Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 25. Oktober 2001

1. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 1. November 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Mengen.

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $(A \setminus B) \times (A \setminus C) = (A \times A) \setminus (B \times C)$

Aufgabe 2 (je 4 Punkte)

Es seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist f surjektiv und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.
Geben Sie Abbildungen f und g an, so dass gilt:
$g \circ f$ ist injektiv und g ist nicht injektiv.

b) $g \circ f$ bijektiv $\Longrightarrow$ f injektiv und g surjektiv.
Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $g \circ f$ bijektiv sein kann, obwohl weder f surjektiv, noch g injektiv ist.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Gegeben sind jeweils zwei Geraden A und B im $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie $A \cap B$.

a) $A = (5,0,6) + \mathbb{R}(1,-2,2)$
B ist die Gerade durch die Punkte $(0,6,-2)$ und $(5,6,3)$.

b) $A = (1,1,1,1,1) + \mathbb{R}(2,-1,1,-1,1)$
B ist die Gerade durch die Punkte $(-5,4,-2,7,-2)$ und $(-1,2,0,3,0)$.

c) $A = \mathbb{R}(-3,1,4,1)$, $B = (1,2,1,3) + \mathbb{R}(-3,1,4,1)$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Das Parallelogramm $ABCD$ sei von den linear unabhängigen Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt. E teile die Seite AD im Verhältnis $3:1$, F teile die Seite DC im Verhältnis $4:1$ (siehe Skizze). In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AF?

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 1. November 2001

2. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 8. November 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (2,2,1 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $A = (1, 5, 7)$, $B = (-1, 3, 6)$ und $C = (0, 4, 5)$. Berechnen Sie im Dreieck ABC

a) die Seitenlängen und die Winkel.
b) die Fußpunkte der Höhen auf den Seiten.
c) den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Aufgabe 2 (2,3,3 Punkte)

Gegeben seien die Ebenen $E_1 = (1, 2, 3) + \mathbb{R}\,(1, 1, -1) + \mathbb{R}\,(2, -1, 1)$ und $E_2 = \{(x, y, z) \ ; \ 2x + 3y - z + 1 = 0\}$, die Gerade $A = (5, 0, 6) + \mathbb{R}\,(1, -2, 2)$ und der Punkt $u = (3, -2, 1)$.

a) Stellen Sie E_1 in der Darstellung des Satzes 1.6 der Vorlesung dar, und geben Sie für E_2 eine Parameterdarstellung an.
b) Bestimmen Sie: $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, $E_1 \cap E_2$.
c) Berechnen Sie $d(u, A)$, $d(u, E_1)$ und $d(u, E_2)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien v_1, v_2, v_3 drei Punkte im $\mathbb{R}^n$, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass es dann genau eine Ebene durch diese drei Punkte gibt.
(siehe Vorlesung Satz 1.5)

Aufgabe 4 (je 3 Punkte)

Es sei $A = u + \mathbb{R}v$ eine Gerade und $E = \{x \ ; \ \langle n, x - a\rangle = 0\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) $A \subset E$ oder $A \cap E = \emptyset \iff \langle v, n\rangle = 0$

b) $\langle v, n\rangle \neq 0 \implies u + \dfrac{\langle n, a - u\rangle}{\langle n, v\rangle} v \in A \cap E$

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 8. November 2001

3. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 15. November 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element in G ist. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Zeigen Sie: Die 6 Abbildungen $h_i : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h_i(x) \end{cases}$ mit

$h_1(x) := x,\ h_2(x) := 1 - x,\ h_3(x) := \dfrac{1}{x},\ h_4(x) := \dfrac{x}{x-1},\ h_5(x) := \dfrac{1}{1-x},\ h_6(x) := 1 - \dfrac{1}{x}$

bilden bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe $(G, \circ)$.
Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 3 (3, 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Körper mit genau 3 Elementen.

b) Es sei $A := \{(a + b\,\mathrm{i}\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Betrachten Sie $(A, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ wie in $\mathbb{C}$ definiert sind, und untersuchen Sie, welche der in der Vorlesung eingeführten Grundstrukturen $(A, +, \cdot)$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$, z_2^9, sowie $|z_1|$ und $|z_2|$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 15. November 2001

4. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 22. November 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (je 3 Punkte)

a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $4\mathrm{i}z^2 + (8-4\mathrm{i})z - 12 - 3\mathrm{i} = 0$.

b) Zeigen Sie:
Ist $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, so gibt es genau zwei komplexe Zahlen w_1, w_2 mit $w_1^2 = w_2^2 = z$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei $V = \{(x,y) \,:\, x, y \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0\}$. Ferner seien $\oplus$ und $\odot$ definiert durch

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) &:= (x_1 + x_2\ ,\ \frac{1}{2} y_1 \cdot y_2) \\ k \odot (x_1,y_1) &:= (kx_1\ ,\ 2 \cdot (\frac{y_1}{2})^k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Q}\ . \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, ob $(V, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

V sei ein K-Vektorraum, U_1, U_2 seien Unterräume von V. Zeigen Sie:
$U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum von $V \iff U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Aufgabe 4 (je 2 Punkte)

Welche der angegebenen Mengen sind Unterräume vom $\mathbb{R}$−Vektorraum V?

a) $V = \mathbb{R}^2$
$\{(x_1,x_2)\ ;\ 3x_1 - 4x_2 = a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben)
$\{(x_1,x_2)\ ;\ (x_1-1)^2 - x_2^2 = 1\}$

b) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$\{f \in V\ ;\ f(3) = a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben)
$\{f \in V\ ;\ f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \mathbb{R}[x]$
$\{p \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \mathrm{Grad}\, p \geq 3\} \cup \{0\}$
$\{p \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \exists a_0, a_2, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{R} \text{ mit } p = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n}\}$

Hinweis zu c): Ist $p = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 22. November 2001

5. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 29. November 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung (im $\mathbb{R}^5$) für das folgende homogene lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Gehen Sie dabei bitte genau nach dem Beweis von Satz 4.2 der Vorlesung vor.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Es sei V ein $K-$Vektorraum und es seien A, B Teilmengen von V.
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $A \cap B \neq \{0\} \implies \operatorname{Span}(A \cap B) = \operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B$
b) $A \subset B$ oder $B \subset A \iff \operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B$
c) $\operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B) = \operatorname{Span} A \cap \operatorname{Span} B$
d) $\operatorname{Span}(A \cup B) = \operatorname{Span}(\operatorname{Span} A \cup \operatorname{Span} B)$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $K-$Vektorraum V.

a) $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$
$(1,0,1,4)$, $(-1,2,-1,1)$, $(1,2,1,9)$

b) V der Vektorraum aus Hausübung 4, Aufgabe 2, also $K = \mathbb{Q}$
$(1,1)$, $(2,2)$

c) $\alpha)$ $V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{C}$ $\beta)$ $V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{R}$
$(\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1)$, $(1, \mathrm{i}, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}-1, \mathrm{i}, \mathrm{i}-1)$

d) $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K = \mathbb{R}$
$f_1(t) = t + 4$, $f_2(t) = |t+4|$, $f_3(t) = |t| + 4$

Aufgabe 4 (2, 3 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $S \subset V$ jeweils eine Basis und die Dimension von $\operatorname{Span} S$. Ergänzen Sie die von Ihnen angegebene Basis von $\operatorname{Span} S$ zu einer Basis von V.

a) $S = \{(6,2,0,3), (0,1,-1,0), (6,0,2,3), (-2,3,1,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$
b) $S = \{x^2 + x^4, 1 + x + x^5, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5\}$,
V ist der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 5.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 29. November 2001

6. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 6. Dezember 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeigen Sie:
Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $V = \mathrm{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge

$$\{f_c\,;\, f_c(x) = \begin{cases} x - c & \text{falls } x > c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, c \in \mathbb{R}\}$$

linear unabhängig.

Aufgabe 2 (je 2 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils, ob es Homomorphismen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Wenn ja, wie viele?

a) $n = 4$, $m = 3$, $f(v_i) = w_i$ für die folgenden Vektoren:
$v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1, -1)$, $v_3 = (3, 8, 1, 5)$
$w_1 = (1, 2, 3)$, $w_2 = w_3 = (1, 0, 1)$.

b) $n = 4$, $m = 3$, $f(v_i) = w_i$ für die folgenden Vektoren:
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$,
$w_i = (2, -1, 3)$ für $i = 1, ..., 4$.

c) $n = m = 4$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\} = \mathrm{Im}\, f$.

d) $n = 3$, $m = 4$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\,\{(1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}$.

Aufgabe 3 (je 2 Punkte)

Es seien V und W K-Vektorräume, B sei eine Basis von V und $f : V \longrightarrow W$ sei ein Epimorphismus. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Ist $\dim V = \dim W$, so ist $f(B)$ eine Basis von W.

b) Ist $\dim V = \dim W < \infty$, so ist $f(B)$ eine Basis von W.

Aufgabe 4 (3, 4 Punkte)

a) Der Homomorphismus $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_4 + x_5, 0, 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5).$$
Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}\, f$ und von $\mathrm{Im}\, f$.

b) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\varphi : V \longrightarrow V$ sei definiert wie folgt: $\varphi(f)$ ist diejenige Abbildung aus V mit $(\varphi(f))(n) = f(2n)$.
Zeigen Sie, dass φ ein Endomorphismus von V ist, und bestimmen Sie $\mathrm{Ker}\, \varphi$ und $\mathrm{Im}\, \varphi$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 6. Dezember 2001

7. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 13. Dezember 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien Untervektorräume U_1, U_2, U_3 definiert durch

$$\begin{aligned} U_1 &= \operatorname{Span}\{(0,2,1),(1,2,-1),(2,-2,-5)\} \\ U_2 &= \operatorname{Span}\{(1,3,-1),(1,5,1),(1,4,0),(0,1,1)\} \\ U_3 &= \operatorname{Span}\{(0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.
Ist U_i $(i = 2,3)$ ein Komplement von U_1 in $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $U = \{A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(n,m,K)\,;\, \sum\limits_{i,j} a_{ij} = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\operatorname{Mat}(n,m,K)$ ist und bestimmen Sie die Dimension sowie eine Basis von U.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Rang, sowie eine Basis des Zeilenraumes und eine Basis des Spaltenraumes für die folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 1 \\ i & 1 & 1-i & -2i \\ 2 & 1 & -1-i & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ als Matrix über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}(m,n;K)$ habe die Gestalt $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, wobei A, B und 0 passende Matrizen sind.
Zeigen Sie: $\operatorname{Rang} M = \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 13. Dezember 2001

8. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 20. Dezember 2001 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, K)$. Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (1, 2, 3 Punkte)

Ein Homomorphismus $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$f({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)) = {}^t(x_1 - x_3 - 2x_4, ax_1 + x_3 + (1-a)x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4) .$$

a) Bestimmen Sie diejenige Matrix A mit $f = h_A$.
b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f surjektiv, für welche a injektiv?
c) Bestimmen Sie - in Abhängigkeit von a - $\mathrm{Ker}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Die Unterräume $U = \{(x, y, z)\, ;\, 2x - y - z = 0\}$ und $W = \mathrm{Span}\{(-2, 1, 1)\}$ erfüllen $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ (kein Beweis nötig!). Für $i = 1, 2$ sei $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $f_i(v) = v_i$, wobei $v = v_1 + v_2$ die eindeutige Darstellung von v mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in W$ ist.
Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 Homomorphismen sind, und bestimmen Sie die eindeutig bestimmten Matrizen A_1, A_2 mit $f_i = h_{A_i}$ $(i = 1, 2)$.
Berechnen Sie $A_1 A_2$ und interpretieren Sie das Ergebnis im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (2, 3, 3 Punkte)

Eine quadratische Matrix A über K heißt nilpotent, wenn es ein $1 \leq r \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^r = 0$.
Es seien $A, B \in K^{(n,n)}$. Zeigen Sie:
a) Sind A, B symmetrisch, so gilt: $A \cdot B = B \cdot A \iff A \cdot B$ symmetrisch
Geben Sie symmetrische Matrizen A, B an, so dass AB nicht symmetrisch ist.
b) Sind A, B nilpotent und ist $A \cdot B = B \cdot A$, so sind $A \cdot B$ und $A + B$ nilpotent.
Kann hier auf die Voraussetzung $A \cdot B = B \cdot A$ verzichtet werden?
c) Ist A invertierbar, B nilpotent und $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $A + B$ invertierbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Hilfssatz: Ist C nilpotent, so ist $C + E$ invertierbar.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 20. Dezember 2001

9. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 10. Januar 2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind über $\mathbb{R}$, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ äquivalent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls invertierbare Matrizen P, Q mit $PAQ = B$.

Aufgabe 3 (3, 3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_3 & = & 3 \\ x_2 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_5 & = & -1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & + & 2x_5 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcr} a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & a_3x_3 & = & b_1 \\ & - & a_3x_2 & + & a_2x_3 & = & b_2 \\ a_3x_1 & & & - & a_1x_3 & = & b_3 \\ -a_2x_1 & + & a_1x_2 & & & = & b_4 \end{array}$$
sei lösbar im $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, daß es dann nur folgende zwei Möglichkeiten gibt:

(i) Jedes $x \in \mathbb{R}^3$ ist Lösung.
(ii) Es gibt genau eine Lösung.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit $|K| = k$. Zeigen Sie: $|GL(n,K)| = k^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} (k^i - 1)$

Alle Mitarbeiter der Linearen Algebra wünschen Ihnen
Frohe Weihnachten und ein glückliches Neues Jahr!

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 10. Januar 2002

10. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 17. Januar 2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (2, 3 Punkte)

Zeigen Sie für das Vektorprodukt und Spatprodukt $[a, b, c] := \langle a \times b, c\rangle$ im $\mathbb{R}^3$ die folgenden Regeln:

a) $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$

b) $[a, b, c]^2 = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,a\rangle & \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle \end{vmatrix}$

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)

Es seien $a = (1, \alpha, \alpha)$, $b = (2, -1, 1)$ und $c = (0, 1, 1)$.

a) Für welche α hat der von a, b, c aufgespannte Spat eine Oberfläche von $4(\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$ Flächeneinheiten?

b) Können Sie α so bestimmen, dass Oberfläche und Volumen des Spats in ihren Maßzahlen übereinstimmen?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie: $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände von σ und τ sowie $\operatorname{sign}(\sigma)$ und $\operatorname{sign}(\tau)$.

Schreiben Sie σ und τ als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 4 (1, 3, 5 Punkte)

Zu einer festen Permutation $\sigma \in S_n$ sei f_σ derjenige Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$, der gegeben ist durch $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ferner seien Unterräume U und V des $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$U := \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\} \quad , \quad V := \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 = \ldots = x_n\}.$$

a) Geben Sie die Matrix A an, für die $f_\sigma = h_A$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma \in S_n$ gilt: $f_\sigma(U) = U$ und $f_\sigma(V) = V$.

c) Bestimmen Sie alle Untervektorräume $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $f_\sigma(W) \subset W$ für alle $\sigma \in S_n$.

Hinweis: Die Klausur zur Linearen Algebra I findet am Samstag, dem 26.1.2002, in der Zeit von 8.30 - 11.00 Uhr statt. Die Gruppen von Herrn Klehn und Herrn Lönne schreiben im Raum E001, die Gruppen von Herrn Wille und Herrn Wirth im AudiMax.

Teilnahmevoraussetzung: Die Möglichkeit, in den 12 Hausübungen dieses Semesters 100 Punkte zu erreichen.

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 17. Januar 2002

11. Übungsblatt: **Lineare Algebra I**

Abgabe: 24. Januar 2002 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1 (2, 3 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (3, 3 Punkte)

a) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, K)$ gegeben durch $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ oder } i = j \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Berechnen Sie $\det A$.

b) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ gegeben durch $a_{ij} = 1$ für $j \neq n + 1 - i$, $a_{i\, n+1-i} = \alpha$, $(i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\det A$ und bestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\det A = 0$.

Aufgabe 3 (2, 2, 2, 3 Punkte)

Es seien $A, B \in GL(n, K)$. Zeigen Sie:

a) $\widetilde{A \cdot B} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$ **b)** $\widetilde{A^{-1}} = (\widetilde{A})^{-1}$

c) $\det(\widetilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$ **d)** $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det(A))^{n-2} \cdot A$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Ist A diagonalisierbar?

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 30. Januar 1999

Klausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $a = (3, 0, 3), b = (4, -2, 4), c = (3, 2, 1), d = (0, 1, 1)$ und $e = (1, 2, 1)$ gegeben.

a) Geben Sie Parameterdarstellungen der Geraden G durch d und e und der Ebene E, die a, b und c enthält, an. Wie lautet die Hessesche Normalform von E?

b) Zeigen Sie, daß der Schnittpunkt von G und E der Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $a, (0, 6, 0), (3, 3, 0)$ ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V =$Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind drei Funktionen f_1, f_2, f_3 gegeben durch $f_1(x) = \mathrm{e}^x$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $f_3(x) = \mathrm{e}^{|x|}$. Untersuchen Sie f_1, f_2, f_3 auf lineare Unabhängigkeit in V.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien Homomorphismen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ und $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$f(x, y) = (x + 2y, -x + y, x + 3y, 2x)$ und $g = h_B$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, ob $g \circ f$ invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix C mit $(g \circ f)^{-1} = h_C$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $V =$Abb$(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\varphi : V \longrightarrow V$ sei wie folgt definiert:
$\varphi(f)$ ist diejenige Abbildung aus V mit $(\varphi(f))(n) = f(2n)$.

a) Zeigen Sie, daß φ ein Endomorphismus von V ist.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$.

c) Gilt $V = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$?

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & - & 12x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \end{array}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Die Matrix $A_n = (a_{ij}) \in$Mat$(n, \mathbb{R})$ sei definiert durch

$$a_{ij} = 1 \text{ für } j \geq i \quad , \quad a_{n1} = 1 \quad , \quad a_{ij} = 0 \text{ sonst }.$$

Berechnen Sie $\det A_n$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Es sei V ein $K-$Vektorraum mit $\dim V = n$, ferner seien $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß es dann ein $a \in \operatorname{Ker} \varphi$ gibt mit $\psi(a) \neq 0$.

Viel Erfolg !!!

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
PROF. DR. K. HULEK, DR. D. WILLE

Hannover, den 14. April 1999

Wiederholungsklausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$ sei fest gewählt. Zeigen Sie:
$f : G \longrightarrow G$ mit $f(a) := g \circ a \circ g^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Im $K-$Vektorraum V seien die Vektoren a, b, c, d linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob dann die Vektoren

$$a + b + c \quad , \quad a + b \quad , \quad a - b + c \quad , \quad a + c + 2d$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Von einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sei nur bekannt, daß sie $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ abbildet.

a) Können Sie φ durch Zusatzbedingungen so festlegen, daß $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Span}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ gilt?

b) Geben Sie eine Abbildung φ mit obigen Eigenschaften und $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$ in der Form

$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\\\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ \alpha x & - & 2y & - & \alpha z & = & 0 \\ 2\alpha x & - & 2\alpha y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem **nicht eindeutig lösbar** und wie lauten in diesen Fällen gegebenenfalls die Lösungen?

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, daß es dann einen eindimensionalen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gibt mit $f(U) = U$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie - falls möglich - eine Spektralzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

VIEL ERFOLG !!!

Institut für Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. K. Hulek, Dr. D. Wille

Hannover, den 26. Januar 2002

Klausur zur Linearen Algebra I

Jede Aufgabe 10 Punkte

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $v_1 = (2,3,4,5)$, $v_2 = (2,3,1,0)$, $v_3 = (3,5,4,2)$, $v_4 = (1,0,2,2)$ des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

b) Überprüfen Sie, ob die in a) angegebenen Vektoren, interpretiert als Elemente des $\mathbb{F}_2^4$, linear unabhängig sind.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ gibt, die $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}4\\7\\11\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\3\\4\\1\end{pmatrix}$ abbildet und für die $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ gilt. Geben Sie die Matrix A an mit $f = h_A$.

Aufgabe 3

Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -10 & 8 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. Wenn ja, geben Sie eine Matrix W an, so dass $W^{-1}AW$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4

Es sei $A_n = (a_{ik}) \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$ gegeben durch $a_{ik} := \begin{cases} i & \text{für } k \leq i \\ k & \text{für } k > i \end{cases}$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang} A_n = n$ gilt, berechnen Sie $\det(A_n)$ und A_3^{-1}.

Aufgabe 5

Sei V Vektorraum über K, seien U, W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig in U und $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig in W und $S := \{v_i + w_i\,;\, i = 1, \ldots, r\}$. Zeigen Sie:

a) S ist linear unabhängig.

b) $\operatorname{Span}(S) \cap U = \operatorname{Span}(S) \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 6

Es seien $u, v \in K^{(n\times 1)}$, $\lambda := 1 + {}^t u \cdot v \neq 0$. Dann ist die Matrix $E + u \cdot {}^t v$ invertierbar und es gilt $(E + u \cdot {}^t v)^{-1} = E - \dfrac{1}{\lambda} u \cdot {}^t v$.