6. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 29./30.5.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (6 / 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils $h := \mathrm{ggT}(f, g)$ in $K[x]$, und geben Sie Polynome $q_1, q_2 \in K[x]$ an mit $h = q_1 f + q_2 g$.

a) $f = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ und $g = x^4 + x^3 + x - 1$ in $\mathbb{R}[x]$.

b) $f = x^5 + x^4 + x^2 + x$ und $g = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

f, g und h seien Polynome über dem Körper K. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau dann Polynome p, q mit $pf + qg = h$, wenn $\mathrm{ggT}(f, g) \mid h$.

b) Die Ideale $\langle f, g\rangle$ und $\langle \mathrm{ggT}(f, g)\rangle$ sind gleich.

Aufgabe 3 (3 / 3 / 4 Punkte)

Stellen Sie jeweils die Polynome über dem genannten Körper K in der Form des Satzes 6.4 dar (also als Produkte aus Polynomen vom Grad 1 und ein Polynom ohne Nullstellen in K).

a) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 4x + 4$ und $x^4 + 8x^2 + 15$ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

b) f und g aus Aufgabe 1 b) über $\mathbb{F}_2$.

c) $x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{18}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{9}$ über $\mathbb{Q}$.

Zusatzaufgabe (3 / 3 / 4 Punkte)

Es seien I_1 und I_2 Ideale im Polynomring $K[x]$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $I_1 \cap I_2$ ist ein Ideal.

b) $I_1 \cup I_2$ ist ein Ideal.

c) $I_1 + I_2$ ist ein Ideal. (Dabei ist $I_1 + I_2 := \{P + Q \mid P \in I_1 \text{ und } Q \in I_2\}$.)

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 29. Mai 2006

7. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 12./13.6.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (7 / 3 Punkte)

Bestimmen Sie bei den folgenden Matrizen jeweils das Minimalpolynom:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$ idempotent

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Beweisen Sie (ohne den Satz von Cayley-Hamilton zu benutzen):
Ist $A \in \mathrm{Mat}(2; K)$, so gilt $\mu_A | p_A$.

b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$. Zeigen Sie, dass A und $A^\top$ dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom haben.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4; \mathbb{R})$ simultan diagonalisierbar sind und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$ an, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -1 & 8 \\ -4 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & -10 \\ 6 & 7 & 3 & -9 \\ -2 & -5 & -1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: 1 und 2 sind die Eigenwerte von B.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n; K)$, $A \neq 0$ und für das Minimalpolynom μ_A gelte: Ist Q ein Teiler von μ_A, so ist $\deg(Q) = 0$ oder $\deg(Q) = n$.
Zeigen Sie, dass dann $K[A]$, versehen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen, ein Körper ist.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 12. Juni 2006

8. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 19./20.6.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis B, so dass für den durch $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ gegebenen Endomorphismus f die Matrix $M_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, und geben Sie die Matrix $M_B^B(f)$ an.
Gehen Sie dabei nach dem Beweis des Satzes 8.1 der Vorlesung vor.

Aufgabe 2 (1 / 1 / 3 / 5 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n; K)$. Zeigen Sie:

a) Ist A nilpotent und $A \neq 0$, so ist A nicht diagonalisierbar über K.

b) Ist A nilpotent und $AB = BA$, so ist auch AB nilpotent.

c) Sind A, B nilpotent und ist $AB = BA$, so ist auch $A + B$ nilpotent.

d) Ist $K = \mathbb{C}$ und gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass A und λA (über $\mathbb{C}$) ähnlich sind, so ist $|\lambda| = 1$ oder A nilpotent.

Aufgabe 3 (4 / 2 / 4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f_A(x) = Ax$.

a) Berechnen Sie $\ker A^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

b) Wie lautet die Jordansche Normalform von A?

c) Bestimmen Sie eine Basis B, so dass $M_B^B(f_A)$ die Jordansche Normalform ist.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)

a) Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$.
Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn sie dasselbe Minimalpolynom haben.

b) Es sei $p_A(x) = (x+1)^5(x-1)^4$ und $\mu_A(x) = (x+1)^3(x-1)^2$. Welche möglichen Jordanschen Normalform kann $A \in \mathrm{Mat}(9; \mathbb{R})$ besitzen?
Welche Möglichkeiten verbleiben für die Jordansche Normalform, wenn zusätzlich $\dim \mathrm{Eig}(A, -1) = \dim \mathrm{Eig}(A, 1) = 2$ gilt?

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 19. Juni 2006

9. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 26./27.6.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Es seien $A, B \in$Mat$(3; \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $p_A = p_B$ und $\mu_A = \mu_B$ gilt.

b) Gegeben sind die folgenden Matrizen aus Mat$(4; \mathbb{C})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Matrizen ähnlich sind.

Aufgabe 2 (2 / 3 / 5 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform sowie eine Jordanbasis zur Matrix A.

a) $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei P_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $\mathbb{R}$, und $\varphi : P_n \longrightarrow P_n$ sei definiert durch $\varphi(p) = p'$ (die Ableitung). Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von φ und eine Basis B, so dass $M_B^B(\varphi)$ Jordansche Normalform hat.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)

Gegeben sei die affine Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0\} .$$

a) Die Punkte $a = (-1, 0, 1)$, $b = (0, 1, -1)$, $c = (0, -1, -1)$ und $d = (1, 0, 1)$ liegen in Q. Zeigen Sie, dass die Geraden durch a und b, durch b und d, durch c und d und durch a und c ganz in Q liegen.

b) Es sei g_λ die Verbindungsgerade des Punktes $\lambda a + (1 - \lambda)b$ auf der Geraden durch a und b mit dem Punkt $\lambda c + (1 - \lambda)d$ auf der Geraden durch c und d. Zeigen Sie, dass g_λ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ganz in Q liegt.
Zeigen Sie ferner, dass g_λ und $g_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ windschief sind.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 26. Juni 2006

10. Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 3./4.7.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (2 /1 /1 / 3 / 3 Punkte)

Bringen Sie die affinen Quadriken auf Normalform gemäß Theorem 10.1 der Vorlesung.

a) $Q = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 6x_2 + 1 = 0\}$

b) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3} = 0\}$

c) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0\}$

d) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0\}$

e) $Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 + 18x_3^2 + 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 12x_2x_3 - 6x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 4 = 0\}$

Aufgabe 2 (5 / 5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Quadrik

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 - 23 = 0\}$$

eine Hyperbel darstellt, und geben Sie den Schnittpunkt ihrer Asymptoten in x_1, x_2-Koordinaten an.

b) Zeigen Sie, dass die Quadrik

$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{15}{4}x_1^2 + \frac{13}{4}x_2^2 + 5x_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_1x_2 + (9 - 12\sqrt{3})x_1 - (12 + 9\sqrt{3})x_2 - 30x_3 + 93 = 0\}$$

ein Ellipsoid darstellt, und geben Sie dessen Hauptachsen und den Mittelpunkt in x_1, x_2, x_3-Koordinaten an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(0,0,0) = (1,-1,1)$, $f(1,1,1) = (0,-3,3)$, $f(1,1,0) = (4,6,1)$ und $f(2,0,0,) = (3,3,-1)$ gibt. Geben Sie eine 3×3-Matrix A und ein $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ an mit $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$. Ist f eine Affinität? Wenn ja, wie lautet f^{-1} in der Form $f^{-1}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{c}$?

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein echter Unterraum von V. Ferner sei $r :=\dim V - \dim U$. Zeigen Sie, dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in V^*$ gibt mit $U = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \lambda_i$.

Welche Aussage erhalten Sie daraus speziell für $\dim U = n - 1$?

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 3. Juli 2006

11. (und letztes) Übungsblatt: Lineare Algebra II

Abgabe: 10./11.7.2006 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (5 / 5 Punkte)

a) Es sei $B = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die duale Basis B^*, und geben Sie die Elemente von B^* in der Form $\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ an.

b) Es sei P_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Die Abbildung $\varphi : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$ ist nach Vorlesung ein Element des Dualraums $(P_2)^*$. Geben Sie die Darstellung von φ bezüglich der zu $B = \{1, x, x^2\}$ dualen Basis B^* von $(P_2)^*$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei der Unterraum $U = \operatorname{span}\{(1,1,0,0,1), (1,0,1,0,0)\}$ des $\mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie unter Angabe der zugehörigen 1×5-Matrizen eine Basis des zu U orthogonalen Unterraums U^0 von $(\mathbb{R}^5)^*$.

Aufgabe 3 (5 / 5 Punkte)

$B = \{(1,1,0)^\top, (0,1,1)^\top, (1,0,1)^\top\}$ und $C = \{(1,1,0,0)^\top, (0,1,1,1)^\top, (0,0,1,1)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch $M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $f^*(\varphi)(2,1,2)$ für das Funktional φ mit $\varphi(\vec{x}) = 3x_1 - x_3 + x_4$.

b) Berechnen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ und hiermit Basen von $\ker f^*$ und von $\operatorname{im} f^*$.

Zusatzaufgabe (4 / 6 Punkte)

V sei ein $K-$Vektorraum endlicher Dimension, U und W seien Untervektorräume von V.
Beweisen Sie:

a) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$

b) $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$

Hinweis: Die Klausur zur LINEAREN ALGEBRA II findet am Samstag, dem 22.7.2006 in der Zeit von 8.30 - 10.00 Uhr statt. Die Gruppen Wille 1 und Wille 2 schreiben im Audi Max, alle anderen Gruppen in Hörsaal E 001.

Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Hannover
Prof. Dr. W. Ebeling, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. Juli 2006

Klausur zur Linearen Algebra II

Jede Aufgabe 10 Punkte

Erlaubte Hilfsmittel: Eigene Aufzeichnungen, Skripte, Bücher
keine elektronischen Hilfsmittel

Aufgabe 1
Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? Wenn ja, geben Sie eine zur Matrix ähnliche Diagonalmatrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Aufgabe ist ohne Rechenaufwand lösbar; Sie müssen Ihre Antwort aber jeweils begründen.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die $n \times n$-Matrix $A := \begin{pmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+1 & x & \dots & x \\ x & x & x+1 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x & x+1 \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit ist, wenn $x > -\frac{1}{n}$ ist.

Aufgabe 3
Der Endomorphismus f des $\mathbb{R}^4$ sei gegeben durch $M_E^E(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie eine Jordanbasis B des $\mathbb{R}^4$ zu f, sowie die zugehörige Matrix $M_B^B(f)$.

Aufgabe 4 (5 / 5 Punkte)
Gegeben sind die beiden Quadriken:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2\sqrt{2}\, x_1 + 2\sqrt{2}\, x_2 - 8 = 0\} \\ Q_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2x_3 + x_2 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie jeweils die affine Normalform der Quadriken.
b) Skizzieren Sie den durch Q_1 gegebenen Kegelschnitt in der x_1, x_2-Ebene.

Aufgabe 5 (4 / 6 Punkte)

a) $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ sei gegeben durch $\varphi = 2b_1^* + b_2^*$, wobei $B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ die zu $B = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ duale Basis ist. Geben Sie φ in der Form $\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = ax + by$ an.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$. Berechnen Sie $f^*\varphi$ (φ wie in a)) und $M_{E^*}^{B^*}(f^*)$. (E^* ist die zu $\{e_1, e_2, e_3\}$ duale Basis in $(\mathbb{R}^3)^*$, B^* die Basis aus a).)