Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 1. November 2001

1. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Mengen.

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $(A \setminus B) \times (A \setminus C) = (A \times A) \setminus (B \times C)$

Lösung:

a) ist wahr. **Beweis:**

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \text{ und } y \in B \cap C \\
&\iff x \in A \text{ und } (y \in B \text{ und } y \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ und } y \in B) \text{ und } (x \in A \text{ und } y \in C) \\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

Die Richtung "$\Longrightarrow$" liefert $A\times(B\cap C) \subset (A\times B)\cap(A\times C)$, die Richtung "$\Longleftarrow$" liefert $(A\times B)\cap(A\times C) \subset A \times (B \cap C)$, also gilt die Gleichheit.

b) ist falsch. **Gegenbeispiel:**

Setze $A = B = \{1\}$, $C = \{2\}$. Dann folgt $A\setminus B = \emptyset$, also $(A\setminus B)\times(A\setminus C) = \emptyset$, aber $(A\times A)\setminus(B\times C) = \{(1,1)\} \setminus \{(1,2)\} = \{(1,1)\}$.

Aufgabe 2 (je 4 Punkte)

Es seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.
Geben Sie Abbildungen f und g an, so daß gilt:
$g \circ f$ ist injektiv und g ist nicht injektiv.

b) $g \circ f$ bijektiv $\Longrightarrow$ f injektiv und g surjektiv.
Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $g \circ f$ bijektiv sein kann,
obwohl weder f surjektiv, noch g injektiv ist.

Lösung:

a) Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$. Da f surjektiv ist, gibt es zu $y_1, y_2 \in Y$ Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Wegen $y_1 \neq y_2$ gilt $x_1 \neq x_2$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$, also $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Dies heißt aber $g(y_1) \neq g(y_2)$, was zu zeigen war.
Als Beispiel kann man wählen: $X = Z = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3\}$ f gegeben durch $f(x) = x$ und g gegeben durch $g(1) = g(3) = 1$ und $g(2) = 2$.

b) Wir beweisen dies durch Umkehrschluss:
Annahme: Es gilt nicht (f injektiv und g surjektiv). Dann ist f nicht injektiv oder g nicht surjektiv.
1. Fall: f ist nicht injektiv.
Dann gibt es $a, b \in X$, $a \neq b$, mit $f(a) = f(b)$. Dann ist aber auch $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = g \circ f(b)$, also $g \circ f$ nicht injektiv und damit nicht bijektiv.
2. Fall: g nicht surjektiv.
Dann gibt es ein $c \in Z$, so dass $c \neq g(y)$ für alle $y \in Y$. Dann ist auch $c \neq g(f(x)) = g \circ f(x)$ für alle $x \in X$. Also ist $g \circ f$ nicht surjektiv und damit nicht bijektiv.

Beispiel: Sei $X = Z = \{1\}$ und $Y = \{1, 2\}$. $f : X \longrightarrow Y$ sei definiert durch $f(1) = 1$ und $g : Y \longrightarrow Z$ sei definiert durch $g(1) = g(2) = 1$.
Dann ist f nicht surjektiv und g nicht injektiv, aber $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ist bijektiv.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Gegeben sind jeweils zwei Geraden A und B im $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $A \cap B$.

a) $A = (5, 0, 6) + \mathbb{R}(1, -2, 2)$
B ist die Gerade durch die Punkte $(0, 6, -2)$ und $(5, 6, 3)$.

b) $A = (1, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}(2, -1, 1, -1, 1)$
B ist die Gerade durch die Punkte $(-5, 4, -2, 7, -2)$ und $(-1, 2, 0, 3, 0)$.

c) $A = \mathbb{R}(-3, 1, 4, 1) \quad , \quad B = (1, 2, 1, 3) + \mathbb{R}(-3, 1, 4, 1)$

Lösung:
a) Für die Gerade B erhält man mit Lemma 1.2 z. B. $B = (0, 6, -2) + \mathbb{R}(1, 0, 1)$.
Für einen Punkt $x \in A \cap B$ muß es $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$(5, 0, 6) + \lambda(1, -2, 2) = (0, 6, -2) + \mu(1, 0, 1) .$$

Das sich daraus ergebende Gleichungssystem

$$5 + \lambda = \mu \quad , \quad -2\lambda = 6 \quad , \quad 6 + 2\lambda = -2 + \mu$$

besitzt die eindeutige Lösung $\lambda = -3$, $\mu = 2$. Also gilt $A \cap B = \{(2, 6, 0)\}$.

b) Hier erhält man entsprechend für die Gerade B:

$$B = (-5, 4, -2, 7, -2) + \mathbb{R}(4, -2, 2, -4, 2) =: v_1 + \mathbb{R}w_1.$$

Es ist $A = (1, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}(2, -1, 1, -1, 1)$. Der Ansatz

$$(-5, 4, -2, 7, -2) + \alpha(4, -2, 2, -4, 2) = (1, 1, 1, 1, 1) + \beta(2, -1, 1, -1, 1)$$

liefert

$$-5 + 4\alpha = 1 + 2\beta \ , \ 4 - 2\alpha = 1 - \beta \ , \ -2 + 2\alpha = 1 + \beta \ , \ 7 - 4\alpha = 1 - \beta \ , \ -2 + 2\alpha = 1 + \beta.$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern eindeutig $\alpha = \frac{3}{2}$ und $\beta = 0$. Diese Werte erfüllen auch die anderen drei Gleichungen.
Also gilt $A \cap B = \{(1, 1, 1, 1, 1)\}$.

c) Hier führt der Ansatz $\alpha(-3, 1, 4, 1) = (1, 2, 1, 3) + \beta(-3, 1, 4, 1)$ auf das lineare Gleichungssystem

$$-3\alpha + 3\beta = 1 \quad , \quad \alpha - \beta = 2 \quad , \quad 4\alpha - 4\beta = 1 \quad , \quad \alpha - \beta = 1 .$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern den Widerspruch $\frac{1}{4} = 1$, d.h. das Gleichungssystem besitzt keine Lösung.
Es ist $A \cap B = \emptyset$. (Die Geraden sind "parallel".)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Das Parallelogramm $ABCD$ sei von den linear unabhängigen Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt. E teile die Seite AD im Verhältnis $3 : 1$, F teile die Seite DC im Verhältnis $4 : 1$ (siehe Skizze). In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AF?

Skizze siehe Originalblatt
z.B. Aushang beim Institut

Lösung:
Es ist $\vec{AF} = a + \frac{4}{5}b$ und $b + \vec{BE} = \frac{3}{4}a$, also $\vec{BE} = \frac{3}{4}a - b$. Für S muss es also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geben mit $\lambda(a + \frac{4}{5}b) = b + \mu(\frac{3}{4}a - b)$. Hieraus erhält man die Gleichung

$$(\lambda - \frac{3}{4}\mu)a + (\frac{4}{5}\lambda - 1 + \mu)b = \vec{0} .$$

Da a, b linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\lambda - \frac{3}{4}\mu = 0 \quad \text{und} \quad \frac{4}{5}\lambda - 1 + \mu = 0 .$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $\lambda = \frac{15}{32}$, $\mu = \frac{5}{8}$.
S teilt die Strecke AF also im Verhältnis $15 : 17$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 8. November 2001

2. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (2,2,1 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $A = (1,5,7)$, $B = (-1,3,6)$ und $C = (0,4,5)$. Berechnen Sie im Dreieck ABC

a) die Seitenlängen und die Winkel.
b) die Fußpunkte der Höhen auf den Seiten.
c) den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Lösung:
a) Mit $c = \vec{AB} = (-2,-2,-1)$, $a = \vec{BC} = (1,1,-1)$ und $b = \vec{AC} = (-1,-1,-2)$ folgt: $\|c\| = 3$, $\|a\| = \sqrt{3}$, $\|b\| = \sqrt{6}$.
$\cos\alpha = \dfrac{\langle b, c\rangle}{\|b\|\,\|c\|} = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}$ liefert $\alpha \approx 35,26°$. $\cos\gamma = \dfrac{\langle -b\,,\,-a\rangle}{\|a\|\,\|b\|} = 0$ liefert $\gamma = 90°$.
Durch Ergänzung folgt $\beta \approx 54,74°$.
b) Da das Dreieck rechtwinklig ist mit rechtem Winkel γ, ist C der Fußpunkt von h_A und h_B. Der Fußpunkt von h_C ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden g durch A und B mit der Ebene E durch C senkrecht zu AB.
Es ist $g = (1,5,7) + \mathbb{R}(2,2,1)$ und E ist gegeben durch die Gleichung $2x + 2y + z = 13$ (Normalenvektor von E ist $(2,2,1)$!).
Durch Einsetzen der Darstellung von g in diese Gleichung ergibt sich
$2(1+2\lambda) + 2(5+2\lambda) + 7 + \lambda = 13$ mit der Lösung $\lambda = -\frac{2}{3}$ und daher lautet der Fußpunkt:

$$(1,5,7) - \frac{2}{3}(2,2,1) = (-\frac{1}{3}\,,\,\frac{11}{3}\,,\,\frac{19}{3})\ .$$

c) Benutzt man die Formel $S = \frac{1}{3}(A+B+C)$ für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so erhält man sofort $S = (0,4,6)$.
Kennt man die Formel nicht, so stellt man die Seitenhalbierende zu c auf, und zwar ist $S_c = (0,4,5) + \mathbb{R}(0,0,\frac{3}{2})$ (Schulwissen liefert dann $S = (0,4,5) + \frac{2}{3}(0,0,\frac{3}{2}) = (0,4,6)$), ferner kann man noch die Seitenhalbierende zu b aufstellen; dies ist $S_b = (-1,3,6) + \mathbb{R}(-\frac{3}{2}\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,0)$. Der Schnittpunkt beider Seitenhalbierenden ist dann $S = (0,4,6)$.

Aufgabe 2 (2,3,3 Punkte)

Gegeben seien die Ebenen $E_1 = (1,2,3) + \mathbb{R}\,(1,1,-1) + \mathbb{R}\,(2,-1,1)$ und
$E_2 = \{(x,y,z)\ ;\ 2x + 3y - z + 1 = 0\}$, die Gerade $A = (5,0,6) + \mathbb{R}\,(1,-2,2)$ und der Punkt $u = (3,-2,1)$.

a) Stellen Sie E_1 in der Darstellung des Satzes 1.6 der Vorlesung dar, und geben Sie für E_2 eine Parameterdarstellung an.
b) Bestimmen Sie: $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, $E_1 \cap E_2$.
c) Berechnen Sie $d(u,A)$, $d(u,E_1)$ und $d(u,E_2)$.

Lösung:

a) Um eine Parameterdarstellung von E_2 zu erhalten, setzt man einfach zwei der Variablen x, y, z in $2x + 3y - z + 1 = 0$ als Parameter λ und μ an, und löst nach der dritten Variablen auf, z.B. $x = \lambda$, $y = \mu$, also $z = 1 + 2\lambda + 3\mu$, d.h.

$$E_2 = (\lambda, \mu, 1 + 2\lambda + 3\mu) = (0, 0, 1) + \mathbb{R}(1, 0, 2) + \mathbb{R}(0, 1, 3)$$

ist eine gesuchte Parameterdarstellung.
Will man für E_1 eine Darstellung gemäß Satz 1.6 aufstellen und nur die Theorie bis zu diesem Satz benutzen, so bestimmt man zunächst drei Punkte von E_1, die nicht auf einer Geraden liegen, z.B. $(1, 2, 3), (2, 3, 2)$ und $(3, 1, 4)$ (sie liegen nicht auf einer Geraden, da die Vektoren $(2, 3, 2) - (1, 2, 3)$ und $(3, 1, 4) - (1, 2, 3)$ linear unabhängig sind!). Da $E_1 = \{(x, y, z)\ ;\ ax + by + cz - d = 0\}$ mit gewissen a, b, c, d ist, lassen sich a, b, c, d durch Einsetzen der drei Punkte aus dem entstehenden Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & + & 3c & - & d & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & 2c & - & d & = & 0 \\ 3a & + & b & + & 4c & - & d & = & 0 \end{array}$$

bestimmen. Wählt man z.B. $d = 5$, so folgt $a = 0, b = c = 1$. Es ist also

$$E_1 = \{(x, y, z)\ ;\ y + z - 5 = 0\}\ .$$

b) **Berechnung von $A \cap E_1$:**

$$(1, 2, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(2, -1, 1) = (5, 0, 6) + \delta(1, -2, 2)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda & + & 2\mu & - & \delta & = & 4 \\ \lambda & - & \mu & + & 2\delta & = & -2 \\ -\lambda & + & \mu & - & 2\delta & = & 3 \end{array}\ .$$

Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt den Widerspruch $0 = 1$; es folgt $A \cap E_1 = \emptyset$.
(Benutzt man die unter a) berechnete Darstellung für E_1 und setzt dort $x = 5 + \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 6 + 2\lambda$, so folgt $-2\lambda + 6 + 2\lambda - 5 = 0$, also sofort ein Widerspruch. Diese Methode führt i.a. schneller zur Berechnung des Schnittes von Gerade und Ebene.)

Berechnung von $A \cap E_2$:

Nach der letzten Bemerkung erhalten wir mit der angegebenen Darstellung von E_2:

$$2(5 + \lambda) - 6\lambda - 6 - 2\lambda + 1 = 0\ , \qquad \text{also} \qquad \lambda = -\frac{5}{6}\ .$$

Damit ergibt sich $A \cap E_2 = \{\frac{1}{6}(25, 10, 26)\}$.

Berechnung von $E_1 \cap E_2$:

In der Darstellung von E_2 setzen wir $x = 1 + \lambda + 2\mu$, $y = 2 + \lambda - \mu$, $z = 3 - \lambda + \mu$. Es entsteht die Gleichung

$$2(1 + \lambda + 2\mu) + 3(2 + \lambda - \mu) - (3 - \lambda + \mu) + 1 = 0, .$$

Daraus folgt $\lambda = -1$, μ beliebig und es ergibt sich als Schnitt von E_1 und E_2 eine Gerade, nämlich

$$E_1 \cap E_2 = (1, 2, 3) - (1, 1, -1) + \mathbb{R}(2, -1, 1) = (0, 1, 4) + \mathbb{R}(2, -1, 1)\ .$$

c) Nach der Formel der Vorlesung folgt

$$\begin{aligned} d(u,A) &= \|(5,0,6) + \frac{\langle(-2,-2,-5),(1,-2,2)\rangle}{\|(1,-2,2)\|^2}(1,-2,2) - (3,-2,1)\| \\ &= \|\frac{1}{9}(10,34,29)\| \approx 5,09\ . \end{aligned}$$

Es ist $E_1 = \{(x,y,z)\,;\, y+z-5=0\}$. Also gilt nach Vorlesung

$$d(u,E_1) = \frac{|-2+1-5|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4,24.$$

Entsprechend folgt mit der angegebenen Darstellung für E_2: $d(u,E_2) = 0$, d.h. u liegt in E_2.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien v_1, v_2, v_3 drei Punkte im $\mathbb{R}^n$, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, daß es dann genau eine Ebene durch diese drei Punkte gibt.

Lösung:

Zunächst zeigen wir:

Liegen die Punkte $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ nicht auf einer Geraden, so sind die Vektoren $w_1 := v_2 - v_1$ und $w_2 := v_3 - v_1$ linear unabhängig.

Beweis: Zunächst folgt $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, also $w_1 \neq 0$ und $w_2 \neq 0$. Annahme: w_1, w_2 sind linear abhängig.

Dann gibt es nach Lemma 1.4 ein $\rho \neq 0$ mit $w_1 = \rho w_2$, also $v_2 - v_1 = \rho(v_3 - v_1)$. Das bedeutet aber, daß v_1, v_2, v_3 auf der Geraden $v_1 + \mathbb{R}(v_2 - v_1)$ liegen. **Widerspruch !**

Sind also v_1, v_2, v_3 drei Punkte im $\mathbb{R}^n$, die nicht auf einer Geraden liegen, so sind $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_1$ linear unabhängig, und $v_1 + \mathbb{R}(v_2 - v_1) + \mathbb{R}(v_3 - v_1)$ ist eine Ebene (die v_1, v_2 und v_3 enthält!).

Zu zeigen bleibt die *Eindeutigkeit.* Dazu zeigen wir:

Ist $A = u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3$ eine Ebene, die die nicht auf einer Geraden liegenden Punkte v_1, v_2, v_3 enthält, so gilt $A = v_1 + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$ mit $w_1 = v_2 - v_1$ und $w_2 = v_3 - v_1$.

Beweis: "$\supset$"

Sei $x \in v_1 + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$, d. h. es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$x = v_1 + \lambda w_1 + \mu w_2\ . \tag{1}$$

Da $v_i \in A$ $(i = 1,2,3)$, gibt es $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ mit $v_i = u_1 + \alpha_i u_2 + \beta_i u_3$ $(i = 1,2,3)$. Einsetzen in (1) ergibt: (Beachte $w_1 = v_2 - v_1$ und $w_2 = v_3 - v_1$!)

$$\begin{aligned} x &= u_1 + \alpha_1 u_2 + \beta_1 u_3 + \lambda(u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_2 u_3 - u_1 - \alpha_1 u_2 - \beta_1 u_3) + \\ &\qquad + \mu(u_1 + \alpha_3 u_2 + \beta_3 u_3 - u_1 - \alpha_1 u_2 - \beta_1 u_3) \\ &= u_1 + r u_2 + s u_3 \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R} \qquad \text{(Sortieren!)} \\ &\in A \end{aligned}$$

"$\subset$" Sei $x \in A$, d. h. es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$x = u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3\ . \tag{2}$$

Zunächst gilt: (Setze v_i wie oben an!)

$$\begin{array}{lrcll} (3) & w_1 = & (\alpha_2 - \alpha_1)u_2 + (\beta_2 - \beta_1)u_3 & | & \cdot(\alpha_3 - \alpha_1) \\ (4) & w_2 = & (\alpha_3 - \alpha_1)u_2 + (\beta_3 - \beta_1)u_3 & | & \cdot -(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \hline (5) & (\alpha_3 - \alpha_1)w_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)w_2 = & \underbrace{((\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_1))}_{=:\delta} u_3 & & \end{array}$$

Behauptung: $\delta \neq 0$

Wäre $\delta = 0$, so würde aus der linearen Unabhängigkeit von w_1 und w_2 folgen: $\alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Das liefert mit (3) und (4):

$$w_1 = (\beta_2 - \beta_1)u_3 \quad , \quad w_2 = (\beta_3 - \beta_1)u_3 \ ,$$

ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von w_1 und w_2.
(5) läßt sich damit nach u_3 auflösen.

(6) $$u_3 = \frac{1}{\delta}((\alpha_3 - \alpha_1)w_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)w_2) =: r_3 w_1 + s_3 w_2 \ .$$

Aus dem Beweis für $\delta \neq 0$ folgt insbesondere $\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. (3) oder (4) läßt sich also nach u_2 auflösen und ergibt mit (6) eine Darstellung

(7) $$u_2 = r_2 w_1 + s_2 w_2 \qquad \text{mit } r_2, s_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Benutzt man nun noch $u_1 = v_1 - \alpha_1 u_2 - \beta_1 u_3$ und ersetzt in (2) u_1 hiernach und u_2 und u_3 gemäß (7) und (6), so folgt:

$$x = u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = v_1 + k w_1 + l w_2 \qquad \text{mit } k, l \in \mathbb{R} \ ;$$

also $x \in v_1 + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$.

Aufgabe 4 (je 3 Punkte)

Es sei $A = u + \mathbb{R}v$ eine Gerade und $E = \{x \ ; \ \langle n, x - a\rangle = 0\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) $A \subset E$ oder $A \cap E = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v, n\rangle = 0$

b) $\langle v, n\rangle \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad u + \dfrac{\langle n, a - u\rangle}{\langle n, v\rangle} v \in A \cap E$

Lösung:

a) Beweis von " $\Longrightarrow$ ":
Ist $A \subset E$, so folgt $u \in E$, also $\langle n, u - a\rangle = 0$, d.h. $\langle n, u\rangle = \langle n, a\rangle$. Da jeder Punkt von A auch in E liegt, gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\langle n, u + \lambda v - a\rangle = 0$.
Die Rechenregeln für das Skalarprodukt liefern nun $\langle n, u\rangle + \lambda\langle n, v\rangle - \langle n, a\rangle = 0$. Mit $\langle n, u\rangle = \langle n, a\rangle$ folgt $\lambda\langle n, v\rangle = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und daher $\langle n, v\rangle = \langle v, n\rangle = 0$.
Ist $A \cap E = \emptyset$, so schließen wir indirekt.
Wäre $\langle v, n\rangle \neq 0$, so setzen wir $\lambda := \frac{\langle n, a-u\rangle}{\langle n, v\rangle}$ Es ist $u + \lambda v \in A$ nach Definition von A. Aber es folgt auch $u + \lambda v \in E$, denn

$$\langle n, u + \lambda v - a\rangle = \langle n, u\rangle + \lambda\langle n, v\rangle - \langle n, a\rangle = \langle n, u\rangle + \langle n, a - u\rangle - \langle n, a\rangle = 0 \ .$$

Also folgt $A \cap E \neq \emptyset$, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Beweis von " $\Longleftarrow$ ":
Es sei $\langle v, n\rangle = 0$ und $x \in A$, d.h. $x = u + \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\langle n, x - a\rangle = \langle n, u + \lambda v - a\rangle = \langle n, u\rangle + \lambda\langle n, v\rangle - \langle n, a\rangle = \langle n, u\rangle - \langle n, a\rangle \ ,$$

da $\langle v, n\rangle = 0$.
Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: $u \in E$
Dann gilt für jedes $x \in A$:

$$\langle n, x - a\rangle = \langle n, u\rangle - \langle n, a\rangle = \langle n, u - a\rangle = 0 \ ,$$

also folgt $A \subset E$.
2. Fall: $u \notin E$:
Dann gilt für jedes $x \in A$:

$$\langle n, x - a \rangle = \langle n, u \rangle - \langle n, a \rangle = \langle n, u - a \rangle \neq 0 \ ,$$

also folgt $A \cap E = \emptyset$.

b) Wir setzen $x = u + \frac{\langle n, a-u \rangle}{\langle n, v \rangle} v$. Es ist $x \in A$ nach Definition von A.
Zu zeigen bleibt: $x \in E$.
Dazu muß $\langle n, x - a \rangle = 0$ gezeigt werden.

$$\begin{aligned} \langle n, u + \frac{\langle n, a-u \rangle}{\langle n, v \rangle} v - a \rangle &= \langle n, u \rangle + \langle n, a - u \rangle - \langle n, a \rangle \\ &= \langle n, u \rangle + \langle n, a \rangle - \langle n, u \rangle - \langle n, a \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 15. November 2001

3. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element in G ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Lösung:

Zu zeigen ist $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$.

Aus $a \circ a = e$ für alle $a \in G$ folgt $a = a^{-1}$ für alle $a \in G$, da inverse Elemente in Gruppen eindeutig sind. Für das Element $(a \circ b) \in G$ gilt also auch $(a \circ b)^{-1} = (a \circ b)$. Nun schließen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} a \circ b = (a \circ b)^{-1} &= b^{-1} \circ a^{-1} \quad \text{nach Lemma 2.3} \\ &= b \circ a \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Zeigen Sie: Die 6 Abbildungen $h_i : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0,1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto h_i(x) \end{cases}$ mit

$h_1(x) := x,\ h_2(x) := 1 - x,\ h_3(x) := \dfrac{1}{x},\ h_4(x) := \dfrac{x}{x-1},\ h_5(x) := \dfrac{1}{1-x},\ h_6(x) := 1 - \dfrac{1}{x}$

bilden bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe $(G, \circ)$.

Ist diese Gruppe abelsch?

Lösung:

Zunächst muß gezeigt werden, daß $\circ$ eine Verknüpfung auf der Menge $\{h_1, \ldots, h_6\}$ ist. Dazu wird eine **Verküpfungstafel** aufgestellt. Wie sie sich ergibt, erläutert das folgende Beispiel:

$$(h_4 \circ h_6)(x) = h_4(h_6(x)) = h_4(1 - \frac{1}{x}) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} - 1} = 1 - x = h_2(x)$$

Man erhält so:

$\circ$	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_1	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
h_2	h_2	h_1	h_6	h_5	h_4	h_3
h_3	h_3	h_5	h_1	h_6	h_2	h_4
h_4	h_4	h_6	h_5	h_1	h_3	h_2
h_5	h_5	h_3	h_4	h_2	h_6	h_1
h_6	h_6	h_4	h_2	h_3	h_1	h_5

Es liegt eine Gruppe vor, denn die Hintereinanderausführung $\circ$ von Funktionen ist nach Vorlesung assoziativ, h_1 ist neutrales Element und jedes Element besitzt ein inverses Element, wie die Verknüpfungstafel zeigt.

Aus der Verknüpfungstafel erkennt man z.B. $h_2 \circ h_3 \neq h_3 \circ h_2$, also ist die Gruppe nicht abelsch.

Aufgabe 3 (3, 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Körper mit genau 3 Elementen.

b) Es sei $A := \{(a + b\,\mathrm{i}\,;\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Betrachten Sie $(A, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ wie in $\mathbb{C}$ definiert sind, und untersuchen Sie, welche der in der Vorlesung eingeführten Grundstrukturen $(A, +, \cdot)$ ist.

Lösung:

a) Wir bezeichnen die Elemente eines Körpers mit 3 Elementen mit $0, 1, 2$, wobei 0 das existierende neutrale Element der Addition und 1 das existierende neutrale Element der Multiplikation in $K \setminus \{0\}$ sein soll.

Nach Stundenübung ist dann $(K, +)$ bis auf Isomorphie eindeutig und zwar durch die Verknüpfungstafel

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

gegeben. Nun muß $\{1, 2\}$ bezüglich $\cdot$ noch eine Gruppe (mit neutralem Element 1) sein. Also muß - wieder nach Stundenübung - $2 \cdot 2 = 1$ sein. Die so definierte Struktur erfüllt aber auch das dritte Körpergesetz K3, nämlich das Distributivgesetz, wie man durch Betrachtung der einzelnen Fälle nachweist; hier nur für einen nichttrivialen Fall beispielhaft durchgeführt:

$$(1 + 1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 1 = 2 + 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$$

Daß auch $2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$ gilt, braucht nicht noch nachgewiesen zu werden. Dies folgt aus der Kommutativität von $\cdot$.

Damit gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen Körper mit 3 Elementen.

b) Wie in der Vorlesung läßt sich A auffassen als $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Die Addition auf A ist komponentenweise definiert. Da $(\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, ist daher auch $(A, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$.

Wegen $A \subset \mathbb{C}$, und da $\cdot$ eine Verknüpfung auf A ist, ist $(A, \cdot)$ eine Halbgruppe; $\cdot$ ist kommutativ und es gelten die Distributivgesetze. (Assoziativgesetz und Kommutativgesetz bzgl. $\cdot$ und Distributivgesetze gelten in $\mathbb{C}$ und daher auch in der Teilmenge A von $\mathbb{C}$.)

Wegen $1 = 1 + 0\mathrm{i} \in A$ ist $(A, +, \cdot)$ damit ein kommutativer Ring mit Einselement.

$(A, +, \cdot)$ ist kein Körper, denn z.B. besitzt $(2, 0) \neq (0, 0)$ kein inverses Element in A. Ein solches müßte nämlich gleich dem Inversen von $(2, 0)$ in $\mathbb{C}$ sein. Dieses ist $(\frac{1}{2}, 0)$, aber $(\frac{1}{2}, 0) \notin A$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Berechnen Sie $\quad z_1 \cdot z_2, \quad \dfrac{z_1}{z_2}, \quad \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}, \quad z_2^9, \quad$ sowie $|z_1|$ und $|z_2|$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (-3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i})(\sqrt{3} + \mathrm{i}) = -6\sqrt{3} + 6\mathrm{i} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{-3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}} = \frac{(-3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})}{(\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})} = \frac{-3\sqrt{3} + 3\mathrm{i} + 9\mathrm{i} + 3\sqrt{3}}{4} = 3\mathrm{i} \\
\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} &= \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{-3 - 3\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})(-3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i})}{36} = \frac{1}{3}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Die Polarkoordinatendarstellung von z_2 lautet $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Damit folgt

$$z_2^9 = 2^9 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{6}} = 512 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} = -512\mathrm{i}\,.$$

Ferner gilt $|z_1| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ und $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. November 2001

4. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsssskizzen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)

a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $4\mathrm{i}z^2 + (8 - 4\mathrm{i})z - 12 - 3\mathrm{i} = 0$.

b) Zeigen Sie:
Ist $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, so gibt es genau zwei komplexe Zahlen w_1, w_2 mit $w_1^2 = w_2^2 = z$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} & 4\mathrm{i}z^2 + (8-4\mathrm{i})z - 12 - 3\mathrm{i} &=& \ 0 \qquad | : (4\mathrm{i}) \\ \Longleftrightarrow \quad & z^2 - (1+2\mathrm{i})z + (-\tfrac{3}{4} + 3\mathrm{i}) &=& \ 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underbrace{(z - \frac{1+2\mathrm{i}}{2})}_{=:w}{}^2 &=& \ -2\mathrm{i} \qquad (*) \end{aligned}$$

Gesucht sind zunächst Zahlen w mit $w^2 = 2\mathrm{i}$. Der Ansatz $w = a + b\mathrm{i}$ liefert $w^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$, durch Koeffizientenvergleich also

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2ab = -2 .$$

Die erste Gleichung ergibt $|a| = |b|$, die zweite Gleichung liefert $ab = -1$. Damit ergeben sich die beiden Zahlen $w_1 = -1 + \mathrm{i}$ und $w_2 = 1 - \mathrm{i}$, die tatsächlich $w^2 = -2\mathrm{i}$ lösen. Mit $(*)$ ergeben sich daraus die Lösungen

$$z_1 = \frac{1+2\mathrm{i}}{2} + (-1+\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} + 2\mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1+2\mathrm{i}}{2} + (1-\mathrm{i}) = \frac{3}{2}$$

der gegebenen quadratischen Gleichung.

b) Es sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $r > 0$ (da $z \neq 0$). Wir setzen $w_1 := \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})$. Es ist $w_1^2 = z$ nach Vorlesung. Damit ist die Existenz einer Lösung der Gleichung $w^2 = z$ gezeigt. Ist w nun irgendeine komplexe Zahl mit $w^2 = z$, so gilt also $w_1^2 = w^2$, d.h. $w_1^2 - w^2 = 0$, also $(w_1 - w)(w_1 + w) = 0$. Daraus folgt $w = w_1$ oder $w = -w_1$. Wegen $w_1 \neq 0$ ist $w_1 \neq -w_1$, also gibt es genau zwei komplexe Zahlen w mit $w^2 = z$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0\}$. Ferner seien $\oplus$ und $\odot$ definiert durch

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2 \, , \, \frac{1}{2} y_1 \cdot y_2) \\ k \odot (x_1, y_1) &:= (k x_1 \, , \, 2 \cdot (\frac{y_1}{2})^k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Q} . \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

Lösung:

Hinweis zur Lösung: Die Multiplikation $\cdot$ in $\mathbb{R}$ wird nur dort geschrieben, wo es sinnvoll erscheint. Es gilt (V1):

Wir zeigen, dass $(V, \oplus)$ abelsche Gruppe mit neutralem Element $(0,2)$ ist.
$\oplus$ ist Verknüpfung auf V, da aus $y_1, y_2 > 0$ auch $\frac{1}{2}y_1y_2 > 0$ folgt.
$\oplus$ ist assoziativ und kommutativ, da $+$ und $\cdot$ assoziativ und kommutativ in $\mathbb{R}$ sind.
Es gilt $(x,y) \oplus (0,2) = (x+0, \frac{1}{2}y \cdot 2) = (x,y) = (0,2) \oplus (x,y)$, also ist $(0,2)$ neutrales Element in V.
Zu (x,y) ist $(-x, \frac{4}{y})$ invers, denn aus $y > 0$ folgt auch $\frac{4}{y} > 0$ und

$$(x,y) \oplus (-x, \frac{4}{y}) = (x - x, \frac{1}{2}y \cdot \frac{4}{y}) = (0,2) = (-x, \frac{4}{y}) \oplus (x,y) \ .$$

Es ist $\odot : \mathbb{Q} \times V \longrightarrow V$, da für $y > 0$ und $k \in \mathbb{Q}$ auch $2 \cdot (\frac{y}{2})^k > 0$ gilt.
Es gilt (V2): Dazu ist zu zeigen:
(i) $r \odot (s \odot (x,y)) = (r \cdot s) \odot (x,y)$

$$\begin{aligned} r \odot (s \odot (x,y)) &= r \odot (sx, 2 \cdot (\frac{y}{2})^s) = (rsx, 2 \cdot ((\frac{y}{2})^s)^r) \\ &= (rsx, 2 \cdot (\frac{y}{2})^{rs}) = (rs) \odot (x,y) \end{aligned}$$

(ii) $r \odot ((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) = r \odot (x_1,y_1) \oplus r \odot (x_2,y_2)$

$$\begin{aligned} r \odot ((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) &= r \odot (x_1 + x_2, \frac{1}{2}y_1 \cdot y_2) = (r(x_1+x_2), 2 \cdot (\frac{y_1y_2}{4})^r) \\ &= (rx_1 + rx_2, 2 \cdot (\frac{y_1}{2})^r \cdot (\frac{y_2}{2})^r) \\ &= (rx_1, 2 \cdot (\frac{y_1}{2})^r) \oplus (rx_2, 2 \cdot (\frac{y_2}{2})^r) = r \odot (x_1,y_1) \oplus r \odot (x_2,y_2) \end{aligned}$$

(iii) $(r+s) \odot (x,y) = r \odot (x,y) \oplus s \odot (x,y)$

$$\begin{aligned} (r+s) \odot (x,y) &= ((r+s)x, 2 \cdot (\frac{y}{2})^{r+s}) = (rx + ry, 2 \cdot (\frac{y}{2})^r \cdot (\frac{y}{2})^s) \\ &= (rx, 2 \cdot (\frac{y}{2})^r) \oplus (sx, 2 \cdot (\frac{y}{2})^s) = r \odot (x,y) \oplus s \odot (x,y) \end{aligned}$$

(iv) $1 \odot (x,y) = (x,y)$ folgt direkt aus der Definition von $\odot$.
Damit ist $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

V sei ein K-Vektorraum, U_1, U_2 seien Unterräume von V. Zeigen Sie:
$U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von $V \iff U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Lösung:
"$\Longleftarrow$" Gilt $U_1 \subset U_2$, so ist $U_1 \cup U_2 = U_2$, gilt $U_2 \subset U_1$, so ist $U_1 \cup U_2 = U_1$; d. h. $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum.
"$\Longrightarrow$" Beweis indirekt: Annahme $U_1 \not\subset U_2$ und $U_2 \not\subset U_1$.
Dann gibt es Vektoren $x \in U_1 \setminus U_2$ und $y \in U_2 \setminus U_1$. Es ist $x \in U_1 \cup U_2$ und $y \in U_1 \cup U_2$, also auch $x + y \in U_1 \cup U_2$, da $U_1 \cup U_2$ nach Voraussetzung ein Untervektorraum ist.
Ist $x + y \in U_1$, so ist auch $x + y + (-x) = y \in U_1$, da U_1 ein Untervektorraum ist. Dies ist ein Widerspruch zu $y \in U_2 \setminus U_1$.
Ist $x + y \in U_2$, so ist auch $x + y + (-y) = x \in U_2$, da U_2 ein Untervektorraum ist. Dies ist ein Widerspruch zu $x \in U_1 \setminus U_2$.

Aufgabe 4 (je 2 Punkte)

Welche der angegebenen Mengen sind Unterräume vom $\mathbb{R}$−Vektorraum V?

a) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \{(x_1, x_2)\ ;\ 3x_1 - 4x_2 = a\}$ $\quad (a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben)
$\quad \{(x_1, x_2)\ ;\ (x_1 - 1)^2 - x_2^2 = 1\}$

b) $V = \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\quad \{f \in V\ ;\ f(3) = a\}$ $\quad (a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben)
$\quad \{f \in V\ ;\ f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \mathbb{R}[x]$ $\quad \{p \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \mathrm{Grad}\, p \geq 3\} \cup \{0\}$
$\quad \{p \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \exists a_0, a_2, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R}$ mit $p = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{2n}x^{2n}\}$

Hinweis zu c): Ist $p = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p.

Lösung:

a) $\{(x_1, x_2)\,;\, 3x_1 - 4x_2 = a\}$ ist für $a = 0$ ein Untervektorraum, für $a \neq 0$ kein Untervektorraum (der Nullvektor gehört dann nicht dazu).
$A := \{(x_1, x_2)\,;\,(x_1 - 1)^2 - x_2^2 = 1\}$ ist <u>kein</u> Untervektorraum. Z. B. gilt $(2, 0) \in A$, aber $2 \cdot (2, 0) \notin A$.

b) $A := \{f \in V\,;\, f(3) = a\}$ ist für $a \neq 0$ kein Untervektorraum, da dann der Nullvektor (hier die Nullfunktion) nicht zu A gehört.
Für $a = 0$ ist A ein Untervektorraum.
<u>Beweis</u> Es gilt (U0), da $0 \in A$.
Zu (U1): Seien $f, g \in A$, also $f(3) = g(3) = 0$. Dann gilt:
$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in A$.
Zu (U2) Sei $f \in A$, also $f(3) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(\alpha f)(3) = \alpha \cdot f(3) = \alpha \cdot 0 = 0$, also $\alpha f \in A$.
Entsprechend zeigt man, daß $\{f \in V\,;\, f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum ist.

c) $A := \{p \in \mathbb{R}[x]\,;\,\mathrm{Grad}\, p \geq 3\} \cup \{0\}$ ist <u>kein</u> Untervektorraum. Z. B. gilt für $p_1 = x^3 + x$ und $p_2 = -x^3 + x^2$: $\quad p_1, p_2 \in A$, aber $p_1 + p_2 = x^2 + x \notin A$.
$A := \{p \in \mathbb{R}[x]\,;\, p = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}\}$ ist ein Untervektorraum.
Das Nullpolynom liegt in A und mit $p, q \in A$ treten auch in $p + q$ und in αp ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig) nur Potenzen mit geraden Exponenten auf, d.h. $p + q \in A$ und $\alpha p \in A$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 29. November 2001

5. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung (im $\mathbb{R}^5$) für das folgende homogene lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Gehen Sie dabei bitte genau nach dem Beweis von Satz 4.2 der Vorlesung vor.

Lösung:

Es wird der Induktionsbeweis zu Satz 4.2 nachvollzogen.

Wir vertauschen die erste und zweite Gleichung, denken uns eine triviale Gleichung ($0 = 0$) hinzugefügt und subtrahieren als erstes das 3-fache der ersten Gleichung von dem 2-fachen der dritten Gleichung. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & -4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Mit den letzten drei Gleichungen wird das Verfahren iteriert, wir addieren das 4-fache der zweiten zur dritten Gleichung:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & -7x_3 & - & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Hier sind wir an der Stelle angelangt, wo wir die letzte Gleichung als eine Gleichung in den Variablen x_4, x_5 zu interpretieren haben, bei der alle Koeffizienten gleich Null sind, d.h. für diese Gleichung ist jedes $x = (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$ Lösung. Wir wählen nun z.B. $x_4 = 7$ und $x_5 = 0$ als nicht-triviale Lösung, und erhalten aus den ersten drei Gleichungen zugehörige x_3, x_2, x_1, also insgesamt eine nicht-triviale Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystems. Die Rechnung liefert $-7x_3 - 14 = 0$, also $x_3 = -2$, $x_2 + 4 - 7 = 0$, also $x_2 = 3$ und schließlich $2x_1 + 6 + 2 = 0$, also $x_1 = -4$, d.h. $x = (-4, 3, -2, 7, 0)$ ist eine gesuchte nicht-triviale Lösung des gegebenen homogenen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei V ein $K-$Vektorraum und es seien A, B Teilmengen von V.

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $A \cap B \neq \{0\} \implies \mathrm{Span}\,(A \cap B) = \mathrm{Span}\,A \cap \mathrm{Span}\,B$

b) $A \subset B$ oder $B \subset A \iff \mathrm{Span}\,(A \cup B) = \mathrm{Span}\,A \cup \mathrm{Span}\,B$

c) $\mathrm{Span}\,(\,\mathrm{Span}\,A \cap \mathrm{Span}\,B\,) = \mathrm{Span}\,A \cap \mathrm{Span}\,B$

d) $\mathrm{Span}\,(A \cup B) = \mathrm{Span}\,(\,\mathrm{Span}\,A \cup \mathrm{Span}\,B\,)$

Lösung:

a) ist falsch.
Setze z. B. $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $B = \{(1,0),(1,1)\}$. Dann gilt $A \cap B = \{(1,0)\} \neq \emptyset$, $\operatorname{Span}(A \cap B) = \mathbb{R}(1,0)$, aber $\operatorname{Span} A = \operatorname{Span} B = \mathbb{R}^2$.

b) ist falsch.
Die Richtung "$\Longleftarrow$" ist nämlich falsch, wie das Beispiel unter a) zeigt.
Dagegen ist die Richtung "$\Longrightarrow$" wahr.
Ist nämlich $A \subset B$, so gilt $A \cup B = B$. Ferner folgt aus $A \subset B$ nach Regel 2 der Vorlesung $\operatorname{Span} A \subset \operatorname{Span} B$, also insgesamt $\operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span} B = \operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B$.
Der Fall $B \subset A$ wird entsprechend behandelt.

c) ist wahr.
Beweis: $\operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B$ ist als Durchschnitt von Untervektorräumen ein Untervektorraum. Nach Regel 3 über die Erzeugnisse gilt:

$$\operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B = \operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B)$$

d) ist wahr.
Beweis: Trivialerweise gilt $A \cup B \subseteq \operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B$. Regel 2 liefert damit:

$$\operatorname{Span}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B)\ .$$

Ferner gilt $\operatorname{Span} A \subseteq \operatorname{Span}(A \cup B)$ und $\operatorname{Span} B \subseteq \operatorname{Span}(A \cup B)$. Daraus folgt

$$\operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B \subseteq \operatorname{Span}(A \cup B)\ .$$

Wieder wird Regel 2 angewendet:

$$\begin{aligned}\operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B) &\subseteq \operatorname{Span}(\operatorname{Span}(A \cup B)) \\ &= \operatorname{Span}(A \cup B) \qquad \text{nach Regel 4}\ .\end{aligned}$$

Insgesamt ist damit $\operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B)$ gezeigt.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im K−Vektorraum V.

a) $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$
$(1,0,1,4)$, $(-1,2,-1,1)$, $(1,2,1,9)$

b) V der Vektorraum aus Hausübung 4, Aufgabe 2, also $K = \mathbb{Q}$
$(1,1)$, $(2,2)$

c) α) $V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{C}$ $\qquad$ β) $V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{R}$
$(\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1)$, $(1,\mathrm{i},\mathrm{i})$, $(\mathrm{i}-1, \mathrm{i}, \mathrm{i}-1)$

d) $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$
$f_1(t) = t+4$, $f_2(t) = |t+4|$, $f_3(t) = |t|+4$

Lösung:

a) $(1,0,1,4)$, $(-1,2,-1,1)$, $(1,2,1,9)$ sind linear abhängig, denn
$2(1,0,1,4) + (-1,2,-1,1) = (1,2,1,9)$.

b) Die Vektoren sind linear unabhängig.
Sei nämlich $\alpha \odot (1,1) \oplus \beta \odot (2,2) = (0,2)$ (der Nullvektor in V!). Es folgt

$$\begin{aligned}(\alpha, 2\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}) \oplus (2\beta, 2\cdot 1^{\beta}) &= (\alpha+2\beta, \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}\cdot 2) \\ &= (\alpha+2\beta, 2\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}) = (0,2)\end{aligned}$$

Aus $\alpha + 2\beta = 0$ und $2 \cdot (\frac{1}{2})^\alpha = 2$ folgt zunächst $(\frac{1}{2})^\alpha = 1$, also $\alpha = 0$ und dann auch $\beta = 0$.

c) α) Durch "scharfes Hinsehen" erkennt man

$$(\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1) + (1, \mathrm{i}, \mathrm{i}) = (1+\mathrm{i}, 1, 1+\mathrm{i}) = (-\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}-1, \mathrm{i}, \mathrm{i}-1)\,.$$

Damit sind die gegebenen Vektoren über $K = \mathbb{C}$ linear abhängig.
β) Über $K = \mathbb{R}$ sind reelle Koeffizienten α, β, γ gesucht mit

$$(*) \qquad \alpha(\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1) + \beta(1, \mathrm{i}, \mathrm{i}) + \gamma(i-1, \mathrm{i}, \mathrm{i}-1) = (0, 0, 0)\,.$$

Komponentenweise gelesen ist dies ein homogenes lineares Gleichungssystem, bei dem die Differenz 2. Gleichung − 3. Gleichung auf $-\mathrm{i}\alpha + \gamma = 0$ führt. Diese Gleichung kann bei reellem α und γ nur für $\alpha = \gamma = 0$ gelten. Aus der 1. Gleichung folgt dann noch $\beta = 0$. (*) ist also nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ erfüllt, d. h. die Vektoren sind über $K = \mathbb{R}$ linear unabhängig.

d) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig, wenn aus $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$ (Nullfunktion) folgt: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Diese Gleichung über **Funktionen** besagt, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten muß :

$$(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(t) = 0(t) = 0\,.$$

Wir spezialisieren z. B. der Reihe nach auf $t = -4$, $t = 0$ und $t = -5$ und erhalten das Gleichungssystem

$$8\gamma = 0 \qquad 4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 0 \qquad -\alpha + \beta + 9\gamma = 0.$$

Man erkennt sofort, daß dieses Gleichungssystem nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$ besitzt.
Damit ist gezeigt, daß die Funktionen f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (2, 3 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $S \subset V$ jeweils eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Span} S$. Ergänzen Sie die von Ihnen angegebene Basis von $\operatorname{Span} S$ zu einer Basis von V.

a) $S = \{(6,2,0,3), (0,1,-1,0), (6,0,2,3), (-2,3,1,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$

b) $S = \{x^2 + x^4, 1 + x + x^5, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\}$,
V ist der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 5.

Lösung:

a) Beh. $(6,2,0,3)$, $(0,1,-1,0)$, $(-2,3,1,-1)$ sind linear unabhängig.
Sei $\alpha(6,2,0,3) + \beta(0,1,-1,0) + \gamma(-2,3,1,-1) = (0,0,0,0)$. Diese Gleichung ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6\alpha & & & - & 2\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ 3\alpha & & & - & \gamma & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 3\beta & - & 11\gamma & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{r} 2\alpha{+}\beta{+}\ 3\gamma{=}0 \\ -\beta{+}\ \ \gamma{=}0 \\ -14\gamma{=}0 \end{array},$$

und das letzte System hat nur die Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Es folgt $\dim \operatorname{Span} S \geq 3$.
Wegen $(6,0,2,3) = (6,2,0,3) - (2(0,1,-1,0)$ folgt $\dim \operatorname{Span} S \leq 3$, insgesamt also $\dim \operatorname{Span} S = 3$ und $\{(6,2,0,3), (0,1,-1,0), (-2,3,1,-1)\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Span} S$. Diese läßt sich z.B. durch $(0,0,0,1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen, denn

$$(0,0,0,1), (6,2,0,3), (0,1,-1,0), (-2,3,1,-1)$$

sind linear unabhängig. Dies folgt sofort aus dem Ansatz

$$\alpha(0,0,0,1) + \beta(6,2,0,3) + \gamma(0,1,-1,0) + \delta(-2,3,1,-1) = (0,0,0,0).$$

Das zugehörige Gleichungssystem führt in den ersten drei Gleichungen wie oben auf $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und die letzte Gleichung liefert dann noch $\delta = 0$.

b) Es sei $U :=\operatorname{Span} S$. Es gilt $x - x^3 - x^4 + 2x^5 = (1 + x + x^5) - (x^2 + x^4) - (1 - x^2 + x^3 - x^5)$, also ist $\dim U \leq 3$.
Wir zeigen nun: $\{1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5\}$ ist linear unabhängig.
Sei also

$$\alpha(1 + x + x^5) + \beta(x^2 + x^4) + \gamma(1 - x^2 + x^3 - x^5) = 0 \quad \text{(das Nullpolynom)} .$$

Ein Koeffizientenvergleich bei x liefert $\alpha = 0$, bei x^3 liefert er $\gamma = 0$ und bei x^4 folgt $\beta = 0$. Also ist die angegebene Menge linear unabhängig.
Damit folgt $\dim U = 3$, und $\{x^2 + x^4, 1 + x + x^5, 1 - x^2 + x^3 - x^5\}$ ist eine Basis von U. Diese Basis läßt sich durch $1, x, x^2$ zu einer Basis von V ergänzen. Dazu zeigen wir die lineare Unabhängigkeit der 6 Polynome. Sei

$$a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4(x^2 + x^4) + a_5(1 + x + x^5) + a_6(1 - x^2 + x^3 - x^5) = 0 .$$

Umsortieren liefert

$$(a_1 + a_5 + a_6) \cdot 1 + (a_2 + a_5)x + (a_3 + a_4 - a_6)x^2 + a_6 x^3 + a_4 x^4 + (a_5 - a_6)x^5 = 0 .$$

Rechts steht das Nullpolynom. Wir machen einen Koeffizientenvergleich, der bei x^3 und x^4 sofort $a_4 = a_6 = 0$ liefert. Koeffizientenvergleich bei x^5 ergibt dann $a_5 = 0$, bei x^2 liefert er $a_3 = 0$, bei x folgt $a_2 = 0$ und schließlich bei der Konstanten $a_1 = 0$.
Da der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 5 die Dimension 6 hat, haben wir eine Basis von V gefunden, die die drei Elemente $x^2 + x^4, 1 + x + x^5$ und $1 - x^2 + x^3 - x^5$ enthält.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 6. Dezember 2001

6. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie:
Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $V = \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist die Menge

$$\{f_c\,;\, f_c(x) = \begin{cases} x-c & \text{falls } x > c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\;, c \in \mathbb{R}\}$$

linear unabhängig.

Lösung:
Zu zeigen ist: Jede endliche Teilmenge T von

$$A := \{f_c\,;\, f_c(x) = \begin{cases} x-c & \text{falls } x > c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\;, c \in \mathbb{R}\}$$

ist linear unabhängig.
Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente von T.
Für $|T| = 1$ sei $T = \{f_c\}$ und $\gamma \cdot f_c = 0$ (die Nullfunktion). Für ein $x > c$ gilt dann $f_c(x) \neq 0$ und aus $\gamma \cdot f_c(x) = 0$ folgt daher $\gamma = 0$.
Sei nun jede Teilmenge $T \subset A$ mit $|T| = n$ linear unabhängig. Wir betrachten $n+1$ paarweise verschiedene Funktionen $f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_{n+1}}$ aus A und nehmen o.B.d.A. an, daß $a_{n+1} < a_n < \ldots < a_1$ gilt (sonst kann man die Funktionen umbenennen). Wählt man ein β mit $a_{n+1} < \beta < a_n$, so ist $f_{a_j}(\beta) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Aus dem Ansatz $\alpha_1 f_{a_1} + \ldots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0$ folgt daher

$$(\alpha_1 f_{a_1} + \ldots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}})(\beta) = \alpha_1 f_{a_1}(\beta) + \ldots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}}(\beta) = \alpha_{n+1}(\beta - a_{n+1}) = 0 \,.$$

Da $\beta \neq a_{n+1}$ ist, folgt $\alpha_{n+1} = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann aber weiter $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Damit ist $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_{n+1}}\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 2 (je 2 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils, ob es Homomorphismen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Wenn ja, wie viele?

a) $n = 4$, $m = 3$, $f(v_i) = w_i$ für die folgenden Vektoren:
$v_1 = (1,2,1,1)$, $v_2 = (0,-1,1,-1)$, $v_3 = (3,8,1,5)$
$w_1 = (1,2,3)$, $w_2 = w_3 = (1,0,1)$.

b) $n = 4$, $m = 3$, $f(v_i) = w_i$ für die folgenden Vektoren:
$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,1,1,0)$, $v_3 = (1,1,0,0)$, $v_4 = (0,1,1,1)$,
$w_i = (2,-1,3)$ für $i = 1, ..., 4$.

c) $n = m = 4$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1,0,0,0),(1,1,0,0)\} = \mathrm{Im}\, f$.

d) $n = 3$, $m = 4$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1,1,0),(1,1,1)\}$, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1,0,0,0),(2,0,1,0)\}$.

Lösung:

a) Es gilt $3 \cdot (1,2,1,1) - 2 \cdot (0,-1,1,-1) = (3,8,1,5)$. Für einen Homomorphismus f mit $f(v_i) = w_i$ muß also gelten:

$$\begin{aligned} w_3 = f(v_3) &= f(3,8,1,5) = f(3 \cdot (1,2,1,1) - 2 \cdot (0,-1,1,-1)) \\ &= 3 \cdot f(1,2,1,1) - 2f(0,-1,1,-1) = 3 \cdot f(v_1) - 2 \cdot f(v_2) \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist wegen $3 \cdot f(v_1) - 2 \cdot f(v_2) = 3w_1 - 2w_2 = (1,6,7)$ verletzt. Es gibt keinen Homomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften.

b) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig; sie bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Nach Satz 4.16 ist durch Angabe der Bilder einer Basis eindeutig ein Homomorphismus definiert. Also gibt es genau einen Homomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften.

c) Es gibt unendlich viele Homomorphismen mit den angegebenen Eigenschaften:
$v_1 := (1,0,0,0)$, $v_2 := (1,1,0,0)$ sind linear unabhängig. Ergänzt man sie durch v_3, v_4 zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, so ist durch f mit $f(v_1) = f(v_2) = 0$, $f(v_3), f(v_4) \in \operatorname{Im} f$ und $f(v_3), f(v_4)$ linear unabhängig, eindeutig ein Homomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften definiert. Für die Wahl von v_3 und v_4 gibt es aber beliebig viele Möglichkeiten.

d) Für einen Homomorphismus $f : V \longrightarrow V'$ gilt nach Satz 4.20:

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V.$$

Hier gilt: $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2$.
Also kann kein Homomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften existieren.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Es seien V und W K-Vektorräume, B sei eine Basis von V und $f : V \longrightarrow W$ sei ein Epimorphismus. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Ist $\dim V = \dim W$, so ist $f(B)$ eine Basis von W.

b) Ist $\dim V = \dim W < \infty$, so ist $f(B)$ eine Basis von W.

Lösung:

a) a) ist falsch.
Wir wählen $V = W = \mathbb{R}[x]$, $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ und für f die Ableitung. Dann ist f ein Epimorphismus, da jedes Element aus $\mathbb{R}[x]$ als Bild unter f (als eine Ableitung) auftritt und f linear ist (siehe auch Vorlesung).
Aber $f(B) = \{0, 1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots\}$ ist linear abhängig, da $f(B)$ den Nullvektor enthält.

b) b) ist richtig.
Ist $\dim V = \dim W = n$, so ist $f(B)$ nach Vorlesung ein Erzeugendensystem von W mit n Elementen, also eine Basis von W.

Aufgabe 4 (3, 4 Punkte)

a) Der Homomorphismus $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_4 + x_5, 0, 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} f$ und von $\operatorname{Im} f$.

b) Es sei $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\varphi : V \longrightarrow V$ sei definiert wie folgt: $\varphi(f)$ ist diejenige Abbildung aus V mit $(\varphi(f))(n) = f(2n)$.
Zeigen Sie, dass φ ein Endomorphismus von V ist, und bestimmen Sie $\operatorname{Ker} \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$.

Lösung:
a)

$$
\begin{array}{lcl}
(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in \operatorname{Ker} f & \Longleftrightarrow & (2x_1-x_2+x_3-x_4, x_4+x_5, 0, 2x_1-x_2+x_3+x_5)=(0,0,0,0) \\
& \Longleftrightarrow & \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Die dritte Gleichung ist die Summe der ersten beiden Gleichungen. Man erkennt, daß drei Variablen als freie Parameter wählbar sind.
Mit $x_5=2, x_2=x_3=0$ erhält man: $(-1,0,0,-2,2)\in \operatorname{Ker} f$.
Mit $x_5=x_3=0, x_2=2$ erhält man: $(1,2,0,0,0)\in \operatorname{Ker} f$.
Mit $x_5=x_2=0, x_3=2$ erhält man: $(-1,0,2,0,0)\in \operatorname{Ker} f$.
$\{(-1,0,0,-2,2),(1,2,0,0,0),(-1,0,2,0,0)\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Ker} f$.
Nach dem Kern-Bild-Satz folgt $\dim \operatorname{Im} f=2$. Wegen $f(e_1)=(2,0,0,2)$ und $f(e_5)=(0,1,0,1)$, und da $(2,0,0,2),(0,1,0,1)$ linear unabhängig sind, ist $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1)\}$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$.
b) Wir zeigen die Homomorphiebedingungen (H1) und (H2). $\varphi(f+g)$ ist diejenige Funktion mit

$$(\varphi(f+g))(n)=(f+g)(2n)=f(2n)+g(2n)=(\varphi(f))(n)+(\varphi(g))(n)=(\varphi(f)+\varphi(g))(n)\ .$$

Es folgt $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$ und das ist die Homomorphiebedingung (H1). Entsprechend zeigt man (H2):

$$(\varphi(\lambda f))(n)=(\lambda f)(2n)=\lambda f(2n)=\lambda((\varphi(f))(n))=(\lambda\varphi(f))(n)\ ,$$

also gilt $\varphi(\lambda f)=\lambda\varphi(f)$.
Es ist $\operatorname{Ker}\varphi=\{f\in V\,;\ f(2n)=0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N}\}$, denn nur für solche Abbildungen $f\in V$ ist $\varphi(f)$ die Nullabbildung.
Es ist $\operatorname{Im}\varphi=V$, denn für $f\in V$ ergibt die Abbildung $g\in V$ mit
$g(n)=\begin{cases} 0 & \text{falls } n=2k+1 \\ f(k) & \text{falls } n=2k \end{cases}$ gerade $\varphi(g)=f$.
In anderen Worten: V ist der Vektorraum der reellen Folgen. Eine Folge $(a_1,0,a_3,0,\ldots)$ wird durch φ auf die Nullfolge abgebildet,
die Folge $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ ist das Bild der Folge $(0,a_1,0,a_2,0,a_3,\ldots)$ unter φ.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 13. Dezember 2001

7. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien Untervektorräume U_1, U_2, U_3 definiert durch

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & \text{Span}\,\{(0,2,1),(1,2,-1),(2,-2,-5)\} \\ U_2 & = & \text{Span}\,\{(1,3,-1),(1,5,1),(1,4,0),(0,1,1)\} \\ U_3 & = & \text{Span}\,\{(0,1,1)\}. \end{array}$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.
Ist U_i $(i = 2,3)$ ein Komplement von U_1 in $\mathbb{R}^3$?

Lösung:
Bei U_1 erkennt man $2(1,2,-1)-3(0,2,1) = (2,-2,-5)$. Da $(1,2,-1),(0,2,1)$ linear unabhängig sind, folgt $\dim U_1 = 2$ und die angegebenen beiden Vektoren bilden eine Basis von U_1.
Bei U_2 erkennt man ebenfalls leicht $(1,3,-1) = (1,4,0) - (0,1,1)$ und $(1,5,1) = (1,4,0) + (0,1,1)$. Wie eben folgt $\dim U_2 = 2$ und $\{(1,4,0),(0,1,1)\}$ ist eine Basis von U_2.
Für Vektoren $x \in U_1 \cap U_2$ muß es $\alpha.\beta,\gamma,\delta$ geben mit

$$x = \alpha(1,2,-1) + \beta(0,2,1) = \gamma(1,4,0) + \delta(0,1,1)\ .$$

Das sich daraus ergebende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha & & & - & \gamma & & & = & 0 \\ 2\alpha & + & 2\beta & - & 4\gamma & - & \delta & = & 0 \\ -\alpha & + & \beta & & & - & \delta & = & 0 \end{array}$$

führt man wie üblich auf das Dreieckssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha & & & - & \gamma & & & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & - & \delta & = & 0 \\ & & & & & & \delta & = & 0 \end{array}\ .$$

Setzt man $\gamma = t$, so folgt $\beta = t = \alpha$. Man erhält $x = t(1,4,0)$, also

$$U_1 \cap U_2 = \text{ Span}\,\{(1,4,0)\}\ .$$

Zur Bestimmung von $U_1 + U_2$ benutzt man

$$U_1 + U_2 = \text{ Span}\,\{(0,2,1),(1,2,-1),(1,4,0),(0,1,1)\}\ ,$$

und da $(1,4,0),(0,1,1),(0,2,1)$ linear unabhängig sind, folgt $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.
Aus Dimensionsgründen ist $\mathbb{R}^3 \neq U_1 \oplus U_2$, also ist U_2 kein Komplement von U_1 in $\mathbb{R}^3$.
Wegen $(0,1,1) \notin U_1$ ist $U_1 \cap U_3 = \{0\}$, also gilt $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_3$, und damit ist U_3 ein Komplement von U_1 in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $U = \{A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, m, K)\,;\, \sum_{i,j} a_{ij} = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\text{Mat}(n, m, K)$ ist und bestimmen Sie die Dimension sowie eine Basis von U.

Lösung:
Wir definieren $f : \text{Mat}(n, m, K) \longrightarrow K$ durch $f(A) = \sum_{i,j} a_{ij}$, falls $A = (a_{ij})$. f ist ein Homomorphismus, wie man sofort nachrechnet und $U = \text{Ker}\, f$. Also ist U ein Untervektorraum vom $\text{Mat}(n, m, K)$. Wegen $\dim \text{Im}\, f = 1$ und $\dim\ \text{Mat}(n, m, K) = nm$ folgt nach dem Kern-Bild-Satz $\dim \text{Ker}\, f = \dim U = nm - 1$.
Wir definieren für $r \in \{1, \dots, n\}$, $s \in \{1, \dots, m\}$ und $(r, s) \neq (1, 1)$ die Matrix $A_{rs} = (a_{ij}^{rs}) \in \text{Mat}(n, m, K)$ durch $a_{11}^{rs} = 1$, $a_{rs}^{rs} = -1$ und $a_{ij}^{rs} = 0$ sonst. Diese $nm - 1$ Matrizen sind aus U und sie sind linear unabhängig; also liefern sie eine Basis von U.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Rang, sowie eine Basis des Zeilenraumes und eine Basis des Spaltenraumes für die folgenden Matrizen:

a) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 1 \\ i & 1 & 1-i & -2i \\ 2 & 1 & -1-i & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ als Matrix über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{F}_2$.

Lösung:
a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{EZ3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{EZ3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{EZ3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt: $\text{Rang}\, A = 4$. Die ersten vier Zeilen der letzten Matrix sind linear unabhängig, bilden also eine Basis des Zeilenraums, da Zeilenumformungen den Zeilenraum nicht ändern.
Bezeichnet man die Spalten von A mit $s_1, \dots, s_6$, so gilt $s_2 = -s_1$ und $s_6 = -s_5$. Also ist $\text{Span}\{s_1, \dots, s_6\} = \text{Span}\,\{s_1, s_3, s_4, s_5\}$ und da der Spaltenraum auch die Dimension 4 hat, ist $\{s_1, s_3, s_4, s_5\}$ eine Basis des Spaltenraums von A.
b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 1 \\ i & 1 & 1-i & -2i \\ 2 & 1 & -1-i & -1 \end{pmatrix} \overset{EZ3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 2-i & 1-i & -3i \\ 0 & -1-2i & -1-i & -3 \end{pmatrix} \overset{EZ3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 2-i & 1-i & -3i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rang}\, A = 2$. $\{(1, 1+i, 0, 1), (0, 2-i, 1-i, -3i)\}$ ist eine Basis des Zeilenraums, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist Basis des Spaltenraums, da diese Spalten linear unabhängig sind.

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{EZ3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Rang} A = 3$; die drei Zeilen von A bilden eine Basis des Zeilenraums, die ersten drei Spalten von A bilden eine Basis des Spaltenraums von A.
Für $K = \mathbb{F}_2$ gilt $-1 = 1$. Es ist dann $\operatorname{Rang} A = 2$; die ersten beiden Zeilen von A bilden eine Basis des Zeilenraums von A, die ersten beiden Spalten von A bilden eine Basis des Spaltenraums von A.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}(m, n; K)$ habe die Gestalt $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, wobei A, B und 0 passende Matrizen sind.
Zeigen Sie: $\operatorname{Rang} M = \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.

Lösung:
Durch elementare Zeilen– und Spaltenumformungen bringe man A auf die Gestalt $A' := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\operatorname{Rang} A = r$. Führt man die gleichen elementaren Zeilen– und Spaltenumformungen in M durch, so entsteht die Matrix $M' := \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, da die Umformungen die oben rechts und unten links stehende Nullmatrix nicht verändern. Nun bringt man entsprechend B auf die Gestalt $B' := \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist also $\operatorname{Rang} B = s$. Führt man wiederum die entsprechenden Zeilen– und Spaltenumformungen an M' durch, so erhält man die Matrix $M'' := \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$, da wiederum die Nullmatrizen nicht verändert werden. Es folgt direkt:

$$\operatorname{Rang} M = r + s = \operatorname{Rang} A \ + \ \operatorname{Rang} B \ .$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 20. Dezember 2001

8. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, K)$. Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a(1-a)+(1-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Behauptung: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Induktionsschluss:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 1-a^{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (1, 2, 3 Punkte)

Ein Homomorphismus $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$f({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)) = {}^t(x_1 - x_3 - 2x_4, ax_1 + x_3 + (1-a)x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4) .$$

a) Bestimmen Sie diejenige Matrix A mit $f = h_A$.
b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f surjektiv, für welche a injektiv?
c) Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von a - $\mathrm{Ker}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$.

Lösung

a) Wegen $f(x) = h_A(x) = Ax$ gilt $f(e_i) = Ae_i$. Ae_i ist aber die $i-$te Spalte von A. Die Bilder der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vom $\mathbb{R}^4$ müssen also die Spalten von A sein. Man erhält

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ a & 0 & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

b) Wegen $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im}\, f = 4$ und $\dim \mathrm{Im}\, f \leq 3$ ist $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, also kann f nie injektiv sein. f ist genau dann surjektiv, wenn $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Rang}\, A = 3$. Mittels elementarer Zeilenumformungen folgt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ a & 0 & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{pmatrix} .$$

Für $a \neq -1$ ist $\mathrm{Rang}\, A = 3$, also ist f surjektiv genau dann, wenn $a \neq -1$.

c) Wir können die Rechnung unter b) benutzen. Für $a \neq -1$ ist $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ und $\mathrm{Ker}\, f$ ergibt sich als Lösungsraum von $Ax = 0$ aus der letzten Matrix unter b) zu $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\,\{{}^t(1, 0, -1, 1)\}$.

Für $a = -1$ ist $\dim \operatorname{Im} f = 2$ und die ersten beiden Spalten von A bilden z.B. eine Basis von $\operatorname{Im} f$, also $\operatorname{Im} f = \{{}^t(1,-1,2), {}^t(0,0,1)\}$. $\operatorname{Ker} f$ ergibt sich wieder aus der letzten Matrix unter b), und zwar zu $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\{{}^t(2,-3,0,1), {}^t(1,-3,1,0)\}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Die Unterräume $U = \{(x,y,z)\,;\, 2x-y-z = 0\}$ und $W = \operatorname{Span}\{(-2,1,1)\}$ erfüllen $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ (kein Beweis nötig!). Für $i = 1,2$ sei $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f_i(v) = v_i$, wobei $v = v_1 + v_2$ die eindeutige Darstellung von v mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in W$ ist.
Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 Homomorphismen sind, und bestimmen Sie die eindeutig bestimmten Matrizen A_1, A_2 mit $f_i = h_{A_i}$ $(i = 1,2)$.
Berechnen Sie A_1A_2 und interpretieren Sie das Ergebnis im $\mathbb{R}^3$.

Lösung

Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ und $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$ die eindeutigen Darstellungen von v, w mit $v_1, w_1 \in U$ und $v_2, w_2 \in W$. Dann ist $v + w = v_1 + w_1 + v_2 + w_2 =: z_1 + z_2$ mit $z_1 \in U$ und $z_2 \in W$, da U und W UVRe sind. Also folgt $f_i(v+w) = f_i(v_1 + w_1 + v_2 + w_2) = f_i(z_1 + z_2) = z_i = f_i(v) + f_i(w)$ für $i = 1,2$.
Entsprechend gilt $f_i(\alpha v) = f_i(\alpha(v_1 + v_2)) = f_i(\alpha v_1 + \alpha v_2)$. Dabei ist $\alpha v_1 \in U$ und $\alpha v_2 \in W$, da U und W UVRe sind. Also gilt weiter $f_i(\alpha v_1 + \alpha v_2) = \alpha v_i = \alpha f_i(v)$ für $i = 1,2$.
Damit ist nachgewiesen, dass f_1 und f_2 Homomorphismen sind.
Es ist $B = \{(1,2,0), (0,-1,1)\}$ eine Basis von U und $B' = \{(-2,1,1)\}$ eine Basis von W. Die Vektoren e_1, e_2, e_3 der Standard-Basis des $\mathbb{R}^3$ stellen wir durch diese Vektoren dar:

$$\begin{aligned}
e_1 = (1,0,0) &= -\tfrac{1}{3}(-2,1,1) + \tfrac{1}{3}(1,2,0) + \tfrac{1}{3}(0,-1,1) \\
e_2 = (0,1,0) &= \tfrac{1}{6}(-2,1,1) + \tfrac{1}{3}(1,2,0) - \tfrac{1}{6}(0,-1,1) \\
e_3 = (0,0,1) &= \tfrac{1}{6}(-2,1,1) + \tfrac{1}{3}(1,2,0) + \tfrac{5}{6}(0,-1,1)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
f_1(1,0,0) &= \tfrac{1}{3}(1,2,0) + \tfrac{1}{3}(0,-1,1) = \tfrac{1}{3}(1,1,1) \\
f_1(0,1,0) &= \tfrac{1}{3}(1,2,0) - \tfrac{1}{6}(0,-1,1) = \tfrac{1}{6}(2,5,-1) \\
f_1(0,0,1) &= \tfrac{1}{3}(1,2,0) + \tfrac{5}{6}(0,-1,1) = \tfrac{1}{6}(2,-1,5) \\
f_2(1,0,0) &= -\tfrac{1}{3}(-2,1,1) = \tfrac{1}{6}(4,-2,-2) \\
f_2(0,1,0) &= \tfrac{1}{6}(-2,1,1) \\
f_2(1,0,0) &= \tfrac{1}{6}(-2,1,1)
\end{aligned}$$

Die Spalten von A_i sind die Bilder von e_1, e_2, e_3 unter f_i, also gilt

$$A_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $A_1A_2 = 0$ (die Nullmatrix). Dies ist nicht verwunderlich, denn:
U ist eine Ebene durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$, W die darauf senkrecht stehende Gerade durch den Ursprung. f_2 ist die orthogonale Projektion auf W, f_1 die orthogonale Projektion auf U. Projiziert man zunächst auf W, dann auf U, wird der ganze $\mathbb{R}^3$ auf den Ursprung abgebildet und das gibt die Gleichung $A_1A_2 = 0$ wieder.

Aufgabe 4 (2, 3, 3 Punkte)
Eine quadratische Matrix A über K heißt nilpotent, wenn es ein $1 \le r \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^r = 0$.
Es seien $A, B \in K^{(n,n)}$. Zeigen Sie:

a) Sind A, B symmetrisch, so gilt: $A \cdot B = B \cdot A \iff A \cdot B$ symmetrisch
Geben Sie symmetrische Matrizen A, B an, so dass AB nicht symmetrisch ist.

b) Sind A, B nilpotent und ist $A \cdot B = B \cdot A$, so sind $A \cdot B$ und $A + B$ nilpotent.
Kann hier auf die Voraussetzung $A \cdot B = B \cdot A$ verzichtet werden?

c) Ist A invertierbar, B nilpotent und $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $A + B$ invertierbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Hilfssatz: Ist C nilpotent, so ist $C + E$ invertierbar.

Lösung

a)

"$\Longrightarrow$" $\quad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA = B \cdot A = A \cdot B$

"$\Longleftarrow$" $\quad A \cdot B = {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA = B \cdot A$

Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind symmetrisch, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht symmetrisch.

b) Da A, B nilpotent sind, gibt es $r, k \in \mathbb{N}$ mit $r, k \ge 1$ und $A^r = B^k = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^r = \underbrace{(A \cdot B) \cdot (A \cdot B) \cdot \ldots \cdot (A \cdot B)}_{r\text{-mal}} &= A^r \cdot B^r \quad \text{da } A \cdot B = B \cdot A \\ &= 0 \quad \text{da } A^r = 0\end{aligned}$$

Also ist $A \cdot B$ nilpotent.

Bemerkung für Teil c) dieser Aufgabe:
Der Beweis zeigt übrigens, dass hier als Voraussetzung reicht, dass eine der Matrizen A, B nilpotent ist.

$$\begin{aligned}(A + B)^{r+k} &= A^{r+k} + \binom{r+k}{1} A^{r+k-1}B + \ldots + \binom{r+k}{r+k-1} AB^{r+k-1} + B^{r+k} \\ &= \sum_{i=0}^{r+k} \binom{r+k}{i} A^{r+k-i}B^i \quad \text{da } A \cdot B = B \cdot A\end{aligned}$$

Für i mit $0 \le i \le r + k$ ist $i \ge k$ oder $r + k - i \ge r$. Also ist $A^{r+k-i} = 0$ oder $B^i = 0$, d.h. $(A + B)^{r+k} = 0$. $A + B$ ist also nilpotent.
Auf die Voraussetzung kann nicht verzichtet werden. Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = B^2 = 0 \quad , \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

und weiter $(A + B)^2 = E$, also $(A + B)^n \ne 0$ für alle n.

c) Zunächst wird der Hilfssatz bewiesen.
Sei etwa $C^k = 0$. Dann gilt (geometrische Reihe!)

$$(E + C)(E - C + C^2 \mp \ldots + (-1)^{k-1}C^{k-1}) = E + (-1)^{k-1}C^k = E \, .$$

damit ist $C + E$ invertierbar.
Nun wird wie folgt geschlossen:
Wegen $AB = BA$ gilt auch $A^{-1}B = BA^{-1}$. Da B nilpotent ist, folgt nach der Bemerkung in b), dass $A^{-1}B$ nilpotent ist. Nach dem Hilfssatz ist damit $E + A^{-1}B$ invertierbar, und da A invertierbar ist, dann auch $A(E + A^{-1}B) = A + B$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 10. Januar 2002

9. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind über $\mathbb{R}$, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Wir beginnen stets mit der gegebenen Matrix A und danebenstehend der Einheitsmatrix E. Durch elementare Zeilenumformungen versuchen wir, die gegebene Matrix zur Einheitsmatrix umzuformen. Dabei entsteht aus der Matrix E die gesuchte inverse Matrix A^{-1}. Läßt sich nicht die Einheitsmatrix erzeugen, hat die gegebene Matrix nicht vollen Rang, ist also nicht invertierbar.

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-4 & -9 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -8 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 19 & 5 & 7 \\
0 & 1 & 0 & -8 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
\multicolumn{6}{r}{= A^{-1}}
\end{array}$$

Führt man dieses Verfahren bei der zweiten Matrix durch, erhält man

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 .$$

($3 \cdot 4.$ Zeile + 3. Zeile = 1. Zeile) Diese Matrix ist nicht invertierbar.

Bei der dritten Matrix überlegt man sich zunächst, dass für $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen B, C gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, falls B und C invertierbar sind. Dies folgt sofort durch Kästchenmultiplikation bei der Produktbildung AA^{-1}. Nun ist $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ haben wir (fast) als erste Matrix invertiert. Die dritte Zeile von C ist nur die negative dritte Zeile der schon invertierten Matrix $C^\star$. Hier folgt durch Produktbildung sofort, dass C^{-1} gerade diejenige Matrix sein muß, die man aus $(C^\star)^{-1}$ durch Übergang zur negativen dritten **Spalte** bekommt, also $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & -7 \\ -8 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ äquivalent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls invertierbare Matrizen P, Q mit $PAQ = B$.

Lösung

Wir werden A und B durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf Normalform bringen und sehen, daß beide Matrizen die Normalform $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben. Bei dem üblichen Verfahren erzeugen wir invertierbare Matrizen R, S sowie T, U mit $RAS = TBU = N$. Es folgt dann $B = T^{-1}RASU^{-1}$, und damit liefern $P = T^{-1}R$ und $Q = SU^{-1}$ Matrizen der gesuchten Art.

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & \multicolumn{4}{c}{R}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & \multicolumn{3}{c}{S}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 7 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 1 \\
\hline
 & & & \multicolumn{4}{c}{T}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & \multicolumn{3}{c}{U}
\end{array}
$$

Nun berechnet man

$$
T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}
$$

und

$$
U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Weiter erhält man nun gesuchte Matrizen

$$P = T^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{9}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = SU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_3 & = & 3 \\ x_2 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_5 & = & -1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & + & 2x_5 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Lösung

Wir bringen auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Nicht an den Stufenrändern stehen die Variablen x_4 und x_5. Dafür werden also Parameter λ_1 und λ_2 gesetzt. Die Auflösung der Gleichungssystems durch Rückwärtssubstitution liefert dann noch $x_3 = 4 + \lambda_2$, $x_2 = 1 + x_5 = 1 + \lambda_2$ und $x_1 = 3 - x_3 = -1 - \lambda_2$. Die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir schreiben Gleichung 1 als dritte Gleichung und beginnen mit der Umformung auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Man setzt $x_4 = \lambda_1$ als Parameter und erhält von unten nach oben $x_5 = -1$, $x_3 = -1 - x_5 + 3x_4 - x_3 = -1 + 2\lambda_1$ und $x_1 = 3 - x_4 + x_2 = 2 + \lambda_1$, d.h. die Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & a_3x_3 & = & b_1 \\ & - & a_3x_2 & + & a_2x_3 & = & b_2 \\ a_3x_1 & & & - & a_1x_3 & = & b_3 \\ -a_2x_1 & + & a_1x_2 & & & = & b_4 \end{array}$$
sei lösbar im $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, daß es dann nur folgende zwei Möglichkeiten gibt:

(i) Jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist Lösung.

(ii) Es gibt genau eine Lösung.

Lösung

Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems lautet

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} =: A\ .$$

1. Fall: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Dann muß $b := {}^t(b_1, b_2, b_3, b_4) = 0$ sein, da nach Voraussetzung das Gleichungssystem lösbar sein soll. Es folgt $L = \mathbb{R}^3$.

2. Fall: $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$ oder $a_3 \neq 0$

Sei $a_1 \neq 0$. Wir betrachten zunächst nur die Gleichungen 1, 3 und 4 und bringen auf Zeilenstufenform. Man erhält:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ 0 & -\frac{a_2a_3}{a_1} & -a_1 - \frac{a_3^2}{a_1} & * \\ 0 & a_1 + \frac{a_2^2}{a_1} & \frac{a_2a_3}{a_1} & * \end{array}\right)$$

Es ist $\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{a_1} \neq 0$, da $a_1 \neq 0$. Damit rechnet man weiter (vertausche zunächst die Zeilen drei und vier):

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ 0 & \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1} & \frac{a_2a_3}{a_1} & * \\ 0 & 0 & C & * \end{array}\right)$$

mit

$$C = -a_1 - \frac{a_3^2}{a_1} + \frac{a_2^2a_3^2}{a_1(a_1^2+a_2^2)} = -\frac{1}{a_1}(a_1^2 + a_3^2 - \frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}) =$$
$$= -\frac{1}{a_1}(\frac{a_1^2(a_1^2+a_2^2) + a_3^2(a_1^2+a_2^2) - a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}) = -a_1 \cdot \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\ .$$

Also ist wegen $a_1 \neq 0$ auch $C \neq 0$. Das Gleichungssystem ist damit auf Dreiecksform gebracht, d. h. es existiert eine eindeutige Lösung.

Da das gegebene Gleichungssystem nach Voraussetzung lösbar sein soll, muß dann beim Rechnen mit dem Gesamtsystem die vierte Zeile der Matrix $(A|b)$ in die Nullzeile übergegangen sein.

Die Fälle $a_2 \neq 0$ und $a_3 \neq 0$ behandelt man entsprechend.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = k$. Zeigen Sie: $|GL(n,K)| = k^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n}(k^i - 1)$

Lösung

Nach Satz 5.15 der Vorlesung ist $A \in GL(n,K)$ genau dann, wenn die Spalten (oder Zeilen) von A eine Basis des K^n bilden. Also ist $|GL(n,K)| =$ der Anzahl der geordneten Basen vom K^n. Beachte zunächst $|K^n| = k^n$.

Es sei $b\,(i)$:=Anzahl der i-Tupel von Vektoren aus K^n, bei denen die Vektoren linear unabhängig sind.

Für $b\,(i)$ werden wir nun die folgende Rekursionsformel beweisen:

$$b\,(i+1) = b\,(i)\,(k^n - k^i) \qquad (i \geq 1)$$

$b(n)$ ist dann gerade $|GL(n,K)|$. Aus der Definition von $b\,(i)$

$$\begin{aligned} b\,(i) = |\ \{(a_1,\ldots,a_i) \quad ; \quad & \{a_1,\ldots,a_i\} \subseteq K^n \\ & \text{und } a_1,\ldots,a_i \text{ linear unabhängig } \}\ | \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} b\,(i+1) = |\ \{(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1})\ ;\ & \{a_1,\ldots,a_i\} \subseteq K^n \text{ und } a_{i+1} \in K^n \setminus \mathrm{Span}\,(a_1,\ldots,a_i) \\ & \text{und } a_1,\ldots,a_i \text{ linear unabhängig } \}\ | \end{aligned}$$

Aus $|K^n| = k^n$ und $\dim \mathrm{Span}\,(a_1,\ldots,a_i) = i$ folgt:

$$|\ K^n \setminus \mathrm{Span}\,(a_1,\ldots,a_i)\ | = k^n - k^i$$

Damit erhält man die angegebene Rekursionsformel. Wegen $b\,(1) = k^n - 1$ (beachte, dass nur der Nullvektor als einzelner Vektor linear abhängig ist), folgt nun durch Induktion nach i sofort:

$$b\,(i) = \prod_{j=0}^{i-1}(k^n - k^j) \qquad \text{speziell} \qquad b\,(n) = \prod_{j=0}^{n-1}(k^n - k^j).$$

Klammert man aus den Faktoren jeweils k^j aus, so folgt

$$|GL(n,K)| = b\,(n) = \prod_{j=0}^{n-1} k^j \cdot \prod_{j=0}^{n-1}(k^{n-j} - 1) = \prod_{j=0}^{n-1} k^j \cdot \prod_{i=1}^{n}(k^i - 1)\ .$$

und wegen $\sum_{j=0}^{n-1} j = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{2}$ ergibt sich die angegebene Formel.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 17. Januar 2002

10. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (2, 3 Punkte)
Zeigen Sie für das Vektorprodukt und Spatprodukt $[a,b,c] := \langle a \times b, c\rangle$ im $\mathbb{R}^3$ die folgenden Regeln:

a) $(a \times b) \times c = \langle a,c\rangle b - \langle b,c\rangle a$

b) $[a,b,c]^2 = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,a\rangle & \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix}$

Lösung
a)

$$\begin{aligned}(a \times b) \times c &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)a_1 \\ (a_1c_1 + a_3c_3)b_2 - (a_1c_1 + b_3c_3)a_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2)a_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In den Komponenten wird jeweils 0 addiert und zwar in der $i-$ten Komponente in der Form $a_ic_ib_i - b_ic_ia_i$ $(i = 1,2,3)$. Verteilt man dies auf die beiden Klammern, so steht in der ersten Klammer jeweils $\langle a,c\rangle$, in der zweiten Klammer jeweils $\langle b,c\rangle$. Aufspaltung liefert dann:

$$(a \times b) \times c = \langle a,c\rangle b - \langle b,c\rangle a$$

b) Es ist $[a,b,c]^2 = \langle a \times b, c\rangle^2$ und

$$\begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,a\rangle & \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix} = \langle a,a\rangle \begin{vmatrix} \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix} - \langle b,a\rangle \begin{vmatrix} \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix} + \langle c,a\rangle \begin{vmatrix} \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle - \langle a,a\rangle\langle b,c\rangle^2 - \langle a,b\rangle^2\langle c,c\rangle + \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\langle b,c\rangle + \langle a,c\rangle\langle a,b\rangle\langle b,c\rangle - \langle a,c\rangle^2\langle b,b\rangle\ ,$$

so dass zu beweisen ist:

$$(*) \qquad \langle a \times b, c\rangle^2 = \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle + 2\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\langle b,c\rangle - \langle a,a\rangle\langle b,c\rangle^2 - \langle b,b\rangle\langle a,c\rangle^2 - \langle c,c\rangle\langle a,b\rangle^2$$

Nach a) folgt

$$\|(a \times b) \times c\|^2 = \|\langle a,c\rangle b - \langle b,c\rangle a\|^2 = \langle b,b\rangle\langle a,c\rangle^2 + \langle a,a\rangle\langle b,c\rangle^2 - 2\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\langle b,c\rangle\ .$$

Nach 7.2 ist $\|(a \times b) \times c\| = \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \sin \measuredangle\,(a \times b, c)$, also

$$\begin{aligned}\|(a \times b) \times c\|^2 &= \|a \times b\|^2 \cdot \|c\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \measuredangle\,(a \times b, c)) \\ &= \|a \times b\|^2 \cdot \|c\|^2 - \langle a \times b, c\rangle^2 \\ &= (\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \measuredangle\,(a,b))^2 \cdot \|c\|^2 - \langle a \times b, c\rangle^2 \\ &= \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \measuredangle\,(a,b)) \cdot \|c\|^2 - \langle a \times b, c\rangle^2 \\ &= \langle a,a\rangle\langle b,b\rangle\langle c,c\rangle - \langle a,b\rangle^2\langle c,c\rangle - \langle a \times b, c\rangle^2\end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden rechten Seiten von $\|(a \times b) \times c\|^2$ und Auflösen nach $\langle a \times b, c\rangle^2$ liefert $(*)$.

Alternative Lösung:
Bezeichnet man die rechts stehende Matrix mit A und setzt

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} .$$

so folgt ${}^tB \cdot B = A$; also

$$\det A = \det({}^tB \cdot B) = \det{}^tB \cdot \det B = (\det B)^2 = [a, b, c]^2 .$$

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)
Es seien $a = (1, \alpha, \alpha)$, $b = (2, -1, 1)$ und $c = (0, 1, 1)$.
a) Für welche α hat der von a, b, c aufgespannte Spat eine Oberfläche von $4(\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$ Flächeneinheiten?
b) Können Sie α so bestimmen, dass Oberfläche und Volumen des Spats in ihren Maßzahlen übereinstimmen?

Lösung
Es ist $a \times b = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha - 1 \\ -1 - 2\alpha \end{pmatrix}$, $a \times c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b \times c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für die Oberfläche F des Spats: $F = 2(\sqrt{(4\alpha^2 + (2\alpha - 1)^2 + (-1 - 2\alpha)^2} + \sqrt{2} + \sqrt{12}) = 2(\sqrt{12\alpha^2 + 2} + \sqrt{2} + \sqrt{12})$. Die Gleichung $2(\sqrt{12\alpha^2 + 2} + \sqrt{2} + \sqrt{12}) = 4(\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$ führt auf $\sqrt{12\alpha^2 + 2} = 5\sqrt{2}$, also auf $\alpha^2 = 4$. Damit erfüllen $\alpha = 2$ und $\alpha = -2$ die geforderte Bedingung (die letzte Wurzelgleichung wird von beiden Werten erfüllt).
Das Volumen V des Spats ist gegeben durch $|\langle a \times b, c \rangle|$. Es folgt $V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-2| = 2.$
Die Gleichung $V = F$, also $2 = 2(\sqrt{12\alpha^2 + 2} + \sqrt{2} + \sqrt{12})$ besitzt keine Lösung, da die Klammer stets > 1 ist. Also gibt es kein α derart, dass Oberfläche und Volumen des Spats in ihren Maßzahlen übereinstimmen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie: $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände von σ und τ sowie $\mathrm{sign}(\sigma)$ und $\mathrm{sign}(\tau)$.
Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen.

Lösung

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 8 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

σ besitzt 13 Fehlstände, τ besitzt 4 Fehlstände. Also gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ und $\mathrm{sign}(\tau) = 1$.

Das Verfahren der Vorlesung liefert bei σ:

$$(1\,3) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

und durch Iterierung

$$(7\,8) \circ (6\,8) \circ (5\,6) \circ (4\,6) \circ (3\,5) \circ (2\,6) \circ (1\,3) \circ \sigma = \mathrm{id}\ ,$$

also $\sigma = (1\,3) \circ (2\,6) \circ (3\,5) \circ (4\,6) \circ (5\,6) \circ (6\,8) \circ (7\,8)$.
Entsprechend folgt $\tau = (1\,3) \circ (2\,3) \circ (5\,6) \circ (7\,8)$.

Aufgabe 4 (1, 3, 5 Punkte)
Zu einer festen Permutation $\sigma \in S_n$ sei f_σ derjenige Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$, der gegeben ist durch $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ferner seien Unterräume U und V des $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$U := \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, $V := \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 = \ldots = x_n\}$.

a) Geben Sie die Matrix A an, für die $f_\sigma = h_A$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma \in S_n$ gilt: $f_\sigma(U) = U$ und $f_\sigma(V) = V$.

c) Bestimmen Sie alle Untervektorräume $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $f_\sigma(W) \subset W$ für alle $\sigma \in S_n$.

Lösung
a) Die Spalten von A sind die Bilder der Basisvektoren der Standardbasis. Also gilt:

$$A = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

b) Nach Definition von f_σ gilt $\dim \mathrm{Im}\, f_\sigma = n$, also ist f_σ ein Isomorphismus. Es gilt daher $\dim f_\sigma(W) = \dim W$ für jeden Unterraum W. Daher reicht es aus, $f_\sigma(U) \subset U$ bzw. $f_\sigma(V) \subset V$ zu zeigen.
Sei also $x \in U$, $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ mit $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

$$\begin{aligned} (y_1, \ldots, y_n) := f_\sigma(x) &= f_\sigma(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f_\sigma(e_1) + \ldots + x_n f_\sigma(e_n) \\ &= x_1 e_{\sigma(1)} + \ldots + x_n e_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

f_σ wirkt also auf x so, dass nur die Komponenten von x gemäß σ permutiert werden. Also gilt

$$y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n = 0\ ,$$

d. h. $f_\sigma(x) \in U$.
Ist $x \in V$, so folgt durch die gleiche Argumentation $y_1 = \ldots = y_n$, also $f_\sigma(x) \in V$.

c)
Satz: $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, U, V sind die einzigen Unterräume W mit $f_\sigma(W) \subset W$ für alle $\sigma \in S_n$.

(Bemerkung: Unterräume W mit $f_\sigma(W) \subset W$ heißen f_σ−invariant.)

Sei W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ mit $W \neq \{0\}$, $W \neq U$, $W \neq V$ und $f_\sigma(W) \subset W$. Wir zeigen, dass dann $W = \mathbb{R}^n$ gilt.
Zunächst gibt es ein $w \in W \setminus (U \cup V)$. Wäre nämlich $W \subset U \cup V$, so wähle man ein $u_1 \in W \setminus U$ und ein $w_2 \in W \setminus V$. Für diese Vektoren gilt dann $u_1 \in V$ und $u_2 \in U$. Betrachte nun $u_1 + u_2$. Es ist $u_1 + u_2 \in W \subset U \cup V$, also $u_1 + u_2 \in U \cup V$. Ist aber $u_1 + u_2 \in U$, so folgt wegen $u_2 \in U$ auch $u_1 \in U$, da U ein Untervektorraum ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu $u_1 \in W \setminus U$. Entsprechend führt $u_1 + u_2 \in V$ zum Widerspruch.
Wegen $w \notin V$ hat w das Aussehen

$$w = (\ldots, a, \ldots, b, \ldots) \quad \text{mit } a \neq b\ .$$

Da $f_\sigma(w) \in W$ für alle $\sigma \in S_n$ ist, erreicht man

$$w_i := (\ldots, \underbrace{a}_{\substack{i \\ \uparrow}}, b, \ldots) \in W \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1\ ,$$

also auch (mit $\tau = (i\; i+1)$)

$$w_i^* := (\ldots, \underbrace{b}_{\substack{i \\ \uparrow}}, a, \ldots) \in W \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \; .$$

Da W ein Untervektorraum ist, folgt

$$w_i - w_i^* = (0, \ldots, 0, \underbrace{a-b}_{i}, b-a, 0, \ldots, 0) \in W \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \; ,$$

und damit auch (da $a - b \neq 0$)

$$u_i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, -1, 0, \ldots, 0) \in W \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \; .$$

Es sind $u_1, \ldots, u_{n-1} \in U$ und diese Vektoren sind linear unabhängig. Sie bilden folglich eine Basis von U. Damit ist $U \subset W$ gezeigt. Wegen $w \in W$ und $w \notin U$ sind dann $w, u_1, \ldots, u_{n-1}$ linear unabhängig, also folgt $W = \mathbb{R}^n$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 24. Januar 2002

11. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Lösungsskizzen

Aufgabe 1 (2, 3 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung

a) Es ist rechentechnisch günstig, zunächst Zeile 3 von A zur Zeile 4 zu addieren, da dann eine 1 entsteht, mit der man sinnvollerweise weitere Umformungen vornimmt. Wir berechnen die Determinante also wie folgt:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 14 \\ -5 & 2 & 4 & -15 \\ -2 & 4 & -1 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird nach der vierten Zeile entwickelt:

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 14 \\ -5 & 4 & -15 \\ -2 & -1 & -23 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 14 \\ 7 & 0 & 41 \\ -5 & 0 & -37 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 7 & 41 \\ -5 & -37 \end{pmatrix} = 7\cdot(-37)-(-5)\cdot 41 = -54$$

b) Wir benutzen den Entwicklungssatz von LAPLACE, addieren zunächst das 2−fache der 2. Zeile zur 4. Zeile und entwickeln dann nach der 2. Spalte:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 11 & 0 & -7 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 11 & -7 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Addition des (−6)−fachen der 1. Spalte zur 3. Spalte; anschließend Entwicklung nach der 4. Zeile; danach Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -11 & 0 \\ 3 & 5 & -20 & 0 \\ 11 & -7 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 5 & -20 & 0 \\ -7 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 5 & -20 \end{vmatrix} = -7(-20+55) = -245$$

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)

a) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,K)$ gegeben durch $A=(a_{ij})$ mit $a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{für } i=j \text{ oder } i=j\pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Berechnen Sie $\det A$.

b) Es sei $A=(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ gegeben durch $a_{ij}=1$ für $j\neq n+1-i$, $a_{i\,n+1-i}=\alpha$, $(i,j\in\{1,\dots,n\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie $\det A$ und bestimmen Sie diejenigen $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\det A=0$.

Lösung

a) Wir bezeichnen die Matrix mit A_n. Es folgt $\det A_1=\det(1)=1$ und $\det A_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Für $n\geq 3$ entwickeln wir zunächst nach der ersten Zeile und die entstehende zweite Determinante dann nach der ersten Spalte. Man erhält:

$$\begin{aligned}\det A_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & \\ & & & \vdots & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det A_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & \\ & & & \vdots & & \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \det A_{n-1} - \det A_{n-2}\end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel liefert mit den beiden Anfangswerten die Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\det A_n$	1	0	-1	-1	0	1	1	0

,

und daraus folgt für $n\geq 7$: $\det A_n=\det A_r$, falls $n=6k+r$ mit $0\leq r<6$ ist.
Speziell für $K=\mathbb{F}_2$ gilt also $\det A_n=0$ für $n=2+3k$ $(k=0,1,2,\dots)$ und $\det A_n=1$ sonst.

b) Die gegebene Matrix sei wieder A_n. Es ist $\det A_1=\alpha$. Für $n\geq 2$ addieren wir zunächst das (-1)-fache der ersten Zeile zu allen anderen Zeilen, anschließend die Spalten 1 bis $n-1$ zur letzten Spalte. Dadurch erhalten wir:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \alpha & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-1 & 1-\alpha \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \alpha-1 & \dots & 0 & 1-\alpha \\ \alpha-1 & 0 & \dots & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha+(n-1) \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \alpha-1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^r(\alpha-1)^{n-1}(\alpha+(n-1))$$

mit

$$r=(n+1)+n+(n-1)+\ldots+3=(n+4)\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-4)=\frac{1}{2}n(n-1)+(2n-4)\,.$$

Die letzte Umformung ergibt sich durch sukzessives Entwickeln nach der letzten Spalte. Außerdem zeigt die letzte Umformung für r, dass gilt:

$$\det A_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\alpha-1)^{n-1}(\alpha+(n-1))$$

Also gilt $\det A_n=0$ genau für $\alpha=1$ und $\alpha=1-n$.

Aufgabe 3 (2, 2, 2, 3 Punkte)

Es seien $A, B \in GL(n, K)$. Zeigen Sie:

a) $\widetilde{A \cdot B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$ **b)** $\widetilde{A^{-1}} = (\widetilde{A})^{-1}$

c) $\det(\widetilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$ **d)** $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det(A))^{n-2} \cdot A$

Lösung

a) Nach Vorlesung ist $\widetilde{AB} \cdot AB = \det(AB) \cdot E$. Da A, B invertierbar sind, ist auch AB invertierbar, also $\widetilde{AB} = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = \det(A) \cdot \det(B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$. Ferner gilt $\tilde{A} = \det(A) \cdot A^{-1}$ und $\tilde{B} = \det(B) \cdot B^{-1}$. Damit folgt

$$\tilde{B} \cdot \tilde{A} = \det(B) \cdot B^{-1} \cdot \det(A) \cdot A^{-1} = \det(A) \cdot \det(B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = \widetilde{AB}\,.$$

b) Es ist $A^{-1} \cdot \widetilde{A^{-1}} = \det(A^{-1}) \cdot E = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot E$, also $\widetilde{A^{-1}} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A$. Da ferner $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E$, folgt weiter $\tilde{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A = \widetilde{A^{-1}}$.

c) Aus $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz und der Linearität der Determinante in jeder Zeile, dass gilt:

$$\det(\tilde{A}) \cdot \det(A) = (\det(A))^n \cdot \det(E) = (\det(A))^n$$

Wegen $A \in GL(n, K)$ ist $\det(A) \neq 0$. Division durch $\det(A)$ ergibt sich angegebene Formel.

d) Wir benutzen die grundlegende Formel $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E$ für die Matrix $\tilde{A}$ und erhalten $\tilde{\tilde{A}} \cdot \tilde{A} = \det(\tilde{A}) \cdot E = (\det(A))^{n-1} \cdot E$ nach c). Wir multiplizieren von rechts A und erhalten weiter

$$(\det(A))^{n-1} \cdot A = (\tilde{\tilde{A}} \cdot \tilde{A}) \cdot A = \tilde{\tilde{A}} \cdot (\tilde{A} \cdot A) = \tilde{\tilde{A}} \cdot \det(A) \cdot E = \det(A) \cdot \tilde{\tilde{A}}\,.$$

Damit folgt

$$0 = (\det(A))^{n-1} \cdot A - \det(A) \cdot \tilde{\tilde{A}} = \det(A)\left((\det(A))^{n-2} \cdot A - \tilde{\tilde{A}}\right).$$

Wegen $\det(A) \neq 0$ ist $(\det(A))^{n-2} \cdot A - \tilde{\tilde{A}} = 0$, also $\tilde{\tilde{A}} = (\det(A))^{n-2} \cdot A$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Ist A diagonalisierbar?

Lösung

Es ist:

$$\begin{aligned} \det(xE - A) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 2 & x-5 & 1 \\ 2 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 2 & x-4 & 1 \\ 2 & x-4 & x-2 \end{vmatrix} = (x-4) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-4) \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also 2, 3 und 4. Zur Berechnung von Eigenvektoren sind homogene lineare Gleichungssysteme zu lösen. Für den Eigenwert 2 lösen wir das System $(2E - A)x = 0$ und bringen dazu die Koeffizientenmatrix $2E - A$ auf Zeilenstufenform:

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $x_3 = t$ erhält man $x_2 = t$ und $x_1 = t$. Der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, Eigenvektoren zum Eigenwert 2 sind also diese Vektoren x mit $x \neq 0$.

Für den Eigenwert 3 lösen wir entsprechend $(3E - A)x = 0$, für den Eigenwert 4 dann $(4E - A)x = 0$:

$$3E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind $x = r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $r \neq 0$ die Eigenvektoren zum Eigenwert 3 und $x = r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ die Eigenvektoren zum Eigenwert 4.

Die Matrix ist diagonalisierbar, da es eine Basis aus Eigenvektoren zu A gibt.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 26. Januar 2002

Klausur zur Linearen Algebra I

Lösungsskizzen

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $v_1 = (2,3,4,5)$, $v_2 = (2,3,1,0)$, $v_3 = (3,5,4,2)$, $v_4 = (1,0,2,2)$ des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

b) Überprüfen Sie, ob die in a) angegebenen Vektoren, interpretiert als Elemente des $\mathbb{F}_2^4$, linear unabhängig sind.

Lösung:

a) Der Ansatz $\alpha_1(2,3,4,5) + \alpha_2(2,3,1,0) + \alpha_3(3,5,4,2) + \alpha_4(1,0,2,2) = (0,0,0,0)$ führt auf ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix A wir auf eine geeignete Zeilenstufenform bringen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 & 1 \\ 0 & 15 & 17 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, also sind die Vektoren linear unabhängig.

b) In $\mathbb{F}_2^4$ lautet $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und man sieht direkt, dass $Ax = 0$ nur trivial lösbar ist, da in A unterhalb der Nebendiagonalen nur Nullen stehen. Also sind die Vektoren auch in $\mathbb{F}_2^4$ linear unabhängig.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ gibt, die $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet und für die $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ gilt. Geben Sie die Matrix A an mit $f = h_A$.

Lösung:

Es ist $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Durch Angabe auf einer Basis ist eine lineare Abbildung eindeutig festgelegt.

Berechnung von A:

Wegen $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$, d.h. $f(e_2)=0$ brauchen wir nur noch die Bilder von e_1 und e_3:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\7\\11\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = 3\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\7\\11\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & -10 & 8\end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. Wenn ja, geben Sie eine Matrix W an, so dass $W^{-1}AW$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

Es ist $\chi_A(x) = (x-3)\cdot\det\begin{pmatrix} x+7 & -5\\ 10 & x-8\end{pmatrix} = (x-3)^2(x+2)$. Da $3E-A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1\\ 0 & 10 & -5\\ 0 & 10 & -5\end{pmatrix}$ den Rang 1 hat, erkennt man hier schon, dass A diagonalisierbar ist. Man erhält als linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 3 die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. Als Eigenvektor zum Eigenwert -2 erkennt man an $-2E-A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -5\\ 0 & 10 & -10\end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix}-1\\5\\5\end{pmatrix}$. damit leistet die Matrix W, deren Spalten diese Eigenvektoren sind, das Gewünschte, also $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Es sei $A_n = (a_{ik}) \in \operatorname{Mat}(n,\mathbb{R})$ gegeben durch $a_{ik} := \begin{cases} i & \text{für } k \le i\\ k & \text{für } k > i\end{cases}$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang} A_n = n$ gilt, berechnen Sie $\det(A_n)$ und A_3^{-1}.

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Determinante, da sich daraus auch der Rang ergeben wird.

Es ist $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 2 & 2 & 3 & \dots & n\\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & & \vdots\\ n & & & \dots & n\end{pmatrix}$. Subtraktion der ersten Zeile von allen anderen Zeilen liefert für

$n \geq 2$: $\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

Durch Entwicklung nach der letzten Spalte entsteht noch die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen. Also gilt $\det(A_n) = (-1)^{n+1} \cdot n$ und diese Formel gilt wegen $\det(A_1) = 1$ für alle $n \geq 1$.
Die Matrix A_n hat also den Rang n.
A_3^{-1} berechnet man entweder mit der expliziten Formel oder nach dem bekannten Verfahren zu

$$A_3^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 5

Sei V Vektorraum über K, seien U, W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in U und $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig in W und
$S := \{v_i + w_i \,;\, i = 1, \ldots, r\}$. Zeigen Sie:
a) S ist linear unabhängig.
b) $\operatorname{Span}(S) \cap U = \operatorname{Span}(S) \cap W = \{0\}$.

Lösung:
a) Sei $\alpha_1(v_1 + w_1) + \ldots + \alpha_r(v_r + w_r) = 0$. Zu zeigen ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.
Aus obiger Gleichung erhält man

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = -\alpha_1 w_1 - \ldots - \alpha_r w_r \,.$$

Nennt man diesen Vektor x, so zeigt die linke Darstellung $x \in U$ und die rechte Darstellung $x \in W$. Wegen $U \cap W = \{0\}$ folgt $x = 0$. Also ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$, und da $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in U sind, folgt daraus $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.
b) Sei $x \in \operatorname{Span}(S) \cap U$. Dann gibt es Darstellungen

$$x = \alpha_1(v_1 + w_1) + \ldots + \alpha_r(v_r + w_r) = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_r v_r \,.$$

Es folgt $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + \ldots + (\beta_r - \alpha_r)v_r =: y$. Wegen der linken Darstellung gilt $y \in W$, wegen der rechten Darstellung ist $y \in U$, also folgt $y = 0$ wegen $U \cap W = \{0\}$. Aus $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = 0$ folgt aber wegen der linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_r$, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ ist. Also ist $x = 0$, d.h. $\operatorname{Span}(S) \cap U = \{0\}$.
$\operatorname{Span}(S) \cap W = \{0\}$ zeigt man entsprechend.

Aufgabe 6

Es seien $u, v \in K^{(n \times 1)}$, $\lambda := 1 + {}^t u \cdot v \neq 0$. Dann ist die Matrix $E + u \cdot {}^t v$ invertierbar und es gilt $(E + u \cdot {}^t v)^{-1} = E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v$.

Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
(E + u \cdot {}^t v)(E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v) &= E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v + u \cdot {}^t v - \frac{1}{\lambda} (u \cdot {}^t v) \cdot (u \cdot {}^t v) \\
&= E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v + u \cdot {}^t v - \frac{1}{\lambda} u \cdot ({}^t v \cdot u) \cdot {}^t v \\
&= E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v + u \cdot {}^t v - \frac{1}{\lambda} ({}^t v \cdot u)\, u \cdot {}^t v \qquad \text{da } {}^t v \cdot u \in K \\
&= E + u \cdot {}^t v - \frac{1}{\lambda} (1 + {}^t v \cdot u)\, u \cdot {}^t v \\
&= E + u \cdot {}^t v - u \cdot {}^t v \qquad \text{da } 1 + {}^t v \cdot u = 1 + {}^t u \cdot v = \lambda \\
&= E
\end{aligned}$$

Daher ist $E + u \cdot {}^t v$ invertierbar und es gilt $(E + u \cdot {}^t v)^{-1} = E - \frac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v$.