INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

17. Oktober 2002

Lineare Algebra I

1. Übungsblatt

Abgabe: 24.10.2002 vor der Übung

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

Es seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

(a) die de Morgan'schen Regeln:
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ und $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(b) das Distributivgesetz: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

Es seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

(b) $(A \setminus B) \times (A \setminus C) = (A \times A) \setminus (B \times C)$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Es seien A, B, C Mengen.

Die *symmetrische Differenz* von A und B ist $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Beweisen Sie:

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

(b) $A \triangle \emptyset = A,\ A \triangle A = \emptyset$,

(c) $(A \triangle B) \triangle C = \{x \in A \cup B \cup C \mid$ x liegt in genau einer der Mengen A, B, C oder in allen drei Mengen A, B, C. $\}$

(d) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Aufgabe 4* (*10 Zusatz–Punkte*)

Es sei X eine Menge. Beweisen Sie:

Es gibt keine bijektive Abbildung zwischen X und der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe eine bijektive Abbildung $f: X \to \mathcal{P}(X)$ und betrachten Sie $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 1

Es seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie:

(a) Es gilt: $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

(b) Ist $A \subseteq C$, dann gilt $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$,

Aufgabe Tu 2

Ist A eine Menge, so ist bekanntlich die Potenzmenge $\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$.
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, (b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

24. Oktober 2002

Lineare Algebra I

2. Übungsblatt

Abgabe: 31.10.2002 vor der Übung

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

Seien $f : X \to Y$ eine Funktion, $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Beweisen Sie:

(a) $f(X \setminus A) \supseteq f(X) \setminus f(A)$,

(b) $\overset{-1}{f}(C \cup D) = \overset{-1}{f}(C) \cup \overset{-1}{f}(D)$.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Für $M \subseteq X$ sei die Abbildung $\chi_M : X \to \{0,1\}$ definiert durch $\chi_M(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \notin M \\ 1 & \text{, falls } x \in M \end{cases}$ (charakteristische Funktion von M)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\chi : \mathcal{P}(X) \to \operatorname{Abb}(X, \{0,1\}) = \{0,1\}^X$ definiert durch $\chi(M) := \chi_M$ eine Bijektion ist und geben Sie die Umkehrabbildung χ^{-1} explizit an.

Aufgabe 7 (*12 Punkte*)

Seien $X, Y \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$. Es gilt (Vorlesung)

f injektiv $\iff$ es gibt $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$,
f surjektiv $\iff$ es gibt $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$,
f bijektiv $\iff$ es gibt $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(a) Beweisen Sie die zweite der obigen Aussagen.

(b) Untersuchen Sie folgende Abbildungen f_i $(i = 1,2,3,4)$ auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und geben Sie zugehörige Abbildungen g_i $(i = 1,2,3,4)$ an:

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 2x + 3,$
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = 2x + 3y,$
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f_3(x) = (2x, 3x).$

Aufgabe 8 (*9 Punkte*)

Zwischen den Paaren ganzer Zahlen sei folgende Relation R erklärt:

$$(a,b)\, R\, (c,d) \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

Ist R eine Äquivalenzrelation? Ist R eine Äquivalenzrelation, wenn man nur Paare zuläßt, deren zweite Komponente $\neq 0$ ist?
Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie ggf. die zugehörige Partition an!

Aufgabe 9* (*10 Punkte*)

Sei X eine endliche Menge. Zeigen Sie

(a) $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

(b) Ist $X \neq \emptyset$, dann gilt $|\{M \subseteq X : |M| \text{ gerade }\}| = |\{M \subseteq X : |M| \text{ ungerade }\}|$.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 3

Es seien $f: X \to Y$ eine Funktion und $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Beweisen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, (b) $\overset{-1}{f}(C \cap D) = \overset{-1}{f}(C) \cap \overset{-1}{f}(D)$.

Aufgabe Tu 4

Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

Sind f, g surjektiv (injektiv, bijektiv), so ist auch $g \circ f$ surjektiv (injektiv, bijektiv).

Aufgabe Tu 5

Sei $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gegeben durch $f(a) = 5a - 1$.

Ist f bijektiv? Ist $f|_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bijektiv? Geben Sie ggf. die Umkehrabbildung f^{-1} an.

Aufgabe Tu 6

Seien X, Y endliche Mengen, $|X| = |Y|$ und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f \text{ bijektiv} \iff f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}.$$

Welche der Implikationen gelten nicht, wenn X, Y unendliche Mengen sind? Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe Tu 7

Zeigen Sie: Die Einteilung von $\mathbb{N}$ in die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen und in die Menge der nicht durch 3 teilbaren Zahlen ist eine Partition (Klasseneinteilung) von $\mathbb{N}$.

Geben Sie die zugehörige Äquivalenzrelation an.

Mitarbeiter und Sprechstunden:

Mitarbeiter:	Raum	Sprechstunde
Prof. Dr. Bessenrodt	A 412	Mo 11–12
Dr. Kriesell	G 122	Di 16–17
Dr. Merziger	C 401	Mo, Fr 11–12
Dr. Reifegerste	A 450	Mi 10–11
Dr. Wille	G 108	Mo 13.30–14.30
Frau Annika Dencker	D 424/5	Mo 15–16
Frau Sandra Kühnert	D 424/5	Di 13–14
Frau Imke Land	D 424/5	Di 14–15
Frau Silvia Lüdtke	D 424/5	Mo 15–16
Frau Elke Ostermann	D 424/5	Mi 10–11
Frau Gyde Schmidt	D 424/5	
Herr Jan Watermann	D 424/5	Mi 10–11
Herr Bastian Widensky	D 424/5	Di 11–12

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

31. Oktober 2002

Lineare Algebra I

3. Übungsblatt

Abgabe: 07.11.2002 vor der Übung

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Sei G eine endliche Halbgruppe, in der die Kürzungsregeln gelten.
Zeigen Sie: G ist eine Gruppe.

Aufgabe 11 (*4 Punkte*)

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie:

(a) Ist $x^2 = e$ für alle $x \in G$, dann ist G abelsch.

(b) Ist $(xy)^2 = x^2y^2$ für alle $x, y \in G$, dann ist G abelsch.

Aufgabe 12 (*16 Punkte*)

Sei T die Symmetriegruppe des gleichseitigen Tetraeders im Raum.

(a) Bestimmen Sie die Elemente von T.

(b) Schreiben Sie die Elemente von T als Permutationen der vier Ecken des Tetraeders.

(c) Bestimmen Sie 8 paarweise verschiedene nichttriviale Untergruppen von T und zeigen Sie, dass genau eine davon nicht zyklisch ist.

Aufgabe 13 (*6 Punkte*)

Sei G eine Gruppe, $M \subseteq G$ und $C_G(M) := \{x \in G \mid xm = mx \text{ für alle } m \in M\}$.
$C_G(M)$ heißt *Zentralisator* von M in G.
$Z(G) := C_G(G)$ heißt *Zentrum* von G.

(a) Zeigen Sie: $C_G(M)$ ist eine Untergruppe von G.

(b) Nennen Sie je eine Gruppe $G \neq E$ mit $C(G) = E$ bzw. $C(G) = G$ bzw. $C(G) \neq E, G$.

Aufgabe 14* (*10 Punkte*)

Sei G eine abelsche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $G^n := \{x^n \mid x \in G\}$ ist eine Untergruppe von G.

(b) Zeigen Sie: $G_n := \{x \in G \mid x^n = e\}$ ist eine Untergruppe von G.

(c) Überprüfen Sie, daß durch $xG_n \mapsto x^n$ eine Abbildung $G/G_n \to G^n$ gegeben ist und untersuchen Sie die Eigenschaften dieser Abbildung.

(d) Zeigen Sie: Ist G endlich, dann gilt $|G| = |G_n| \cdot |G^n|$.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 8

Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe S_3, die Ordnungen ihrer Elemente sowie alle Untergruppen.

Aufgabe Tu 9

Auf der Menge $H := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ sei folgende assoziative Verknüpfung (Multiplikation) gegeben:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$. Mit ± 1 werde wie üblich gerechnet.

Zeigen Sie, dass H mit der gegebenen Verknüpfung eine Gruppe ist, stellen Sie die Verknüpfungstafel auf und bestimmen Sie alle Untergruppen von H.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

7. November 2002

Lineare Algebra I

4. Übungsblatt

Abgabe: 14.11.2002 vor der Übung

Aufgabe 15 (*4 Punkte*)

Sei $G \neq E$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

G ist genau dann einfach, wenn G Primzahlordnung hat.

Aufgabe 16 (*7 Punkte*)

Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Ist U eine Untergruppe vom Index 2 in G, so ist U Normalteiler in G.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$, so gilt
(1) $N \cap U \leq G$, (2) $N \cap U \trianglelefteq G$, (3) $N \cap U \trianglelefteq U$.

Aufgabe 17 (*7 Punkte*)

Sei G Gruppe. $a, b \in G$ heißen *konjugiert* $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $g \in G$ mit $gag^{-1} = b$.
$\{gag^{-1} \mid g \in G\}$ heißt *(vollständige) Klasse* der zu a konjugierten Elemente. Zeigen Sie:

(a) Die Relation a *konjugiert* b ist eine Äquivalenzrelation auf G.

(b) Eine Untergruppe U von G ist genau dann Normalteiler von G, wenn U aus vollständigen Klassen konjugierter Elemente besteht.

Aufgabe 18 (*12 Punkte*)

Sei T die Symmetriegruppe des gleichseitigen Tetraeders im Raum.

(a) Zerlegen Sie T in Klassen konjugierter Elemente.

(b) Bestimmen Sie das Zentrum von T.

(c) Zeigen Sie: $\{\varepsilon, \rho, \sigma, \tau\}$ (Aufgabe 12) ist der einzige nichttriv. Normalteiler von T.

Aufgabe 19* (*10 Punkte*)

Sei N ein Normalteiler von G. Jeder Untergruppe U von G mit $N \subseteq U \subseteq G$ sei die Teilmenge $U/N := \{uN \mid u \in U\} \subseteq G/N$ zugeordnet. Zeigen Sie:

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen den N umfassenden Untergruppen von G und den Untergruppen von G/N.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 10

(a) In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe Normalteiler.

(b) G ist genau dann abelsch, wenn $G = Z(G)$ ist.

(c) In H (Siehe Tu 9) ist jede Untergruppe Normalteiler, aber H ist nicht abelsch.

(d) Ist G zyklisch von der Ordnung n, so gibt es zu jedem Teiler d von n eine Untergruppe der Ordnung d.

(e) Konjugierte Elemente haben gleiche Ordnung. Umkehrung?

Aufgabe Tu 11

Bestimmen Sie die Normalteiler und das Zentrum der S_3. Zerlegen Sie S_3 in Klassen konjugierter Elemente und verifizieren Sie die Behauptungen aus Aufgabe 17.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

14. November 2002

Lineare Algebra I

5. Übungsblatt

Abgabe: 21.11.2002 vor der Übung

Aufgabe 20 (*10 Punkte*)

Sei G Gruppe und für $g \in G$ sei $\alpha_g : G \to G$ definiert durch $\alpha_g(x) := g^{-1}xg$. Zeigen Sie:

(a) α_g ist ein Automorphismus (d.h. Isomorphismus von G auf G) und bestimmen Sie α_g^{-1}.

(b) $A_G := \{\alpha_g \mid g \in G\}$ ist bezüglich des Hintereinanderausführens von Abbildungen eine Gruppe.

(c) Die Gruppe A_G ist zur Faktorgruppe $G/Z(G)$ isomorph: $A_G \simeq G/Z(G)$. $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ , für alle } x \in G\}$, Zentrum von G.

Aufgabe 21 (*3 Punkte*)

Sei $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Ring mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x, x)$.

Zeigen Sie: f ist ein Ring–Endomorphismus und bestimmen Sie $\operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Kern} f$.

Aufgabe 22 (*9 Punkte*)

Sei $\mathbb{Q}[X]$ der Polynomring über dem Körper $\mathbb{Q}$ und $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

(a) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$,

(b) $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Aufgabe 23 (*8 Punkte*)

(a) Seien R, S kommutative Ringe mit 1 und $s \in S$. Zeigen Sie:
Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\Phi : R[X] \to S$ mit $\Phi|_R = \varphi$ und $\Phi(X) = s$.

(b) Gegeben seien der Ring $\mathbb{Z}_2$, die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ und die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2[X]$.

(1) Bestimmen Sie $\Phi_0, \Phi_1 : \mathbb{Z}_2[X] \to \mathbb{Z}_2$ mit $\mathrm{id} = \Phi_0 \circ \iota$ bzw. $\mathrm{id} = \Phi_1 \circ \iota$ und $\Phi_0(X) = 0$ bzw. $\Phi_1(X) = 1$.

(2) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} \Phi_0$ und $\operatorname{Kern} \Phi_1$.

Aufgabe 24* (*10 Punkte*)

Zeigen Sie:

Die Gruppe aller Automorphismen $\operatorname{Aut}(S_3)$ der Gruppe S_3 ist isomorph zu S_3.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 20(c) und überlegen Sie, dass S_3 höchstens 6 Automorphismen besitzt, da bei einem Automorphismus Elemente in solche gleicher Ordnung übergehen.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 12

Es sei $\mathbb{Z}_2 := \Big(\{0,1\},+,\cdot\Big)$.
Das Produkt $R := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist bekanntlich mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(R,+)$ und $(R,\cdot)$ auf und zeigen Sie, dass $(R,+)$ isomorph zur *Klein*schen Vierergruppe K_4 ist.

(b) Ist $(R,\cdot)$ eine Gruppe? Ist $(R \setminus \{(0,0)\},\cdot)$ eine Gruppe? (Begründungen!)

(c) Zeigen Sie:

Die Abbildung $\varphi : \begin{array}{ccc} R & \to & R \\ (x,y) & \mapsto & (x^2,y^2) \end{array}$ ist ein Ringisomorphismus (welcher?).

Aufgabe Tu 13

Zeigen Sie:

Ist $f : R \to S$ ein Ringisomorphismus, so ist auch $f^{-1} : S \to R$ ein Ringisomorphismus.

Aufgabe Tu 14

Zeigen Sie:

Ist R ein Ring und $X \neq \emptyset$, so ist für jedes $x_0 \in X$

die Abbildung $\varphi_{x_0} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Abb}\,(X,R) & \to & R \\ f & \mapsto & f(x_0) \end{array}$ ein Ringepimorphismus.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

21. November 2002

Lineare Algebra I

6. Übungsblatt

Abgabe: 28.11.2002 vor der Übung

Aufgabe 26 (*9 Punkte*)

Welche der angegebenen Mengen M_i, $i = 1, \ldots, 6$ sind Untervektorräume von V über $\mathbb{R}$?

(a) $V = \mathbb{R}^2$
$M_1 := \{(x, y) \in V \mid 2x - 3y = a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben),
$M_2 := \{(x, y) \in V \mid |x| = |y|\}$,

(b) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$M_3 := \{f \in V \mid f(i) \neq 0 \Longrightarrow i \text{ ist ungerade }\}$,
$M_4 := \{f \in V \mid \max\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq 0\} \text{ existiert und ist } \geq 4\} \cup \{0\}$,

(c) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$M_5 := \{f \in V \mid f(3) = a\}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben),
$M_6 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 27 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle Hyperebenen des ${\mathbb{Z}_2}^3$

(1) durch jeweils eine Gleichung der Form $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0$, $(a_1, a_2, a_3) \in {\mathbb{Z}_2}^3 \setminus \{0\}$,

(2) durch Angabe ihrer Elemente.

(3) Skizzieren Sie die Hyperebenen.

(b) Zeigen Sie: In ${\mathbb{Z}_2}^k$, $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau $2^k - 1$ verschiedene Hyperebenen.

Aufgabe 28 (*5 Punkte*)

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 Güter G_1, G_2, G_3 her.
Die benötigten Mengen zur Herstellung je einer Einheit von G_1, G_2, G_3 werden durch folgende *Rezeptmatrix* angegeben:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Ein Kunde bestellt $(g_1, g_2, g_3) = (25, 17, 30)$.
Welche Rohstoffmengen (r_1, r_2) werden für diese Bestellung benötigt?

(b) Läßt sich der Rohstoffvorrat $(r_1, r_2) = (45, 30)$ restlos aufbrauchen?
Man bestimme ggf. alle Lösungen (g_1, g_2, g_3) mit $g_i \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 29 (*6 Punkte*)

Sei V ein K–Vektorraum und $U_1, U_2, U_3 \leq V$. Zeigen Sie:

$$U_1 \subseteq U_3 \implies (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

Aufgabe 30* (*10 Punkte*)

Gegeben sei $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,7}(\mathbb{Z}_2).$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum C des homogenen LGS zu A.

(b) Für $x = (x_1, \cdots, x_7) \in {\mathbb{Z}_2}^7$ sei $\omega(x) := |\{i \mid x_i = 1\}|$ das *Gewicht* von x.
Bestimmen Sie $\omega(C) := \min\{\omega(x) \mid x \in C,\ x \neq 0\}$.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 15

Welche der folgenden Mengen M_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$?

$M_1 := \{(x, y) \mid y \geq 0\}$,
$M_2 := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$M_3 := \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$,
$M_4 := \{(x, y) \mid x^2 - 4xy + 4y^2 = 0\}$.

Aufgabe Tu 16

Sei ${\mathbb{Z}_2}^3$ Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

(a) Bestimmen Sie alle Unterräume $U \leq {\mathbb{Z}_2}^3$ mit $(1, 0, 1) \in U$.

(b) Sei $f : {\mathbb{Z}_2}^3 \to {\mathbb{Z}_2}^2$ mit $f(x, y, z) = (x + z, y)$.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern} f$ ein Untervektorraum von ${\mathbb{Z}_2}^3$ ist und bestimmen Sie $\operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{Bild} f$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

28. November 2002

Lineare Algebra I

7. Übungsblatt

Abgabe: 5.12.2002 vor der Übung

Aufgabe 31 (*8 Punkte*)

Gegeben seien folgende Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}_2$. Untersuchen Sie, ob die gegebenen Teilmengen von V linear abhängig, linear unabhängig, ein Erzeugendensystem, eine Basis von V sind.

Geben Sie im Fall der linearen Abhängigkeit jeweils eine maximal linear unabhängige Teilmenge an.

(a) $V = \mathbb{R}^4 \quad : M_1 = \{(1,1,3,1),(2,0,-1,1),(1,0,1,0),(4,-1,-1,0)\}$,

(b) $V = C(\mathbb{R}) : M_2 = \{t, t^2, 2t^2 - t\}$ und $M_3 = \{t, t^2, 2t^2 - t + 1\}$,

(c) $V = \mathbb{Z}_2{}^4 \quad : M_4 = \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

Aufgabe 32 (*5 Punkte*)

Sei $V = \mathbb{R}^4$ Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Wie müssen $r, s \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Menge $S := \{(3,0,0,-2),(0,3,-2,0),(r,0,0,s),(0,r,s,0)\}$ linear unabhängig ist?

(b) Können $r, s \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass S eine 3–elementige maximal linear unabhängige Teilmenge enthält?

Aufgabe 33 (*10 Punkte*)

Sei V Vektorraum über K und $\dim V = n$. Zeigen Sie:

(a) $W \leq V,\ U < V$ mit $\dim U = n-1 \implies \dim(W \cap U) \geq \dim W - 1$,

(b) $U_j < V$ mit $\dim U_j = n-1,\ j = 1,\ldots,k \implies \dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq n-k$,

(c) Ist $W < V,\ \dim W = k$, dann gibt es $n-k$ Unterräume $U_j < V$ mit $\dim U_j = n-1$ für $j = 1,\ldots,n-k$ und $\bigcap_{j=1}^{n-k} U_j = W$.

Aufgabe 34 (*7 Punkte*)

(a) Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_{m,n}(K)$ und ist $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(B)$, so haben die homogenen LGS mit den Koeffizientenmatrizen A, B denselben Lösungsraum.

(b) Sei V Vektorraum über K. Zeigen Sie:

Sind $a_1,\ldots,a_n \in V$ und $b_i := \sum_{j=1}^{i} a_j$ für $i = 1,\ldots,n$, so gilt:

$\{a_1,\ldots,a_n\}$ linear abhängig $\iff$ $\{b_1,\ldots,b_n\}$ linear abhängig.

Aufgabe 35* (*10 Punkte*)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ ist der Folgenraum über $\mathbb{R}$ und $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ sei definiert als
Menge aller Folgen $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, für die gilt $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie: F ist Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$.

(b) Zeigen Sie:
$\{(a_n), (b_n)\} \subset F$ mit $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1$ ist eine Basis von F.

(c) Zeigen Sie:
F besitzt eine Basis aus geometrischen Folgen, also Folgen (x_n) mit $x_n = q^n$.
Hinweis: Für welche $q \in \mathbb{R}$ gilt $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$?

(d) Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für b_n der obigen Folge (b_n).

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 17

Seien U, V Vektorräume endlicher Dimension über K. Zeigen Sie:

$$\dim(U \times V) = \dim U + \dim V.$$

Konstruieren Sie aus Basen von U und V explizit eine Basis von $U \times V$.

Aufgabe Tu 18

Bestimmen Sie Basen von $M_{m,n}(K)$.

Aufgabe Tu 19

Bestimmen Sie jeweils Erzeugendensysteme und Basen für den Zeilenraum $\mathrm{ZR}\,(A_i)$ und den Spaltenraum $\mathrm{SR}\,(A_i)$ folgender Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R}), \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}),$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } A_3 \in M_{3,3}(\mathbb{Z}_2),\ \text{bzw. } A_3 \in M_{3,3}(\mathbb{Z}_3).$$

Bitte geben Sie auf Ihrem Übungszettel Ihre **Fachrichtung** an und benutzen Sie bitte folgende **Abkürzungen**.

MD	Mathematik Diplom	**MSIN**	Mathematik Studienrichtung Informatik
MABC	Mathematik Bachelor	**INBC**	Bachelor Angewandte Informatik
PD	Physik Diplom	**MSRW**	Mathematik Studienricht. Rechnergest. Wissensch.
PHTE	Technische Physik	**CGIW**	Computergestütze Ingenieurwissenschaften
MET	Meteorologen	**LG**	Lehramt an Gymnasien
SO	Sonstige	**LBS**	Lehramt an Berufsbildenden Schulen

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

5. Dezember 2002

Lineare Algebra I

8. Übungsblatt

Abgabe: 12.12.2002 vor der Übung

Aufgabe 36 (*6 Punkte*)

Gegeben seien folgende Unterräume U, W des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{Z}_2{}^3$.
Bestimmen Sie jeweils einen Unterraum $W^* \leq W$, so dass $U + W = U \oplus W^*$ gilt.

(a) $U = <(1,0,1)>$ und $W = <(2,1,1),(3,2,1)>$.

(b) $U = <(1,-3,1,0),(0,3,0,-1)>$ und $W = <(2,1,1,0),(3,2,1,0)>$.

(c) $U = <(0,1,0),(0,0,1)>$ und $W = <(1,1,0),(1,0,1)>$.

Aufgabe 37 (*12 Punkte*)

(a) Seien $f, g \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$ und $\mathrm{Rang}\, f,\ \mathrm{Rang}\, g < \infty$. Zeigen Sie:
$|\mathrm{Rang}\, f - \mathrm{Rang}\, g\,| \leq \mathrm{Rang}\,(f+g) \leq \mathrm{Rang}\, f + \mathrm{Rang}\, g$.

(b) Seien $f \in \mathrm{Hom}\,(U, V),\ g \in \mathrm{Hom}\,(V, W),\ \mathrm{Rang}\, f$ oder $\mathrm{Rang}\, g < \infty$. Zeigen Sie:
$\mathrm{Rang}\,(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{Rang}\, f, \mathrm{Rang}\, g\}$.
Ist $\dim V < \infty$, so sind auch $\mathrm{Rang}\, f, \mathrm{Rang}\, g < \infty$ und es gilt
$\mathrm{Rang}\, f + \mathrm{Rang}\, g - \dim V \leq \mathrm{Rang}\,(g \circ f)$.

Aufgabe 38 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl $A(n)$ der Basen eines n–dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K mit $|K| = q$.

(b) Verifizieren Sie obiges Ergebnis für $q = 2$ und $n = 3$, indem Sie zeigen:
Es gibt 35 dreielementige Teilmengen von $\mathbb{Z}_2{}^3 \setminus \{0\}$, von denen genau 7 keine Basen sind. Bestimmen Sie diese 7 Teilmengen (vgl. Aufgabe 27).

Aufgabe 39 (*4 Punkte*)

Seien σ bzw. τ die Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ an den Ursprungsgeraden mit den Steigungswinkeln α bzw. β. Zeigen Sie:
Das Produkt $\delta := \sigma \circ \tau$ ist eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $2(\alpha - \beta)$.
Hinweis: Additionstheoreme

Aufgabe 40* (*10 Punkte*)
Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$. Zeigen Sie:
Es gibt eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n mit $q = p^n$.

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 20

Seien $U = <(1,-2,1),(0,1,0)>$ und $W = <(2,1,1),(3,2,1)>$ Unterräume des $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie einen Unterraum $W^* \leq W$ mit $U + W = U \oplus W^*$.

Aufgabe Tu 21

Sei $V := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{Grad} f \leq 2\}$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) = f(0) - f(1)$.

(a) Zeigen Sie: φ ist linear.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$ und verifizieren Sie die Dimensionsformel für Homomorphismen.

(c) Bestimmen Sie ein Komplement zu $\operatorname{Kern}\varphi$.

(d) Sei $\tau : V \to \mathbb{R}^3$ mit $\tau(a_0 + a_1X + a_2X^2) = (a_0, a_1, a_2)$.
Bestimmen Sie $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi \circ \tau = \varphi$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

12. Dezember 2002

Lineare Algebra I

9. Übungsblatt

Abgabe: 19.12.2002 vor der Übung

Aufgabe 41 (*6 Punkte*)

Gegeben seien folgende Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U = < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} > \quad \text{und} \quad W = < \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von U, W, $U + W$, $U \cap W$.

Aufgabe 42 (*12 Punkte*)

Sei $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $M(f) = M_{E_4 E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, E_4 bzw. E_3 kanonische Basen des $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{Bild} f$.

(b) Bestimmen Sie $\overset{-1}{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $\overset{-1}{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

(c) Ergänzen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ zu einer Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis von $\operatorname{Bild} f$ zu einer Basis C von $\mathbb{R}^3$.

(d) Bestimmen Sie $M_{BC}(f)$ und verifizieren Sie den Satz über die Matrixdarstellung linearer Abbildungen bezüglich verschiedener Basen:
$M_{BC}(f) = M_{E_3 C}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) M_{E_4 E_3}(f) M_{B E_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

Aufgabe 43 (*8 Punkte*)

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ eine (obere) Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente $a_{ii} = 0$ sind. Zeigen Sie: Es gilt $A^k = 0$ für alle $k \geq n$.
Hinweis: Betrachten Sie $f_A \in \operatorname{End}(K^n)$.

Aufgabe 44 (*4 Punkte*)

Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über K mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{Hom}_K(V, K) =: V^*$ mit $f_i(b_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, für } i \neq j \end{cases}$.
$f_1, \ldots, f_n$ sind eindeutig bestimmt.

(b) $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis für V^*.

(c) Ist $0 \neq v \in V$, so existiert $f \in V^*$ mit $f(v) \neq 0$.

Aufgabe 45* (*10 Punkte*)

Sei $A := (a_{ij}) \in M_n(K)$ und $\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Spur} : M_n(K) \to K$ ist K–linear,

(b) $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$, also auch $\operatorname{Spur}(X^{-1}AX) = \operatorname{Spur}(A)$, für $X \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(c) Ist $\operatorname{char} K \neq 2$ und $f : M_n(K) \to K$ eine K–lineare Abbildung mit $f(X^{-1}AX) = f(A)$, für alle $A \in M_n(K),\ X \in \mathrm{GL}_n(K)$, so gibt es ein $c \in K$ mit $f = c \cdot \operatorname{Spur}$.
Hinweis: Stundenübung, Tu 22

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 22

Sei $M_2(\mathbb{Z}_2) = \{(a_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}_2,\ i,j \in \{1,2\}\}$ der $\mathbb{Z}_2$–Vektorraum der $(2,2)$–Matrizen und $g : M_2(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ mit $g((a_{ij})) = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$.

(a) Zeigen Sie g ist linear und
bestimmen Sie $\operatorname{Kern} g$, $\operatorname{Bild} g$ sowie ein Komplement zu $\operatorname{Kern} g$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ und zeigen Sie:
$|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \simeq S_3$, vgl. Tu 8 und Aufgabe 38.

(c) Sei $f : M_2(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ linear mit
$f(X^{-1}AX) = f(A)$, für alle $A \in M_2(\mathbb{Z}_2),\ X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.
Zeigen Sie: Es gibt nur zwei solcher Abbildungen (vgl. Aufgabe 45*).

Aufgabe Tu 23

Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion des $\mathbb{R}^2$ auf die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ und sei $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung um 90^0.

Weiter seien $E = \{e_1, e_2\} = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ die kanonische Basis und

$B = \{b_1, b_2\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie

(a) $M_{E,E}(\pi),\ M_{E,E}(\delta),\ M_{E,E}(\pi \circ \delta),\ M_{E,E}(\delta \circ \pi)$, sowie

(b) $M_{B,B}(\pi),\ M_{B,B}(\delta),\ M_{B,B}(\delta \circ \pi)$.

(c) $M_{E,B}(\pi),\ M_{B,E}(\pi)$,

(d) $\operatorname{Kern}(\delta \circ \pi)$, $\operatorname{Kern}(\pi \circ \delta)$, $\operatorname{Bild}(\delta \circ \pi)$, $\operatorname{Bild}(\pi \circ \delta)$
und bestätigen Sie den Dimensionssatz für Homomorphismen.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

19. Dezember 2002

Lineare Algebra I
Weihnachtsübung

Weihnachtsaufgabe 46* (*10 Punkte*)

Auf dem internationalen vorweihnachtlichen Treffen der Weihnachtsmänner und Lichterfrauen werden Kekse, Schokoladensorten und andere Süßigkeiten gekostet und bewertet, die später auf den Weihnachtstellern landen sollen. Alle beteiligen sich an der Aktion und suchen sich unter den Süßigkeiten einige aus, die sie probieren.

Damit alle n Süßigkeiten (natürlich ist hier $n > 1$) die gleichen Chancen bei der Bewertung durch die insgesamt m PrüferInnen haben, soll jede Süßigkeit von genau a PrüferInnen probiert werden. Außerdem soll jedes Paar von Süßigkeiten von genau b PrüferInnen verglichen werden (mit $b > 0$). Natürlich muß dabei $b \leq a$ gelten; falls $a = b$ wäre, so müßten alle von allen Sorten essen – das ist den meisten aber zuviel! Wir nehmen daher an, dass $b < a$ ist.

Zeigen Sie: Ist die Verkostungsaktion unter all diesen Bedingungen durchgeführt worden, so haben $m \geq n$ Lichterfrauen und Weihnachtsmänner am Treffen teilgenommen.

Unter dem Weihnachtstisch liegt noch ein (etwas kryptischer) Hinweis:
Welchen Rang haben Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \in M_n(K) \quad (K \text{ ein Körper})\ ?$$

Tutorenprogramm

Aufgabe Tu 24

Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme:

(a) $Ax = b$, mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $AX = E$ bzw. $AY = B$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -4 \\ -10 & 8 & -10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe Tu 25

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ hat offensichtlich den Rang 2.

Bestimmen Sie $Z, S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $ZAS = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) durch Basisergänzung,
(b) durch Zeilen– und Spaltenumformungen.

Wiederholungsaufgaben (teilweise alte Klausuraufgaben)

Aufgabe W 1

(a) Ergänzen Sie $A := \{(-1,1,2,-2)^t, (1,2,-1,1)^t, (2,1,2,2)^t\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(b) Tauschen Sie zwei Vektoren aus der Basis
$B := \{(1,0,1,1)^t, (2,0,1,3)^t, (0,2,1,0)^t, (0,4,-1,1)^t\}$ gegen die
Vektoren $a = (0,1,0,0)^t$ und $b = (1,0,-1,3)^t$ so aus, dass wieder eine
Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht.

Aufgabe W 2

Bestimmen Sie jeweils einen Unterraum $W^* \leq W$, so dass $U + W = U \oplus W^*$.

(a) $U =< (1,-2,1), (0,1,0) >$ und $W =< (2,1,1), (3,2,1) >$.

(b) $U =< (1,0,1) >$ und $W =< (2,1,1), (3,2,1) >$.

(c) $U =< (1,-3,1,0), (0,3,0,-1) >$ und $W =< (2,1,1,0), (3,2,1,0) >$.

Aufgabe W 3

Sei $A := (a_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$\operatorname{Spur}(AA^t) = \operatorname{Spur}(A^tA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ und $AA^t = 0 \Longrightarrow A = 0$.

Aufgabe W 4

Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

Für alle Körper K, alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \in M_n(K)$ gilt:

(a) $A^2 = 0 \implies A = 0$,

(b) $A^2 = E \implies A \in \mathrm{GL}_n(K)$,

(c) $A^2 = E \implies A = E$,

(d) $A^2 = A \implies A = E$,

(e) $A^2 = A \implies A \in \mathrm{GL}_n(K)$,

(f) $A^2 = A$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K) \implies A = E$.

Aufgabe W 5

(a) Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei bezgl. der kanonischen Basis gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $M_{B,C}(\varphi)$ für die Basen
$B := ((-1,2,3)^t, (-1,0,1)^t, (1,3,2)^t)$ und $C := ((3,2)^t, (0,3)^t)$ des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

(b) Für die Basen B und C aus (a) sei die lineare Abbildung ψ
gegeben durch $M_{B,C}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\psi((-3,1,4)^t)$.

Aufgabe W 6

Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum über K und $V^* = \operatorname{Hom}_K(V,K)$. Zeigen Sie:

Sind $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ linear unabhängig, so

(a) existiert ein $a \in \operatorname{Kern}\varphi$ mit $\psi(a) \neq 0$,

(b) gilt $V = \operatorname{Kern}\varphi + \operatorname{Kern}\psi$.

Aufgabe W 7

$A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ heißt *magisches Quadrat*, wenn es eine Zahl $s = s(A)$ gibt, so dass jede Zeilensumme, jede Spaltensumme und jede Diagonalsumme gleich s ist.
Sei $U := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist magisches Quadrat}\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $M_3(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U.
Hinweis: Zeigen Sie $a_{22} = \frac{1}{3}s$.

Fröhliche Weihnachten !

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

9. Januar 2003

Lineare Algebra I

10. Übungsblatt

Abgabe: 16.1.2003 vor der Übung

Aufgabe 47 (*10 Punkte*)

Gegeben seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}\sigma$ und $\operatorname{sgn}\tau$.

(b) Schreiben Sie σ und τ in Zyklenschreibweise und als Produkt von Transpositionen.

(c) Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$ und σ^{-25}.

Aufgabe 48 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ und zeigen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} = (3-2)(5-2)(5-3)$.

(b) Sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von V über K und $\varphi \in \operatorname{Alt}(\mathbb{R}^3)$ mit $\varphi(v_1, v_2, v_3) = 3$.
Berechnen Sie $\varphi(w_1, w_2, w_3)$ für $w_1 = v_1 + v_2,\ w_2 = v_1 + v_3,\ w_3 = v_2 + v_3$.

Aufgabe 49 (*7 Punkte*)

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$ eine (untere) Dreiecksmatrix.

Zeigen Sie: $\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Aufgabe 50 (*7 Punkte*)

Sei K ein Körper, E die kanonische Basis von K^n und für alle $x \in K$ sei $f(x) : K^n \to K^n$ die lineare Abbildung mit

$$M_E(f(x)) = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\det f(x)$ und $\det f(0)$ und bestimmen Sie alle $x \in K$ mit $\det f(x) = 0$.

Hinweis: Aufgabe 46*

Aufgabe 51* (*10 Punkte*)

(a) Sei $V := \mathbb{R}^2$, $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, y) = x^t A y$.
Zeigen Sie, dass φ bilinear ist und geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass φ eine Volumenfunktion auf V ist.

(b) Geben Sie eine kurze Begründung dafür, dass die alternierende Gruppe A_4 isomorph ist zur Tetraedergruppe T (siehe Aufgaben 12 und 18).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

16. Januar 2003

Lineare Algebra I

11. Übungsblatt

Abgabe: 23.1.2003 vor der Übung

Aufgabe 52 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 53 (*8 Punkte*)

Seien $A, A' \in M_n(K)$. Zeigen Sie:

(a) A, A' sind genau dann ähnlich, wenn es eine Basis B des K^n gibt mit $A' = M_{BB}(\varphi_A)$.

(b) Die Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $M_n(K)$.

(c) Sind A, A' ähnlich, so sind A, A' äquivalent,

(d) Sind A, A' ähnlich, so gilt $|A| = |A'|$.

(e) Gelten die Umkehrungen von (c) bzw. (d)?

Aufgabe 54 (*6 Punkte*)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} mittels

(a) der Adjunkten: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} \mathrm{A}$,

(b) der *Cramer*schen Regel,

(c) elementarer Umformungen (*Gauß*–Verfahren).

Aufgabe 55 (*10 Punkte*)

Gegeben sei $A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $f := f_A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Zeigen Sie: f kann nur die beiden Eigenwerte ± 1 haben. *Hinweis*: $f^2 = \mathrm{id}$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Kern} f$,

(c) bestimmen Sie $\operatorname{Eig}(f, 1)$ und $\operatorname{Eig}(f, -1)$,

(d) bestimmen Sie eine Basis B aus Eigenvektoren von f,

(e) bestimmen Sie die Diagonalmatrix $M_B(f)$ und

(f) beschreiben Sie die Abbildung f geometrisch.

Aufgabe 56* (*10 Punkte*)

Beweisen Sie:

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

(b) Der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ über $\mathbb{R}$ besitzt keine abzählbare Basis.

Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Nullfolgen, geben Sie zu jedem a des offenen Intervalls $(0,1)$ ein $f_a \in N$ an durch $f_a(n) := a^n$ und zeigen Sie, dass je endlich viele paarweise verschiedener solcher f_a linear unabhängig sind.

Klausur zur Linearen Algebra 1 am Samstag, 25. Januar 2003

		Hörsaal	**Gruppen**
Beginn:	8.15 Uhr		
Dauer:	2 Stunden	E 001	W 1,2
Hilfsmittel:	keine Taschenrechner	AM	M 1,2 und K 1,2
		Gr. Physik–Hörsaal	R 1,2

Ergebnisse: Aushang ab 7.2.03 vor Raum C 401 (Merziger) und im Schaukasten

Klausurrückgabe: Montag, 10.2.03 von 10 bis 12 Uhr im Hörsaal F 442

Nachschreibklausur: Freitag, 11. April 2003 um 14.15 Uhr im AM (2 Stunden, keine Taschenrechner). Dabei werden Noten (einschließlich Boni) nur für die Studierenden vergeben, die an der Klausur am 25. Januar 2003 aus **wichtigem Grund** nicht teilnehmen konnten, die übrigen Teilnehmer erhalten ggf. nur die Noten '4,3' bzw. '3,3'.
(Siehe entsprechende Regelungen für die Klausur zur Analysis 1).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

23. Januar 2003

Lineare Algebra I

12. Übungsblatt

Abgabe: 30.1.2003 vor der Übung

Aufgabe 57 (*11 Punkte*)

Berechnen Sie charakteristisches Polynom, Spektrum und Eigenräume von $A \in M_3(\mathbb{R})$. Ist A diagonalisierbar?

Geben Sie ggf. eine invertierbare Matrix $S \in M_3(\mathbb{R})$ an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist.

Geben Sie ggf. eine Spektralzerlegung des $\mathbb{R}^3$ an.

(a) $A = \begin{pmatrix} -8 & 16 & -6 \\ -5 & 13 & -6 \\ -5 & 14 & -7 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 58 (*6 Punkte*)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Projektion π längs der Geraden $< (1,1,-1) >$ auf die Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$.

Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, so dass $M_B(\pi)$ Diagonalmatrix ist und berechnen Sie damit die Matrix $M_E(\pi)$ von π bezüglich der kanonischen Basis E.

Aufgabe 59 (*8 Punkte*)

Seien $A, B \in M_n(K)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) A und A^t haben dieselben Eigenwerte.
(b) A und A^t haben dieselben Eigenräume.
(c) AB und BA haben dieselben Eigenwerte.
(d) AB und BA haben dieselben Eigenräume.

Aufgabe 60 (*5 Punkte*)

Sei V endlich dimensionaler Vektorraum über K, sei $f \in \mathrm{End}\,(V)$ und
seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f und
seien $x_1, \ldots, x_k$ Eigenvektoren von f mit $x_i \in \mathrm{Eig}\,(f, \lambda_i)$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

Zeigen Sie: Für $x \in < x_1, \ldots, x_k >$, $x \neq 0$ gilt:

x ist genau dann Eigenvektor von f, wenn es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt mit $x \in < x_j >$.

Aufgabe 61* (*10 Punkte*)

(a) Sei $A \in M_n(K)$ diagonalisierbar mit char. Polynom $\chi_A(X)$. Zeigen Sie: $\chi_A(A) = 0$.

(b) Seien $A, B \in M_n(K)$. Zeigen Sie: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst $\chi_{AE_r} = \chi_{E_rA}$ für $E_r = \mathrm{diag}\,(\overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, 0, \ldots, 0) \in M_n(K)$
und benutzen Sie, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

30. Januar 2003

Lineare Algebra I

13. Übungsblatt / 1. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe: 7/8.4.2003 vor der Übung

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

Sei $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$ mit $n \geq 1$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K). \quad \text{Zeigen Sie:} \quad p(X) = \chi_A(X).$$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie:

(a) $< u \times v,\, w > = \det(u\, v\, w)$,

(b) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - < u, v >^2$,

(c) $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

(a) Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ läßt sich eindeutig als $A = B + iC$ mit hermiteschen Matrizen $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ schreiben.

(b) Wie lautet die in (a) gefundene Zerlegung für das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 4+2i \\ 3i & 1-i & 3+5i \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Sei $V = C[-1, 1]$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[-1, 1]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt $< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$.

(a) Seien $f_1, f_2 \in V$ definiert durch $f_1(t) = |t| - 1$ und $f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases}$.
Berechnen Sie den Abstand von f_1 und f_2.

(b) Es sei $U := \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in [-1, 1]\}$.
(U ist ein Teilraum von V, der Raum der geraden Funktionen; kein Beweis nötig.)
Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U in V.

Aufgabe 5* (*10 Punkte*)

Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{Grad} f \leq 3\}$ mit dem Skalarprodukt $< f, g > = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$.

(a) Bestimmen Sie die $< , >$ darstellende Matrix bezüglich der Basis $B = \{1, X, X^2, X^3\}$.

(b) Berechnen Sie $< 2X^2 + X\, ,\, X^3 - X^2 + X + 1 >$ mittels Matrizenrechnung.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis C des Unterraums $< 1, X, X^2 >$.

(d) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\varphi_C(X + 1)$.

(e) Berechnen Sie den Abstand von $f = X^2$ und $g = X^3$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

25. Januar 2003

Lineare Algebra 1
Klausur

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Sei $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0\}$ und $N = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$.

Zeigen Sie:

(a) G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (bzgl. der Matrizenmultiplikation),

(b) N ist ein Normalteiler von G und $G/N \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Hinweis:
Betrachten Sie die Abbildung $\varphi:\ G \to \mathbb{R}^*$ mit $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie den Lösungsraum von $Ax = 0$ und geben Sie eine Basis des Lösungsraumes in Abhängigkeit von dem Parameter λ an.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

(a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ und $b_1 = a_1 + a_2,\ b_2 = a_2 + a_3,\ b_3 = a_1 + a_3$. Zeigen Sie:

$\{b_1, b_2, b_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3 \iff \{a_1, a_2, a_3\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei $\{b_1, b_2, b_3\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$.
Drücken Sie a_1, a_2, a_3 jeweils als Linearkombination der b_1, b_2, b_3 aus.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $\det(v_1\, v_2\, v_3) = -2$.
Weiter seien $w_1 = v_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + v_2 + v_3$.
Berechnen Sie alle $w \in \mathbb{R}^3$ mit $\det(w_1\, w\, w_2) = 4$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$ mit $AB = 0$. Zeigen Sie: $\operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B \leq n$.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ und $f := f_A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Zeigen Sie $f^2 = f$,

(b) bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von f,

(c) bestimmen Sie $\operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Kern} f$,

(d) bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist.