INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

17. Oktober 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) $x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \notin B \cup C \iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$
$\iff x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$x \in A \setminus (B \cap C) \iff x \in A \wedge x \notin B \cap C \iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$
$\iff x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(b) $x \in A \wedge x \in (B \cup C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $x \in A \setminus (A \setminus B) \iff x \in A \wedge x \notin A \setminus B \iff x \in A \wedge B$.

Aufgabe 2

(a) Die Aussage ist richtig! Beweis: $(x, y) \in A \times (B \cap C) \iff x \in A \wedge y \in B \cap C$
$\iff (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

(b) Die Aussage ist falsch! Gegenbeispiel: Setze $A := \{0, 1\}$ und $B = C := \{1\}$.
Dann gilt $(A \setminus B) \times (A \setminus C) = \{(0, 0)\}$,
aber $(A \times A) \setminus (B \times C) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \setminus \{(1, 1)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$.

Aufgabe 3

(a) $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$
$\iff x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(b) $A \triangle \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$ und $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

(c) Beweis durch Fallunterscheidungen:
Sei $S := \{x \in A \cup B \cup C \mid \begin{array}{l} x \text{ liegt in genau einer der Mengen } A, B, C \\ \text{oder in allen drei Mengen } A, B, C. \end{array} \}$

1. Fall (x in keiner Menge, $x \notin A,\ x \notin B,\ x \notin C$):
$\Longrightarrow x \notin S$ und $x \notin (A \cup B \cup C) \Longrightarrow x \notin (A \triangle B) \triangle C$.

2. Fall (x in genau einer Menge, oBdA $x \in A,\ x \notin B,\ x \notin C$):
$\Longrightarrow x \in S$ und $x \in A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Longrightarrow x \in (A \triangle B) \wedge x \notin C$
$\Longrightarrow x \in (A \triangle B) \triangle C$.

3. Fall (x in genau zwei Mengen, oBdA $x \in A,\ x \in B,\ x \notin C$):
$\Longrightarrow x \notin S$ und $x \notin (A \triangle B) \wedge x \notin C \Longrightarrow x \notin (A \triangle B) \triangle C$.

4. Fall (x in allen drei Mengen, $x \in A,\ x \in B,\ x \in C$):
$\Longrightarrow x \in S$ und $x \notin A \triangle B \wedge x \in C \Longrightarrow x \in C \triangle (A \triangle B) = (A \triangle B) \triangle C$.

(d) $A \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle A = S$.
Dies folgt sofort aus $B \cup C \cup A = A \cup B \cup C$ und (c).

Aufgabe 4*

Beweis (indirekt): Annahme: Es gibt eine bijektive Abbildung $f:\ X \to \mathcal{P}(X)$.
Sei $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$ und $a \in X$ mit $f(a) = A$.
Dann gilt $a \in A$ oder $a \notin A$.
$a \in A = f(a) \Longrightarrow a \notin A\ \sharp$ und $a \notin A = f(a) \Longrightarrow a \in A\ \sharp$.
Die Annahme führt also in jedem Fall auf einen Widerspruch, also ist sie falsch und damit die Behauptung bewiesen.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

24. Oktober 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 5

(a) $y \in f(X) \setminus f(A) \iff \exists x \in X \setminus A : y = f(x) \implies y \in f(X \setminus A)$.

(b) $x \in \overset{-1}{f}(C \cup D) \iff f(x) \in C \cup D \iff f(x) \in C \vee f(x) \in D$
$\iff x \in \overset{-1}{f}(C) \vee x \in \overset{-1}{f}(D) \iff x \in \overset{-1}{f}(C) \cup \overset{-1}{f}(D)$.

Aufgabe 6

$M \in \mathcal{P}(X) \implies \chi(M) = \chi_M \in \{0,1\}^X$.
Offensichtlich ist χ injektiv, denn verschiedene Mengen haben verschiedene charakteristische Funktionen.
Ist $\mu \in \{0,1\}^X$, so sei $M := \{x \in X \mid \mu(x) = 1\} \in \mathcal{P}(X)$.
Dann ist $\chi(M) = \mu$, die Abbildung χ also auch surjektiv und damit bijektiv.
$\chi^{-1} : \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$ mit $\chi^{-1}(\mu) = \{x \in X \mid \mu(x) = 1\} \in \mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 7

(a) Ist f surjektiv, so gibt es zu jedem $y \in f(X) = Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Sei $g(y) := x$.
Dann ist $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
Ist $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und ist $y \in Y$, so ist $y = f(g(y))$ und f folglich surjektiv.

(b) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 2x + 3$ ist bijektiv, denn $g_1(x) := \overset{-1}{f}_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x,y) = 2x + 3y$ ist nicht injektiv, da $f_2(3,0) = f_2(0,2) = 6$.
Sei $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g_2(r) = (\frac{1}{2}r, 0)$, so ist $f_2 \circ g_2(r) = f_2(\frac{1}{2}r, 0) = r$, also $f_2 \circ g_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und nach (a) ist f_2 surjektiv.
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f_3(r) = (2r, 3r)$ ist nicht surjektiv, da $(0,1) \notin f_3(\mathbb{R})$.
Sei $g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x,y) = \frac{1}{2}x$, so ist $g_3 \circ f_3(r) = g_3(2r, 3r) = r$, also $g_3 \circ f_3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und folglich f_3 injektiv.

Aufgabe 8

$(a,b)\, R\, (c,d) \;:\iff\; ad = bc$ ist keine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da R nicht transitiv ist: $(1,0)\, R\, (0,0)\, R\, (1,1)$ aber $((1,0) \not R (1,1)$.
$(a,b)\, R\, (c,d) \;:\iff\; ad = bc$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (zweite Komponente $\neq 0$), denn

(i) $(a,b)\, R\, (a,b)$, da $ab = ab$. Also ist R ist reflexiv.

(ii) $(a,b)\, R\, (c,d) \iff ad = bc \iff cb = da \iff (c,d)\, R\, (a,b)$. Also ist R ist symmetrisch.

(iii) $(a,b)\, R\, (c,d)\, R\, (e,f),\; b,d,f \neq 0 \iff ad = bc \wedge cf = de \iff adf = bcf \wedge bcf = bde$
$\implies adf = bde \iff af = be \iff (a,b)\, R\, (e,f)$. Also ist R ist transitiv.

Die Äquivalenzklassen sind genau die 'Ursprungsgeraden'.

Aufgabe 9*

(a) Die Abbildung $\chi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ ist bijektiv (Aufgabe 6).
Wegen $|\{0,1\}^X| = 2^{|X|}$ (Stundenübung) ist $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^{|X|}$.

(b) X endlich und $X \neq \emptyset \implies |X| \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.
Die Abbildung $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ mit $M \mapsto X \setminus M$ ist offensichtlich bijektiv.

(i) Sei $|X|$ ungerade.

Für $M \subseteq X$ gilt: $|M|$ gerade $\iff |X \setminus M| = |X| - |M|$ ungerade.
Es gibt also gleichviele Teilmengen mit gerader Elementzahl wie solche mit ungerader Elementzahl, nämlich $2^{|X|-1}$.

(ii) Sei $|X|$ gerade und $x_0 \in X$.

Dann ist $|X \setminus \{x_0\}| = |X| - 1$ ungerade und nach (i) hat $X \setminus \{x_0\}$ genau so viele gerade wie ungerade Teilmengen, nämlich $2^{|X|-2}$.
Da es in X genau so viele Teilmengen mit wie ohne x_0 gibt, gibt es in X folglich $2^{|X|-2}$ 'gerade' wie 'ungerade' Teilmengen mit x_0.
Insgesamt hat X also genau $2 \cdot 2^{|X|-2} = 2^{|X|-1} = \frac{1}{2}|\mathcal{P}(X)|$ Teilmengen mit gerader Elementzahl und gleichviele mit ungerader Elementzahl.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

31. Oktober 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 10

Nach einem Lemma der Vorlesung ist eine Halbgruppe G genau dann eine Gruppe, wenn es zu allen $a, b \in G$ Elemente $x, y \in G$ gibt mit $xa = b$ und $ay = b$.

Seien also $a, b \in G$. Da G endlich ist und die Kürzungsregeln gelten, gilt

$$Ga = \{xa \mid x \in G\} = G = \{ay \mid y \in G\} = aG.$$

Also gibt es $x, y \in G$ mit $xa = b$ und $ay = b$ und folglich ist G eine Gruppe.

Aufgabe 11

(a) $x^2 = e \iff x = x^{-1}$. Für $x, y \in G$ gilt: $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$, also G abelsch.

(b) Sind $x, y \in G$ und ist $(xy)^2 = xyxy = x^2y^2$, so liefert Multiplikation mit x^{-1} von links und mit y^{-1} von rechts $yx = xy$. G ist also abelsch.

Aufgabe 12

(a) Wie in der Vorlesung bei der Bestimmung der Symmetrieen des Quadrats erhält man:

Drehachsen:

(i) 4 Achsen durch Eckpunkt und gegenüberliegenden Flächenmittelpunkt: Drehungen um 0^0, 120^0, 240^0 ergeben $4 \times 2 = 8$ Drehungen $\neq$ id.

(ii) 3 Achsen durch gegenüberliegende Kantenmitten: Drehungen um 0^0, 180^0 ergeben 3 Klappungen $\neq$ id.

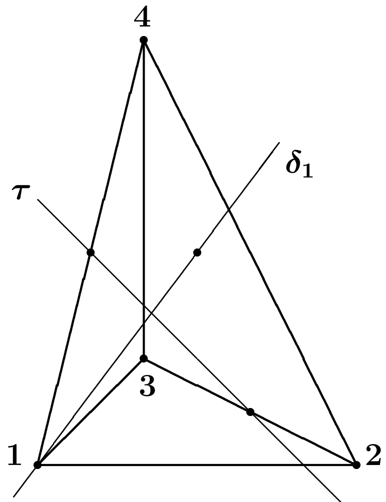
Zusammen mit id sind dies 12 Symmetrien.

Weitere Symmetrien gibt es nicht, denn

(1) bleiben bei einer Symmetrie mindestens zwei Punkte fest, so ist es die Identität.

(2) bleibt bei einer Symmetrie genau ein Punkt fest, so werden die drei übrigen zyklisch vertauscht. Es handelt sich also um eine der Drehungen (i).

(3) bleibt bei einer Symmetrie kein Punkt fest, so gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Punkte–Paare, die ineinander übergehen. Werden zwei Punkte vertauscht, so auch die beiden übrigen, es gibt also $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ derartige Symmetrien. Es handelt sich also um eine der Klappungen (ii).



(b) Identität: $\varepsilon := \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Klappungen: $\rho := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8 Drehungen:

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \delta_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \delta_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Nichttriviale Untergruppen von T:

$< \rho >= \{\varepsilon, \rho\}$ zyklisch, $< \delta_i >= \{\varepsilon, \delta_i, \delta_i^2\} =< \delta_i^2 >$ zyklisch $(i = 1, 2, 3, 4)$,
$< \sigma >= \{\varepsilon, \sigma\}$ zyklisch,
$< \tau >= \{\varepsilon, \tau\}$ zyklisch, $< \rho, \sigma >= \{\varepsilon, \rho, \sigma, \tau\}$ nicht zyklisch, $\rho^2 = \sigma^2 = \tau^2 = \varepsilon$.

Aufgabe 13

(a) $e \in C_G(M) \Longrightarrow C_G(M) \neq \emptyset$,
$x, y \in C_G(M),\ m \in M$:
$xm = mx \wedge ym = my \Longrightarrow xym = xmy = mxy \Longrightarrow xy \in C_G(M)$,
$x \in C_G(M),\ m \in M$:
$xm = mx \Longrightarrow xx^{-1}m = m = mxx^{-1} = xmx^{-1} \Longrightarrow x^{-1}m = mx^{-1} \Longrightarrow x^{-1} \in C_G(M)$.
Also ist $C_G(M)$ Untergruppe von G.

(b) $C(G) = E$, falls $G = S_3$, T.
$C(G) = G$, falls G abelsch, z.B. $G = V_4$.
$C(G) \neq E, G$ z.B. $C(D_4) = \{\varepsilon,$ Drehung um $180^0\}$ und $C(H) = \{1, -1\}$ (Tutorium!)

Aufgabe 14*

$e \in G^n$, $e \in G_n$, also sind G^n, G_n nichtleer. Untergruppenkriterium (Vorlesung):

(a) $x^n, y^n \in G^n \Longrightarrow x^n(y^n)^{-1} = x^n y^{-n} = (xy^{-1})^n \in G^n$ (G abelsch!), also $G^n \leq G$

(b) $x, y \in G_n \Longrightarrow x^n = y^n = e \Longrightarrow e = x^n y^{-n} = (xy^{-1})^n \Longrightarrow xy^{-1} \in G_n$, also $G_n \leq G$.

(c) Für die Abbildung $xG_n \mapsto x^n$ von $G/G_n \to G^n$ gilt:
$x^n = y^n \Longleftrightarrow e = x^n y^{-n} = (xy^{-1})^n$ (G abelsch!) $\Longleftrightarrow xy^{-1} \in G_n \Longleftrightarrow xG_n = yG_n$.
Die Abbildung ist also wohldefiniert und injektiv. Da sie offensichtlich surjektiv ist, ist sie bijektiv.

(d) Ist G endlich und $G/G_n \to G^n$ bijektiv, so folgt, da die Einteilung in Nebenklassen eine Partition von G ist und alle Nebenklassen gleichviele Elemente haben, nämlich $|G_n|$:

$$|G/G_n| = |G|/|G_n| = |G^n|, \text{ also } |G| = |G_n| \cdot |G^n|.$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

7. November 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 15

Sei $G \neq E$ eine endliche abelsche Gruppe.

Sei G einfach. Annahme: $|G| = kl,\ k, l \in \mathbb{N},\ k, l > 1$. Sei $e \neq g \in G$:
(i) $\operatorname{ord} g < |G| \Longrightarrow < g >$ ist nichttriviale Untergruppe und folglich Normalteiler von G.
(ii) $\operatorname{ord} g = |G| = kl \Longrightarrow \operatorname{ord} g^k = l \Longrightarrow < g >$ ist nichttrivialer Normalteiler von G.
In beiden Fällen wäre G nicht einfach. Also hat G Primzahlordnung.

Hat G Primzahlordnung, so hat G keine nichttrivialen Untergruppen (Satz von *Lagrange*) und folglich keine nichttrivialen Normalteiler, ist also einfach.

Aufgabe 16

(a) Ist U Untergruppe vom Index 2, so ist jede rechte NK auch linke NK, denn es gibt jeweils nur 2, wovon die eine U ist.

(b) (1) richtig: $N \cap U \leq G$, da der Durchschnitt zweier Untergruppen eine Untergruppe ist.

(2) falsch: $N := \{\varepsilon, \delta^2, \kappa_1, \kappa_2\} \trianglelefteq D_4$ und $U := \{\varepsilon, \kappa_1\} \leq D_4$, aber $N \cap U = U$ ist nicht NT von D_4. (Siehe 3. Stundenübung!)

Oder: Ist U Untergruppe, aber nicht Normalteiler von G, so ist zwar G, aber nicht $G \cap U = U$ NT in G.

(3) richtig: $N \cap U \leq U$ und $u \in U, n \in U \cap N \Longrightarrow unu^{-1} \in U \cap N$, also $U \cap N \trianglelefteq U$.

Aufgabe 17

(a) $eae^{-1} = a$, also reflexiv.
$gag^{-1} = b \Longleftrightarrow g^{-1}b(g^{-1})^{-1} = g^{-1}bg = a$, also symmetrisch.
$gag^{-1} = b \wedge hbh^{-1} = c \Longrightarrow (hg)a(hg)^{-1} = h(gag^{-1})h^{-1} = hbh^{-1} = c$ also transitiv.

Also ist die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

(b) Ist U Untergruppe von G, so gilt:
$U \trianglelefteq G \Longleftrightarrow gUg^{-1} = U\ \forall g \in G \Longleftrightarrow U = \bigcup_{u \in U} \{gug^{-1} \mid g \in G\}$,

d.h. U besteht aus (vollständigen) Klassen konjugierter Elemente.

Aufgabe 18

Elemente der Tetraedergruppe (siehe Aufgabe 12):

$$\varepsilon := \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \delta_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \delta_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Zerlegung von T in Klassen konjugierter Elemente:
$T = \{\varepsilon\} \cup \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\} \cup \{\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2, \delta_4^2\} \cup \{\rho, \sigma, \tau\}$, z.B. $\rho\delta_1\rho^{-1} = \delta_2,\ \rho\delta_1^2\rho^{-1} = \delta_2^2$.

(b) $Z(G) = \{\varepsilon\}$, da $\{\varepsilon\}$ die einzige einelementige Klasse konjugierter Elemente ist.

(c) $K_4 = \{\varepsilon\} \cup \{\rho, \sigma, \tau\}$ ist die einzige nichttriviale UG, die aus vollständigen Klassen konjugierter Elemente besteht, also einziger nichttrivialer Normalteiler (Aufgabe 16).

Aufgabe 19*

Sei $N \trianglelefteq G,\ N \leq U \leq G$.

(a) U/N ist eine Untergruppe von G/N, denn
$U/N = \{uN \mid u \in U\} \neq \emptyset$, da $N = eN \in U/N$.
$u, v \in U \Longrightarrow uv^{-1} \in U$ und $uN(vN)^{-1} = uv^{-1}N \in U/N$. Also $U/N \leq G/N$.

(b) Die Abbildung ist surjektiv, denn sei $U' \leq G/N$ etwa $U' =: \{xN \mid x \in X\}$.
Dann ist $U := \bigcup_{x\in X} xN \neq \emptyset$ und $U \leq G$, weil
$u = xn,\ v = ym \in U,\ n, m \in N \Longrightarrow uv^{-1} = xn(ym)^{-1} \in xN(yN)^{-1} \in U'$
$\Longrightarrow uv^{-1} \in \bigcup_{x\in X} xN = U$, also $U \leq G$.

(c) Die Abbildung ist injektiv und somit bijektiv, da $N \leq U \leq G \Longrightarrow U = \bigcup_{u\in U} uN$, verschiedene Untergruppen also verschiedene Bilder haben.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

14. November 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 20

(a) (i) $\alpha_g(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \alpha_g(x)\alpha_g(y)$. Also α_g ein Homomorphismus.

(ii) $\alpha_g(x) = \alpha_g(y) \iff g^{-1}xg = g^{-1}yg \iff x = y$. Also ist α_g injektiv.

(iii) Ist $y \in G$, so ist $x := gyg^{-1} \in G$ und $\alpha_g(x) = y$. Also ist α_g surjektiv.

Also ist α_g ein Automorphismus.

(iv) $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, denn $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)) = gg^{-1}xgg^{-1} = x$ für alle $x \in G$.

(b) Das Hintereinanderausführen von Abbildungen ist assoziativ. Ist $e \in G$ neutrales Element, so ist $\alpha_e \in A_G$ neutrales Element von A_G und $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ (siehe (iv)).

Also ist A_G eine Gruppe.

(c) Die Abbildung $\varphi :\ G \to A_G = \{\alpha_g \mid g \in G\}$ mit $g \mapsto \alpha_g$ ist surjektiv und wegen $\alpha_{gh}(x) = (gh)^{-1}xgh = h^{-1}g^{-1}xgh = \alpha_h \circ \alpha_g(x)$ ein Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}\,\varphi = Z(G)$, da $\alpha_g = \mathrm{id}_G \iff g^{-1}xg = x,$ für alle $x \in G \iff xg = gx,$ für alle $x \in G \iff g \in Z(G)$.

Aus dem Homomorphiesatz $G/\mathrm{Kern}\varphi \simeq \varphi(G)$ folgt $G/Z(G) \simeq A_G$.

Aufgabe 21

Man rechnet leicht nach:
$f((x,y) \overset{+}{\cdot} (u,v)) = \cdots = (x \overset{+}{\cdot} u, x \overset{+}{\cdot} u) = f((x,y)) \overset{+}{\cdot} f((u,v))$,
also ist f ein Ringendomorphismus.
$\mathrm{Bild}\, f = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\mathrm{Kern}\, f = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 22

(a) Ist $f = 0$ oder $g = 0$ (Nullpolynom), so folgt die Behauptung.

Sei $M := \deg f$ und $N := \deg g,\ M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

etwa $f = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^{M} b_i X^i$, so ist $a_i + b_i = 0$ für $i >\ \max\{M, N\}$.

Also $\deg(f+g) \leq\ \max\{M, N\}$.

(b) Analog sieht man $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = 0$ für $k > M + N$, also $\deg(fg) \leq M + N$.

Da $a_M, b_N \neq 0$ sind, ist $\sum_{i+j=M+N} a_i b_j = a_M b_N \neq 0$, also $\deg(fg) = M + N$.

Aufgabe 23

(a) Sei $\Phi : R[X] \to S$ mit $\Phi(a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N) := \varphi(a_0) + \varphi(a_1)s + \cdots + \varphi(a_N)s^N$.

Dann gilt $\Phi \circ \iota := \varphi$ und

(i) Φ ist Homomorphismus, da φ Homomorphismus ist.

(ii) $\Phi|_R = \varphi$, weil $\Phi(\iota(a_0)) = \varphi(a_0)$ ist.

(iii) $\Phi(X) = \Phi(1X) = \varphi(1)\Phi(X) = s$. Also gilt $\Phi(X) = s$.

(iv) Φ ist eindeutig bestimmt, denn ist $\Psi : R[X] \to S$ mit $\Psi \circ \iota = \varphi$ und $\Psi(X) = s$, so ist

$$\begin{aligned}\Psi(a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N) &= \varphi(a_0) + \varphi(a_1)s + \cdots + \varphi(a_N)s^N \\ &= \Phi(a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N), \text{ also } \Psi = \Phi.\end{aligned}$$

(b) $\Phi_0 : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathbb{Z}_2$ mit $\Phi_0(a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N) = \mathrm{id}(a_0) = a_0$,

$\Phi_1 : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathbb{Z}_2$ mit $\Phi_1(a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N) = \sum_{i=0}^{N} \mathrm{id}(a_i) = \sum_{i=0}^{N} a_i$.

$\mathrm{Kern}\,\Phi_0 = \{f \in \mathbb{Z}_2[X] \mid a_0 = 0\}$,

$\mathrm{Kern}\,\Phi_1 = \{f \in \mathbb{Z}_2[X] \mid \sum_{i=0}^{N} a_i = 0\} = \{f \in \mathbb{Z}_2[X] \mid$ die Anzahl der Koeff. $a_i = 1$ ist gerade$\}$.

Aufgabe 25*

Für das Zentrum von $S_3 = \{\varepsilon, \delta, \delta^2, \rho, \sigma, \tau\}$ gilt $Z(S_3) = E = \{\varepsilon\}$.

Also ist nach Aufgabe 20

$A_{S_3} \simeq S_3/E \simeq S_3$ mit $|A_{S_3}| = |S_3| = 6$.

Da bei einem Isomorphismus Bild und Urbild gleiche Ordnung haben, kann das Element $\delta \in S_3$ der Ordnung 3 nur in δ oder δ^2 übergehen. Ebenso kann das Element $\rho \in S_3$ der Ordnung 2 nur in ρ oder σ oder τ übergehen.

Also kann es höchstens $2 \cdot 3 = 6$ Automorphismen geben, d.h. es gibt nur die 6 Automorphismen aus A_{S_3} und folglich gilt $\mathrm{Aut}\,(S_3) = A_{S_3} \simeq S_3/E \simeq S_3$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

21. November 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 26

(a) M_1 ist für $a = 0$ eine Hyperebene (Ursprungsgerade) und somit ein Unterraum.
Ist $a \neq 0$, so ist $(0,0) \notin M_1$, also M_1 kein Unterraum.

M_2 ist kein Unterraum, da $(1,1), (1,-1) \in M_2$, aber $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin M_2$.

(b) $M_3 = \{f \in V \mid f(i) = 0$ für alle geraden $i\}$ ist abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation, also ein Unterraum.

M_4 ist kein Unterraum, da für

$$f(i) := \begin{cases} 0, & i \neq 3,4 \\ 1, & i = 3,4 \end{cases} \text{ und } g(i) := \begin{cases} 0, & i \neq 4 \\ -1, & i = 4 \end{cases} \text{ gilt } (f+g)(i) := \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ 1, & i = 3 \end{cases}.$$

Also $f, g \in M_4$ aber $f + g \notin M_4$.

(c) M_5 ist für $a \neq 0$ kein Unterraum, da die Nullfunktion $0 \notin M_5$.
Für $a = 0$ ist M_5 ein Unterraum:
$f(3) = g(3) = 0,\ r \in \mathbb{R} \Longrightarrow (f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0$ und $(rf)(3) = rf(3) = 0$.

$M_6 := \{f \in V \mid f$ ist eine ungerade Funktion$\}$ ist abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation, also ein Unterraum:
$f, g \in M_6 \Longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f+g)(-x)$,
also $f + g \in M_6$.
$f \in M_6,\ r \in \mathbb{R} \Longrightarrow (rf)(x) = rf(x) = r(-f(-x)) = -rf(-x) = -(rf)(-x)$,
also $rf \in M_6$.

Aufgabe 27

(a) Hyperebenen des ${\mathbb{Z}_2}^3$:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_1 = 0\} &&= \{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}\\
H_2 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_2 = 0\} &&= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\}\\
H_3 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_3 = 0\} &&= \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}\\
H_4 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\} &&= \{(0,0,0),(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}\\
H_5 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\} &&= \{(0,0,0),(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}\\
H_6 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\} &&= \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)\}\\
H_7 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} &&= \{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}
\end{aligned}$$

Skizzen

(b) Jede Hyperebene H_a des ${\mathbb{Z}_2}^k$ ist durch eine Gleichung der Form $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$ bestimmt, wobei $a = (a_1, \ldots, a_k) \in {\mathbb{Z}_2}^k \setminus \{0\}$ ist (Vorlesung).

Ist $(a_1, \ldots, a_k) \neq (b_1, \ldots, b_k)$, etwa $0 = a_i \neq b_i = 1$,
so ist $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in H_a \setminus H_b$, also $H_a \neq H_b$.

Also gibt es genau so viele verschiedene Hyperebenen, wie es von 0 verschiedene Elemente in ${\mathbb{Z}_2}^k$ gibt, also $2^k - 1$.

Aufgabe 28

(a) Benötigte Rohstoffmengen: $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 17 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 106 \end{pmatrix}$.

(b) Lösen des LGS $\begin{matrix} 2g_1 & & +g_3 = 45 \\ g_1 & +3g_2 & +g_3 = 30 \end{matrix}$ ergibt $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+r \\ r \\ 15-6r \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$,

Beachtet man $g_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, also $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\begin{matrix} 15+r \geq 0 \\ r \geq 0 \\ 15-6r \geq 0 \end{matrix}$,

so ist $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$, Lösungsmenge.

Aufgabe 29

Im folgenden sei $u_i \in U_i$:

$'' \subseteq ''$ $u_1 + u_2 \in (U_1 + U_2) \cap U_3, u_1 \in U_1 \subseteq U_3 \Longrightarrow u_2 \in U_2 \cap U_3$
$\Longrightarrow u_1 + u_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

$'' \supseteq ''$ $u_1 + u \in U_1 + (U_2 \cap U_3), u \in U_2 \cap U_3 \Longrightarrow u_1, u \in U_1 + U_2,\ u_1, u \in U_3$
$\Longrightarrow u_1 + u \in (U_1 + U_2) \cap U_3$, die Unterräume sind also gleich.

Aufgabe 30*

(a) Man löst das homogene LGS und erhält etwa (andere Lösungen sind auch möglich!):

$$C := \{a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2{}^7 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}.$$

(b) Man sieht $\omega(C) \leq 3$, da es ein Element $\neq 0$ in C gibt mit genau drei Komponenten $= 1$.

$\omega(x) = 0$ gilt genau für $x = 0$, also ist $\omega(C) = \{\omega(x) \mid x \in C,\ x \neq 0\} \geq 1$.

Wäre $\omega(C) = 2$, dann müßte es zwei Spalten $a_i \neq a_j$ von A geben mit $a_i + a_j = 0$, also zwei gleiche Spalten $a_i = a_j$, was offensichtlich falsch ist.

Wäre $\omega(C) = 1$, dann müßte die Nullspalte $a_i = 0$ zu A gehören, auch das offensichtlich falsch.

Also ist $\omega(C) = 3$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

28. November 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 31

(a) M_1 ist linear abhängig:
$-(1,1,3,1)+(2,0,-1,1)+3(1,0,1,0)=(4,-1,-1,0)$, also $\dim < M_1 > \leq 3$.
Also ist M_1 kein Erzeugendensystem und folglich keine Basis von $V = \mathbb{R}^4$.
$x_1(1,1,3,1)+x_2(2,0,-1,1)+x_3(1,0,1,0)=(0,0,0,0) \Longrightarrow x_1=x_2=x_3=0$.
Also ist $\{(1,1,3,1),(2,0,-1,1),(1,0,1,0)\}$ linear unabhängig und somit eine maximal linear unabhängige Teilmenge von M_1.

(b) M_2 ist linear abhängig, da $2t^2-t \in < t,t^2 >$.
Folglich ist M_2 weder Erzeugendensystem noch Basis von $C(\mathbb{R})$.
$\{t,t^2\}$ ist linear unabhängig und eine maximal linear unabhängige Teilmenge von M_2, da $at+bt^2=0$ für alle $t\in\mathbb{R} \Longrightarrow a=b=0$.

M_3 ist linear unabhängig, da $< M_3 > = < \{1,t,t^2\} >$, aber weder Erzeugendensystem noch Basis von $C(\mathbb{R})$, z.B. ist $t^3 \in C(\mathbb{R})$, aber $t^3 \notin < M_3 >$.

(c) M_4 ist natürlich linear abhängig und folglich keine Basis von $V = {\mathbb{Z}_2}^4$.
$\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$ ist linear unabhängig (leicht nachzuprüfen) und eine maximal linear unabhängige Teilmenge von ${\mathbb{Z}_2}^4$, da

$$\begin{aligned}(1,1,0,0)+(1,0,1,0) &= (0,1,1,0),\\ (1,1,0,0)+(1,0,0,1) &= (0,1,0,1),\\ (1,0,1,0)+(1,0,0,1) &= (0,0,1,1).\end{aligned}$$

Aufgabe 32

(a) Sei $a:=(3,0,0,-2)$, $b:=(0,3,-2,0)$, $c:=(r,0,0,s)$, $d:=(0,r,s,0)$, also $S=\{a,b,c,d\}$.
$x_1a+x_2b+x_3c+x_4d=0$. Aufgabe 34 (a) liefert:

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & & +rx_3 & & =0\\ & 3x_2 & & +rx_4 & =0\\ & -2x_2 & & +sx_4 & =0\\ -2x_1 & & +sx_3 & & =0\end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & & +rx_3 & & =0\\ & 3x_2 & & +rx_4 & =0\\ & & (2r+3s)x_3 & & =0\\ & & & (2r+3s)x_4 & =0\end{array}$$

Für $2r+3s\neq 0$ folgt daraus $x_3=x_4=0$ und weiter $x_1=x_2=0$. In diesem Fall ist S linear unabhängig.
Ist $2r+3s=0$, so hat das LGS nichttriviale Lösungen und S ist linear abhängig.

(b) Gilt $2r+3s=0$, so gilt $s=-\frac{2}{3}r$, also $c=\frac{r}{3}a$, $d=\frac{r}{3}b$. Es kann also keine 3–elementige maximal linear unabhängige Teilmenge von S geben, da jede 3–elementige Teilmenge a und c oder aber b und d enthält, also linear abhängig ist.

Aufgabe 33

(a) Ist $W\subseteq U$, so gilt $\dim(W\cap U)=\dim W > \dim W-1$.

Ist $W \not\subseteq U$, etwa $w_0\in W\setminus U$, so ist $< U,\{w_0\} > = V$, da $\dim U = n-1$ (Ergänzungslemma). Sei $\{w_1,\dots,w_{k-1}\}$ Basis von $W\cap U$ und sei $\{w_1,\dots,w_{k-1},u_k,\dots,u_{n-1}\}$ Basis von U (Basisergänzungssatz), dann ist $\{w_0,w_1,\dots,w_{k-1},u_k,\dots,u_{n-1}\}$ Basis von V und folglich $\{w_0,w_1,\dots,w_{k-1}\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d.h.Basis von W.
Aus $k=\dim W$ und $k-1=\dim(W\cap U)$ folgt aber $\dim(W\cap U)\geq \dim W-1$.

(b) Beweis durch vollständige Induktion über k: Für $k = 1$ gilt die Behauptung unmittelbar. Ist $\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq n - k$, dann gilt wegen (a) und nach Induktionsvoraussetzung $\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k \cap U_{k+1}) \geq \dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) - 1 \geq n - k - 1 = n - (k+1)$.

(c) Sei $(w_1, \ldots, w_k)$ Basis für W und $B := (w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_{n-k})$ Basis für V. Setze $U_j :=< B \setminus \{u_j\} >$, für $j = 1, \ldots, n-k$, so gilt $U_j < V$ und $\dim U_j = n - 1$.

Ist $v \in V$, etwa $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i w_i + \sum\limits_{j=1}^{n-k} y_j u_j$, dann gilt

$v \in \bigcap\limits_{j=1}^{n-k} U_j \iff y_j = 0$ für $j = 1, \ldots, n-k \iff v \in W$. Also $\bigcap\limits_{j=1}^{n-k} U_j = W$.

Aufgabe 34

(a) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ und x Lösung des LGS zu A: $\quad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$, für $i = 1, \ldots, m$.

Sei $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{ZR}\,(B) = \mathrm{ZR}\,(A)$, etwa $b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i a_{ij}$, für $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \Big) x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot 0 = 0.$$

Da $B \subseteq \mathrm{ZR}\,(B)$ ist x also auch Lösung des homogenen LGS zu B.
Vertauschung von A und B ergibt die Behauptung.

(b) Sind $a_1, \ldots, a_n$ lin. unabh., so gilt $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\sum\limits_{j=i}^{n} y_j \Big) a_i \Longrightarrow \sum\limits_{j=i}^{n} y_j = 0$, für $i = 1, \ldots, n$
$\Longrightarrow y_n = y_{n-1} = \ldots = y_1 = 0$, also sind auch $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig.
Sind $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig, so schließt man ähnlich, dass $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 35*

(a) $(x_n), (y_n) \in F$, $r \in \mathbb{R} \Longrightarrow (x_n) + (y_n) \in F$ und $r(x_n) \in F$, also $F \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

(b) Durch Vorgabe von x_0, x_1 ist die Folge (x_n) durch die Rekursionsvorschrift eindeutig bestimmt. Da die Folgen (a_n) und (b_n) offensichtlich linear unabhängig sind und wegen $(x_n) = x_0(a_n) + x_1(b_n)$ den VR F erzeugen, ist $\{(a_n), (b_n)\}$ eine Basis von F.

(c) $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n,\ q \neq 0 \iff q^2 = q + 1 \iff q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (goldener Schnitt!)
Sei (f_n) definiert durch $f_0 := 1,\ f_1 := q_1$ und (g_n) durch $g_0 := 1,\ g_1 := q_2$,
dann ist $f_n = f_1^n = q_1^n$ und $g_n = g_1^n = q_2^n$.
(f_n) und (g_n) sind geometrische Folgen aus F, linear unabhängig und bilden folglich eine Basis des zweidimensionalen Raums F.

(d) $b_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{f_n - g_n}{\sqrt{5}}$ beweist man durch vollständige Induktion:
Für $n = 0, 1$ stimmt die Aussage und der Induktionsschluß folgt aus
$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n = \frac{f_{n+1} - g_{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{f_n - g_n}{\sqrt{5}} = \frac{f_{n+2} - g_{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{q_1^{n+2} - q_2^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

5. Dezember 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 36

(a) $-(1,0,1) + 2(2,1,1) = (3,2,1) \Longrightarrow W^* =< (2,1,1) >$.
(b) $U + W = \mathbb{R}^4$, also $W^* = W$.
(c) $U \cap W =< (0,1,1) >$, also $W^* =< (1,1,0) >$.

Aufgabe 37

(a) $f, g \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$, $\operatorname{Rang} f$, $\operatorname{Rang} g < \infty$

$$\Longrightarrow (f+g)(V) = \{(f+g)(x) \mid x \in V\} = \{f(x) + g(x) \mid x \in V\}$$
$$\subseteq \{f(x) + g(y) \mid x, y \in V\} = f(V) + g(V)$$

$\Longrightarrow \operatorname{Rang}(f+g) \leq \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang} g$.

$\operatorname{Rang} f = \operatorname{Rang}(-f) \Longrightarrow \operatorname{Rang}(f-g) \leq \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang} g \Longrightarrow$
$\operatorname{Rang}(f-g) - \operatorname{Rang}(g) \leq \operatorname{Rang}((f-g)) + g)$, also $\operatorname{Rang}(f) - \operatorname{Rang}(g) \leq \operatorname{Rang}(f+g)$.

Analog erhält man $\operatorname{Rang}(g) - \operatorname{Rang}(f) \leq \operatorname{Rang}(f+g)$.

$\Longrightarrow \quad |\operatorname{Rang}(f) - \operatorname{Rang}(g)| \leq \operatorname{Rang}(f+g)$.

(b) $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$, $g \in \operatorname{Hom}(V,W)$, $\operatorname{Rang} f$ oder $\operatorname{Rang} g < \infty$, dann ist $\operatorname{Rang}(g \circ f) < \infty$ (klar).

$\operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \operatorname{Rang} f$, da $\dim g(f(U)) \leq \dim f(U) = \operatorname{Rang} f$.
$\operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \operatorname{Rang} g$, da $\dim g(f(U)) \leq \dim g(V) = \operatorname{Rang} g$.

$\Longrightarrow \quad \operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{Rang} f, \operatorname{Rang} g\}$.

$\dim V < \infty \Longrightarrow \operatorname{Rang} f, \operatorname{Rang} g < \infty$ (klar).
$\dim \operatorname{Kern} g = \dim V - \operatorname{Rang} g$
$$\geq \dim \operatorname{Kern} g|_{f(U)} = \dim f(U) - \operatorname{Rang} g|_{f(U)} = \operatorname{Rang} f - \operatorname{Rang} g \circ f.$$

$\Longrightarrow \quad \operatorname{Rang} f + \operatorname{Rang} g - \dim V \leq \operatorname{Rang} g \circ f$.

Aufgabe 38

(a) Der Vektorraum V ist isomorph zum K^n und $|V| = |K^n| = k^n$.
Wir bestimmen zunächst die Anzahl $G(n)$ der *geordneten Basen* des K^n:

Es sei $G(i)$ die Anzahl der linear unabhängigen i–Tupel von Vektoren aus K^n. Dann ist $G(i+1) = \big|\{(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}) \mid x_1, \ldots, x_i \text{ lin. unabh.}, x_{i+1} \in K^n \setminus < x_1, \ldots, x_i >\}\big|$.
Wegen $|K^n| = k^n$ und $|K^n \setminus < x_1, \ldots, x_i > | = k^n - k^i$ gilt $G(i+1) = G(i)(k^n - k^i)$.

Aus $G(1) = k^n - 1$ folgt durch Induktion $G(i) = \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(k^n - k^j)$ insbesondere erhält man

für die Anzahl der *geordneten Basen* des K^n : $G(n) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(k^n - k^j)$.

Für die Anzahl der Basen erhält man also $A(n) = \dfrac{1}{n!}G(n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(k^n - k^j)$.

(b) Seien $k=2$, $n=3$. Man erhält $A(3)=\frac{1}{6}(8-1)(8-2)(8-4)=28$ Basen des ${\mathbb{Z}_2}^3$.
${\mathbb{Z}_2}^3$ hat 7 vom Nullvektor verschiedene Vektoren, also gibt es $\binom{7}{3}=35$ dreielementige Teilmengen von ${\mathbb{Z}_2}^3\setminus\{0\}$, darunter 7 Teilmengen, die keine Basen sind (sondern die 7 Hyperebenen erzeugen, siehe Aufgabe 27):

$$\begin{array}{c}
\{(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}\\
\{(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\}\\
\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}\\
\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}\\
\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}\\
\{(0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)\}\\
\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}
\end{array}$$

Die übrigen 28 dreielement. Teilmengen sind in keiner Hyperebene enthalten, also Basen.

Aufgabe 39

(a) $\mathrm{Spur}\,(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{Spur}\,(A)+\mathrm{Spur}\,(B)$,
$\mathrm{Spur}\,(rA)=\sum_{i=1}^{n}ra_{ii}=r\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=r\cdot\mathrm{Spur}\,(A)$, also ist Spur linear.

(b) $\mathrm{Spur}\,(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\mathrm{Spur}\,(BA)$.
$\mathrm{Spur}\,(X^{-1}AX)=\mathrm{Spur}\,((X^{-1}A)X)=\mathrm{Spur}\,(X(X^{-1}A))=\mathrm{Spur}\,(XX^{-1}A)=\mathrm{Spur}\,(A)$.

Aufgabe 40*

Mit geeigneten Matrizen $X_{kl}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&0&&1&&\\&&&&\ddots&&&\\&&&1&&0&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}$ und $Y_{kl}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&0&&-1&&\\&&&&\ddots&&&\\&&&1&&0&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}$

und wegen $f(X^{-1}AX)=f(A)$ und der K–Linearität von f zeigt man (siehe SÜ):

$f(\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix})=\ldots=f(\begin{pmatrix}0&&&\\&\ddots&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix})=:c.$

$f(\begin{pmatrix}0&\cdots&&1\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}0&\cdots&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\1&&&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}0&\cdots&&\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\-1&&&0\end{pmatrix})=0$, da $\mathrm{char}\,K\neq 2$.

Wegen der K–Linearität von f erhält man weiter:

$$f((a_{ij}))=f(\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix})\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=c\cdot\mathrm{Spur}\,((a_{ij})).$$

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

12. Dezember 2002

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 41

Man sieht: $(2,1,0)^t$, $(1,1,1)^t$ sind linear unabhängig und $2(2,1,0)^t + 3(1,1,1)^t = (7,5,3)^t$.
$\Longrightarrow \underline{\dim U = 2}$ und Basis von $U = \underline{\{(2,1,0)^t,\ (1,1,1)^t\}} =: \{u_1, u_2\}$.
Man sieht (oder berechnet): $(2,2,-1)^t$, $(0,1,1)^t$ sind linear unabhängig und
$-(2,2,-1)^t + (0,1,1)^t = (-2,-1,2)^t$ und $-5(2,2,-1)^t - 3(0,1,1)^t = (-10,-13,2)^t$.
$\Longrightarrow \underline{\dim W = 2}$ und Basis von $W = \underline{\{(2,2,-1)^t,\ (0,1,1)^t\}} =: \{w_1, w_2\}$.

u_1	u_2	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	Regie	
1	0	0	0	2	1	0		
0	1	0	0	1	1	$\boxed{1}$	1	−1
0	0	1	0	2	2	−1	1	
0	0	0	1	0	1	1		1
1	0	0	0	2	$\boxed{1}$	0	3	
0	1	1	0	3	3	0	−1	
0	−1	0	1	−1	0	0		
3	−1	−1	0	$\boxed{3}$	0	0	1	
0	−1	0	1	−1	0	0	3	
3	−4	−1	3	0	0	0		

Man sieht an den markierten Gleichungen:
$e_1, e_2, e_3 \in \, < u_1, u_2, w_1, w_2 >$,
also $U + W = \mathbb{R}^3$, $\underline{\dim(U+W) = 3}$ und
Basis von $U + W = \underline{\{e_1, e_2, e_3\}}$.

Aus dem Dim-Satz für Summen von UR folgt: $\underline{\dim(U \cap W) = 2}$.

Man sieht an der letzten Gleichung:
$3u_1 - 4u_2 = w_1 - 3w_2 = (2,-1,-4)^t$,
also Basis von $U \cap W = \underline{\{(2,-1,-4)^t\}}$
$= \{3u_1 - 4u_2\} = \{w_1 - 3w_2\}$.

Aufgabe 42

(a) Man sieht oder berechnet Bild $f = < (1,0,-1)^t, (0,1,-2)^t >$ und
berechnet Kern $f = < (-1,1,1,0)^t, (-1,-1,0,1)^t >$.

(b) Man berechnet $\overset{-1}{f}\,((2,-1,0)^t) = (1,-2,0,1) +$ Kern f und $\overset{-1}{f}\,((1,1,-2)^t) = \emptyset$.

(c) $B = M_{BE_4}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = M_{CE_3}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und

(d) $C^{-1} = M_{E_3C}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Man sieht $M_{BC}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und verifiziert:

$$M_{BC}(f) = M_{E_3C}(\mathrm{id}) M_{E_4E_3}(f) M_{BE_4}(\mathrm{id}) = C^{-1} M_{E_4E_3}(f) B = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente $a_{ii} = 0$ sind und sei $f := f_A :\ K^n \to K^n$ mit $f(x) = f_A(x) = Ax$.

$a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$ (1. Spalte $A = 0$) $\Longrightarrow f(e_1) = Ae_1 = 0$, also $f(<e_1>) = \{0\}$.
Ebenso $f(<e_1, e_2>) \subseteq \, <e_1>$, also $f^2(<e_1, e_2>) = \{0\}$ und
$f(<e_1, \ldots, e_n>) \subseteq \, <e_1, \ldots, e_{n-1}>$. Also $f(K^n) \subseteq \, <e_1, \ldots, e_{n-1}>$ und folglich
$f^n(K^n) \subseteq f^{n-1}(<e_1, \ldots, e_{n-1}> \subseteq \ldots \subseteq f(<e_1>) = \{0\}$.

Also gilt $f^n = {f_A}^n = 0$ und folglich $A^n = M(f)^n = M(f^n) = 0$.

Damit natürlich auch $A^k = 0$ für alle $k \geq n$.

Aufgabe 44

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sei Basis von V über K.

(a) Ist $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j b_j \in V$ und $f(b_j) \in K$ für $j = 1, \ldots, n$ gegeben, so ist

$f : V \to K$ mit $f(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f(b_j)$ ein Homomorphismus.

Also gilt für $(i = 1, \ldots, n)$: $f_i \in \operatorname{Hom}_K(V)$ und f_i sind durch ihre Werte auf B eindeutig bestimmt.

(b) Ist $f \in \operatorname{Hom}_K(V)$ und $f(b_j) =: y_j$ so ist $f = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$.

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist also ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Hom}_K(V)$.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} y_i f_i(b_j) = 0, \text{ für } j = 1, \ldots, n \iff \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{ij} = 0, \text{ für } j = 1, \ldots, n$$
$$\iff y_i = 0, \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist also auch linear unabhängig, also eine Basis von $\operatorname{Hom}_K(V)$.

(c) $0 \neq v = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j b_j$, etwa $v_i \neq 0 \Longrightarrow f_i(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j f_i(b_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \delta_{ij} = v_i \neq 0$.

Aufgabe 45*

(a) $\operatorname{Spur}(A + B) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Spur}(A) + \operatorname{Spur}(B)$,

$\operatorname{Spur}(rA) = \sum\limits_{i=1}^{n} r a_{ii} = r \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = r \cdot \operatorname{Spur}(A)$, also ist Spur linear.

(b) $\operatorname{Spur}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \operatorname{Spur}(BA)$.

$\operatorname{Spur}(X^{-1}AX) = \operatorname{Spur}((X^{-1}A)X) = \operatorname{Spur}(X(X^{-1}A)) = \operatorname{Spur}(XX^{-1}A) = \operatorname{Spur}(A)$.

Mit geeign. Matrizen $X_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ und $Y_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & -1 & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

und wegen $f(X^{-1}AX) = f(A)$ und der K–Linearität von f zeigt man (siehe SÜ):

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\right) = \ldots = f\left(\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right) =: c.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & 1 & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & -1 & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) = 0, \text{ da } \operatorname{char} K \neq 2.$$

Wegen der K–Linearität von f erhält man weiter:

$$f((a_{ij})) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =: c \cdot \operatorname{Spur}((a_{ij})).$$

Lösung der Weihnachtsaufgabe 46*

Bei der Vorbereitung des internationalen vorweihnachtlichen Treffens der Weihnachtsmänner und Lichterfrauen wurde diskutiert, wie man die Übersicht über den Keksverbrauch behalten und die Einhaltung der Regeln feststellen könne. Eine einfache Strichliste erschien zu wenig aussagekräftig. Man einigte sich auf eine modifizierte Strichliste, in der nicht nur das Probieren einer Sorte mit einer 1, sondern auch das Nichtprobieren mit einer 0 festzuhalten sei. Man beschloss, eine PrüferInnen–Matrix $P = (p_{ij})$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ anzulegen mit

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls Prüfer Nummer } i \text{ die Kekssorte } j \text{ probiert,} \\ 0 & \text{, falls Prüfer Nummer } i \text{ die Kekssorte } j \text{ nicht probiert.} \end{cases}$$

Ein Weihnachtsmann mit einer – selbst für seinen Berufsstand – ziemlich roten Nase gab zu bedenken, dass infolge des bei der Verkostungsaktion gereichten Glühweins sich der eine oder andere kleine Fehler einschleichen könne und ohne Glühwein ... (ein Gedanke, der ihm gar nicht zu gefallen schien). Er brach ab, als eine Lichterfrau aus der himmlischen Codierungszentrale bemerkte, dass man die Einhaltung der beiden Regeln leicht feststellen könne:

$$\text{Regel 1:} \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}^2 = a \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

$$\text{Regel 2:} \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij} p_{kj} = b \text{ für } j \neq k, \ j, k = 1, \ldots, n.$$

$$\text{Kurz:} \quad P^t P = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathrm{IR}).$$

Als der rotnasige Weihnachtsmann fragte, ob die Veranstaltung wiederholt würde, falls ein Fehler festgestellt würde (ein Gedanke, der ihm sehr zu gefallen schien), deutete die Lichterfrau an, dass man mit dem Verfahren kleine Fehler nicht nur erkennen, sondern auch korrigieren könne, genaueres könne sie aber erst nach einem Speziallehrgang sagen, auf den sie übrigens sehr gespannt sei.

Einem Weihnachtsmann liess die (n, n)–Matrix $P^t P$ keine Ruhe. Natürlich ist sie symmetrisch dachte er, aber welchen Rang hat sie? Er subtrahierte die letzte Spalte von allen übrigen und hatte dann die Idee, zur letzten Zeile alle übrigen zu addieren. Das Ergebnis elektrisierte ihn: Er erhielt eine obere Dreiecksmatrix, der er sofort ansah, dass unter der gegebenen Voraussetzung $b < a$ ihr Rang gleich n ist. Er platzte heraus "hoffentlich kommen genug" und fügte entschuldigend hinzu, dass die Verkostungsaktion nur gelingen könne, wenn mindestens soviele Lichterfrauen und Weihnachtsmänner am Treffen teilnehmen wie Kekssorten zum Probieren angeboten werden, also $m \geq n$ sei. Zur Begründung murmelte er etwas von Zeilenrang gleich Spaltenrang und dass sich der Rang einer Matrix bei der Matrizenmultiplikation nicht erhöhen kann, folglich P den Rang n haben müsse, wenn $P^t P$ den Rang n hat – mit der erwähnten Konsequenz.

Obwohl nicht alle diesen Bemerkungen folgen konnten, sahen etliche die Verkostungsaktion gefährdet. Die Lichterfrau aus der himmlischen Codierungszentrale dagegen schien nicht überrascht und mit der Bemerkung, die Veranstaltung sei sicher attraktiv genug – und dabei zwinkerte sie dem rotnasigen Weihnachtsmann zu – dass genügend Teilnehmer kommen würden, zerstreute sie die Bedenken und leitete geschickt zum gemütlichen Teil des Abends über.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

9. Januar 2003

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 47

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau = -1$, da 9 Fehlstände oder (b) ungerade Anzahl der Transpositionen!

(b) $\sigma = (143)(26) = (14)(43)(26)$ (Stundenübung) und $\tau = (12)(34)(56)$.

(c) $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (16524)$ und $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (13256)$.

$(\sigma \circ \tau)^{-1} = (42561) = (14256)$ und $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma)^{-1} = (65231) = (16523)$.

$\operatorname{ord}\sigma = \operatorname{kgV}(3,2) = 6$, also $\sigma^{-25} = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (134)(26)$.

Aufgabe 48

(a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3-2 & 9-4 \\ 0 & 5-2 & 25-4 \end{vmatrix} = (3-2)(5-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3+2 \\ 0 & 1 & 5+2 \end{vmatrix} = (3-2)(5-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3+2 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{vmatrix}$$

$= \underline{(3-2)(5-2)(5-3)}$.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \implies \varphi(w_1, w_2, w_3) = -2\varphi(v_1, v_2, v_3) = -6$.

Aufgabe 49

Zu zeigen: $\mathrm{id} \neq \sigma \in S_n \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = 0$.

Ann.: $\sigma \neq \mathrm{id}$ und $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \neq 0$. Dann ist $\sigma(i) \leq i$ für $i = 1, \ldots, n$ und
da $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist, existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(j) < j$.
Dann folgt aber $1 \leq \sigma(1), \ldots, \sigma(j) \leq j-1$ im Widerspruch zur Bijektivität von σ.
Analog zeigt man die entsprechende Aussage für obere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 50

Subtrahiert man die letzte Spalte von den übrigen und addiert anschließend die ersten $n-1$ Zeilen zur letzten Zeile, erhält man eine obere Dreiecksmatrix (siehe Aufgabe 49):

$$\det f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & x+n-1 \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

1 und $1-n$ sind die einzigen Elemente von K, für die $\det f(x) = 0$ ist
und $f(0) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Aufgabe 51*

(a) Die Bilinearität von φ folgt direkt aus den Rechenregeln für das Matrizenprodukt.

Zu zeigen:

φ ist genau dann Volumenfunktion, wenn A ungleich der Nullmatrix und schiefsymmetrisch, also $0 \neq A^t = -A$ ist!

Ist φ Volumenfunktion, so ist $A \neq 0$ und es gilt
$x^tAy = (x^tAy)^t = y^tA^tx$ und $y^tAx = -x^tAy = x^t(-A)y$, also $x^tAy = x^t(-A)y$ für alle $x, y \in V$.
Setzt man für x, y nun die Basisvektoren e_1, e_2 ein, folgt $A^t = -A$.
Also ist $0 \neq A^t = -A$.

Ist umgekehrt $0 \neq A^t = -A$, so gilt für linear abhängige x, y, etwa für $y = \lambda x$:
$x^tAy = x^tA\lambda x = \lambda x^tA^tx = -\lambda x^tAx = -x^tA\lambda x = -x^tAy$ also $x^tAy = 0$.
Und aus $0 \neq A^t = -A \iff a_{11} = a_{22} = 0,\ a_{12} = -a_{21} \neq 0$ folgt $e_1^tAe_2 = a_{12} \neq 0$.
Also ist φ eine Volumenfunktion.

(b) T (wie in Aufgabe 12 als Gruppe von Permutationen der vier Tetraederecken geschrieben) ist Untergruppe von S_4 und besteht nur aus geraden Permutationen (3-er Zyklen sind gerade!), d.h. $T \subseteq A_4$.
Aus $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12 = |T|$ folgt $A_4 = T$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

16. Januar 2003

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 52

(a) Mittels elementarer Umformungen bzw. Entwicklung erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5! = 120. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = 0.$$

(b) Mittels elementarer Umformungen und Entwicklung nach der ersten Spalte erhält man:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 6 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \lambda^2 & 6-5\lambda \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff \lambda \in \{1, -2, 3\}.$$

Aufgabe 53

Seien $A, A' \in M_n(K)$.

(a) A, A' ähnlich $\iff A' = S^{-1}AS$ für ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, d.h. $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ Basis des K^n. Ist B eine Basis des K^n, so gilt $M_{BB}(\varphi_A) = B^{-1}AB$. Also sind die Aussagen äquivalent.

(b) $A = E^{-1}AE$, also ist die Ähnlichkeit reflexiv,
$A' = S^{-1}AS \implies A = SA'S^{-1} = T^{-1}A'T$ mit $T := S^{-1}$, also ist die Ähnlichkeit symmetrisch,
$A' = S^{-1}AS$ und $A'' = T^{-1}A'T \implies A'' = (ST)^{-1}A(ST)$, also ist die Ähnlichkeit transitiv und folglich eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$.

(c) $A' = S^{-1}AS \implies A' = TAS$ mit $T = S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$, also A äquivalent A'.

(d) $A' = S^{-1}AS \implies |A'| = |S^{-1}| \cdot |A| \cdot |S| = |A|$.

(e) Die Umkehrungen gelten i.A. nicht: Für $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:
$|A| = |A'|$ und $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A'$, also A äquivalent A',
aber $S^{-1}AS = A \neq A'$ für alle $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 54

$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, man erhält $|A| = \ldots = -3$ und

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t.$$

Also $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \operatorname{adj} A = -\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(b) *Cramer*sche Regel: $AX = E$, z.B. LGS $Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ergibt:

$$x_{11} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3},\ x_{21} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3},\ x_{31} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

$Ax = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $Ax = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ analog (gleicher Aufwand wie (a)).

(c) *Gauß*–Verfahren: Nach kurzer Rechnung erhält man $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 55

(a) $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \implies A^2 = E$, also $A^{-1} = A$ und $f^2 = \mathrm{id}$.
Wegen $f^2 = \mathrm{id}$ hat f höchstens die Eigenwerte 1 und -1, siehe (c).

(b) $\operatorname{Bild} f = \mathbb{R}^3$ und $\operatorname{Kern} f = \{0\}$, da $f = f^{-1}$ ein Isomorphismus ist.

(c) $\operatorname{Eig}(f,1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = x\} = \ldots = \{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ (Ebene),
$\operatorname{Eig}(f,-1) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = -x\} = \ldots = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = r(1,-1,2)^t,\ r \in \mathbb{R}\}$ (Gerade).

(d) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist Basis aus Eigenvektoren.

(e) $M_B(f) = B^{-1}AB = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, zu A ähnliche Diagonalmatrix,

(f) f ist die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

Aufgabe 56*

(a) Beweis durch vollständige Induktion über n, siehe Wille, Rep. Lin. Alg. I, Seite 118.

(b) Anwendung der *Vandermonde*schen Determinante, siehe Wille, Rep. Lin. Alg. I, Seite 201.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Dr. Merziger

23. Januar 2003

Lineare Algebra I

Lösungshinweise zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 57

(a) $\chi_A(X) = \ldots = X^3 + 2X^2 - 5X - 6 = 0 \implies \text{Spek}\,(A) = \{-1, 2, -3\}$.
Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, gibt es eine Basis S aus Eigenvektoren.
A ist diagonalisierbar und es gilt: $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Die LGS $(\lambda_i E - A)x = 0$, mit $\lambda_i \in \text{Spek}\,(A)$ ergeben die Eigenräume
$\text{Eig}\,(A,-1) = <\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}>$, $\text{Eig}\,(A,2) = <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Eig}\,(A,-3) = <\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung: $\mathbb{R}^3 = <\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}> \oplus <\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}> \oplus <\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}>$.

(b) $\chi_A(X) = X^3 - 9X^2 - 81X + 729 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -9,\ \lambda_{2,3} = 9$ und $\text{Spek}\,(A) = \{-9, 9\}$.

Durch Lösen der entsprechenden LGS $(\lambda_i E - A)x = 0$ erhält man die Eigenräume:

$\text{Eig}\,(A,-9) = <\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}>$ und $\text{Eig}\,(A,9) = <\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}>$

Also $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ mit $S^{-1} = \frac{1}{9}S$ (warum?) und $S^{-1}\,A\,S = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Spektralzerlegung: $\mathbb{R}^3 = <\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}> \oplus <\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}>$.

(c) $\chi_A(X) = (X-2)^2(X+3) = 0 \implies \text{Spek}\,(A) = \{2, -3\}$.
Man erhält $\dim\,(\text{Eig}\,(A,2)) = 1 < 2$ (geom. Vielfachheit $<$ algebr. Vielfachheit), also ist A nicht diagonalisierbar und es gibt keine Spektralzerlegung.

Aufgabe 58

π Projektion, also $\text{Spek}\,(\pi) = \{0, 1\}$. Wähle etwa $B := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.

Dann ist $M_B(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $M_E(\pi) = BM_B(\pi)B^{-1} = \ldots = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 59

(a) $\chi_A(X) = |XE - A| = |(XE-A)^t| = |XE - A^t| = \chi_{A^t}(X)$, also $\operatorname{Spek}(A) = \operatorname{Spek}(A^t)$.

(b) Nein! Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\operatorname{Spek}(A) = \operatorname{Spek}(A^t) = \{1\} \text{ aber } \operatorname{Eig}(A,1) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \neq \operatorname{Eig}(A^t,1) =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$

(c) Folgt aus Aufgabe 61* (b) oder:
0 EW von $AB \iff 0 = |AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA| \iff$ 0 EW von BA.
Ist $\lambda \neq 0$ EW von AB mit EW $x \neq 0$, (dann ist $Bx \neq 0$, da sonst $\lambda = 0$ wäre).
$\Longrightarrow ABx = \lambda x \Longrightarrow BA(Bx) = \lambda(Bx)$, also Bx EV von BA zum EW λ.

(d) Nein! $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von AB aber nicht von BA.

Aufgabe 60

Sei $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \neq 0$ Eigenvektor zu λ, also sind nicht alle $a_i = 0$, da $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig sind. Dann gilt:
$f(x) = \lambda x = \sum_{i=1}^{k} \lambda a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i x_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) a_i x_i = 0 \Longrightarrow (\lambda - \lambda_i) a_i = 0 \forall i$
$\Longrightarrow \exists \lambda_j$ mit $\lambda = \lambda_j$ und für alle $i \neq j$ gilt mit $\lambda \neq \lambda_j$ gilt $a_i = 0$, also $x \in < x_j >$.
Die Umkehrung ist klar!

Aufgabe 61*

(a) Ist A diagonalisierbar, etwa $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) =: D$,
so gilt $\chi_D(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ und
$$\chi_A(A) = \chi_D(A) = \chi_D(SDS^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} (SDS^{-1} - a_i E) = S\Big(\prod_{i=1}^{n} (D - a_i E)\Big) S^{-1} = 0.$$

(b) Seien $A, B \in M_n(K)$ und zunächst
(i) $B = E_r$ für ein $1 \leq r \leq 1$:
Dann ist $\chi_{AB} = \chi_{AE_r} = \chi_{E_r A} = \chi_{BA}$ (Determinante von Blockmatrizen!)
(ii) Ist $r := \operatorname{rang} B$, also B äquivalent E_r etwa $B = PE_rQ$ mit $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann gilt wegen (i) und weil ähnliche Matrizen gleiches charakteristisches Polynom haben:
$\chi_{AB} = \chi_{APE_rQ} = \chi_{QAPE_rQQ^{-1}} = \chi_{E_rQAP} = \chi_{PE_rQAPP^{-1}} = \chi_{BA}$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

25. Januar 2003

Lineare Algebra 1
Klausur – Lösungshinweise

Aufgabe 1

(a) Aus $\emptyset \neq G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $GG^{-1} \subseteq G$ folgt G ist Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$.

(b) $\varphi: \; G \to \mathbb{R}^*$ mit $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ist surjektiver Hom. mit $\mathrm{Kern}\,\varphi = N$.
Nach dem Homomorphiesatz ist N Normalteiler von G und $G/N \simeq \mathbb{R}^*$.

Aufgabe 2

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2-\lambda & 0 \\ \hline 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda-1} & 1-\lambda & 0 \\ \hline \end{array}$$

Zwei Fälle:

$\lambda = 1 \quad L = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >.$

$\lambda \neq 1 \quad L = < \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >.$

Aufgabe 3

(a) Es ist $(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (b_1, b_2, b_3)$ mit $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, also gilt
$\{b_1, b_2, b_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3 \iff \{a_1, a_2, a_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b)

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & \dots & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

also $a_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3)$.

$a_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3)$

$a_3 = \frac{1}{2}(-b_1 + b_2 + b_3)$

Aufgabe 4

Sei $w := x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-2) = 4 \iff \dots \iff x_1 - x_2 = 2 \iff w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 5

Seien $f_A, f_B: \; K^n \to K^n$ die zugehörigen Endomorphismen. $AB = 0 \iff f_A \circ f_B = 0$
$\iff \mathrm{Bild}\, f_B \subseteq \mathrm{Kern}\, f_A$, also $\dim \mathrm{Bild}\, f_B \leq \dim \mathrm{Kern}\, f_A$,
und mit dem Dimensionssatz: $\dim \mathrm{Kern}\, f_A + \dim \mathrm{Bild}\, f_A = n$
$\Longrightarrow \dim \mathrm{Bild}\, f_B + \dim \mathrm{Bild}\, f_A \leq n \iff \mathrm{Rang}\, B + \mathrm{Rang}\, A \leq n$.

Aufgabe 6

(a,b) $A^2 = \ldots = A \Longrightarrow f^2 = f$. $\chi_A(X) = X^3 - 2X^2 + X$, also $\mathrm{Spek}\,(f) = \{0, 1\}$ mit
(b,c) $\mathrm{Kern}\, f = \mathrm{Eig}\,(f, 0) = < (1, -1, 0) >$ und $\mathrm{Bild}\, f = \mathrm{Eig}\,(f, 1) = < (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.
Die Eigenvektoren sind die Elemente $\neq 0$ der Eigenräume.

(d) Für $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Basis aus Eigenvektoren) erhält man $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.