INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

I^fAM

Hannover, den 02.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 1.1 (7 Punkte)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = -2xy^2, \quad 1 \le x \le 1.5, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

(i) Man zeige, daß $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$ die AWA löst.

(ii) Zur Schrittweite $h = 1/2$ rechne man einen Schritt mit

(a) dem expliziten Euler-Verfahren,

(b) dem modifizierten Euler-Verfahren,

(c) dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung.

Lösung.

(i) $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ löst die AWA:
$y' = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = -2xy^2$ ①
$y(1) = \frac{1}{1^2+1} = 0.5$ (0.5)

(ii) Zum Vergleich: $y(1.5) = \frac{4}{13} \approx 0.30769$

(a) Euler-Verfahren:
$y_0 = \frac{1}{2}$
$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-2 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2})^2) = \frac{1}{2} + \frac{-2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$ ①

(b) modifiziertes Euler-Verfahren:
$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))]$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[-2 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2})^2 + f(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[-\frac{1}{2} - \frac{3}{16}]$
$= \frac{21}{64} = 0.328125$ ②

(c) Runge-Kutta 4.Ordnung:
$K_0 = hf(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(-2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{1}{4}$
$K_1 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_0}{2}\right) = -0.17578125$
$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right) = -0.212293$
$K_3 = hf(x_0 + h, y_0 + K_2) = -0.124163$
$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3)$
$= 0.30828$ (2.5)

□

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 02.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 2.1 (6 Punkte)
Die Anfangswertaufgabe

$$y' = 1 + (x-y)^2, \quad 2 \le x \le 3, \quad y(2) = 1$$

hat die exakte Lösung $y(x) = x + (1-x)^{-1}$.
Zur Schrittweite $h = 0.2$ approximiere man $y(2.8)$ mit den folgenden Prädiktor-Korrektor-Methoden, wobei man als Korrekturschritt eine Fixpunktiteration nehme. Die nötigen Startwerte ermittele man mit der exakten Lösung.

(i) Mittels der Prädiktor-Korrektor-Methode, die auf dem Adams-Bashforth-Vierschritt-Verfahren und dem Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahren basiert,

(ii) mittels der Milne-Prädiktor-Korrektor-Methode 4. Ordnung.

Lösung. exakte Werte:
$y_0 = y(2) = 1$
$y_1 = y(2.2) = 1.366667$
$y_2 = y(2.4) = 1.685714$
$y_3 = y(2.6) = 1.975$
$y_4 = y(2.8) = 2.244444 \leftarrow exakteLösung$

(i) Adams-Bashfort-Vierschritt-Verfahren:
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\big(55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})\big)$
$\Rightarrow y_4 = y_3 + \frac{1}{120}\big(55f(x_3, y_3) - 59f(x_2, y_2) + 37f(x_1, y_1) - 9f(x_0, y_0)\big)$
$= 1.975 + \frac{1}{120}(55 \cdot 1.390625 - 59 \cdot 1.510204 + 37 \cdot 1.694444 - 9 \cdot 2)$
$= 1.975 + \frac{1}{120}32.076767 = 2.242306 =: y_4^{(0)}$ 1.5

Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahren:
$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right)$
$\Rightarrow y_4^{(1)} = y_3 + \frac{1}{120}\left(9f(x_4, y_4^{(0)}) + 19f(x_3, y_3) - 5f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)\right)$
$= 1.975 + \frac{1}{120}(9 \cdot 1.311023 + 19 \cdot 1.390625 - 5 \cdot 1.510204 + 1.694444))$
$= 1.975 + \frac{1}{120}32.364506 = 2.244704$ 1.5

(ii) Milne-Prädiktor-Korrektor-Methode:
$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\big(2f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 2f(x_{n-2}, y_{n-2})\big)$
$y_{n+1}^{(1)} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})\right)$

$y_4^{(0)} = y_0 + \frac{8}{30}\big(2f(x_3, y_3) - f(x_2, y_2) + 2f(x_1, y_1)\big)$
$= 1 + \frac{8}{30}(2 \cdot 1.390625 - 1.510204 + 2 \cdot 1.694444)$
$= 1 + \frac{8}{30}4.659934 = 2.242649$ 1.5

$y_4^{(1)} = y_2 + \frac{2}{30}\left(2f(x_4, y_4^{(0)}) + 4f(x_3, y_3) + f(x_2, y_2)\right)$
$= 1.685714 + \frac{2}{30}(1.310640 + 4 \cdot 1.390625 + 1.510204)$
$= 1.685714 + \frac{2}{30}8.383344 = 2.244604$ 1.5

□

Hausaufgabe 2.2 (6 Punkte)
Man betrachte die Anfangswertaufgabe $y' = 2y$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$. Zu den Schrittweiten $h = 1/4$, $h = 1/8$, $h = 1/16$ und $h = 1/32$ bestimme man mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem verbesserten Euler-Verfahren Näherungen für $y(1) = e^2$. Man bestimme jeweils den Fehler und aus aufeinanderfolgenden Schrittweiten Näherungen für die Konvergenzordnung der Verfahren.

Lösung. exakte Lösung: $y(x) = e^{2x}$
Zur Erinnerung:
Euler-Verfahren: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
modifiziertes Euler-Verfahren: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\right]$
verbessertes Euler-Verfahren: $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$

Man kann nun die Näherungen an e^2 damit ausrechnen, oder man benutzt folgende Formeln der Vorlesung für den speziellen Differentialgleichungstyp $y' = \lambda \cdot y$ (S.22/23 im Skript)

Euler-Verfahren: $y_j = (1 + h\lambda)^j y_0 = (1 + 2h)^j$

verb. Euler-Ver./mod. Euler-Ver: $y_j = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)^j y_0 = (1 + 2h + 2h^2)^j$

Damit ergibt sich: (exakter Wert:$y(1) = e^2 \approx 7.389056$)

h	Euler	Fehler	verb.Euler	Fehler
$\frac{1}{4}$	5.0625	2.326556	6.972900	0.416156
$\frac{1}{8}$	5.960464	1.428592	7.262247	0.126809
$\frac{1}{16}$	6.583250	0.805806	7.354083	0.034973
$\frac{1}{32}$	6.958667	0.430389	7.379880	0.009176

③

Berechnung der Konvergenzordnung:
$\|e\| = \mathcal{O}(h^p) \Rightarrow e_j = ch_j^p$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \log e_j = \log c + p \log h_j \\ log e_{j+1} = \log c + p \log h_{j+1} \end{array} \Rightarrow p = \frac{\log e_j - \log e_{j+1}}{\log h_j - \log h_{j+1}}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für p:

h_j	h_{j+1}	Euler	verb.Euler
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0.7036	1.7145
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0.8261	1.8583
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	0.9048	1.9303

③

Bemerkung: Die Konvergenzordnung des Euler-Verfahrens ist 1, die des verb. Euler-Verfahrens ist 2.

□

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

IfAM

Hannover, den 02.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 3.1 (5 Punkte)
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y'' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Man finde eine Näherung zu y mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$. Man vergleiche die Werte mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$ in $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \frac{3}{4}$.

Lösung.

$y_n'' = \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} \Rightarrow \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} + y_n = \frac{1}{h^2}y_{n+1} + (1-\frac{2}{h^2})y_n + \frac{1}{h^2}y_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3$
$\underline{n = 1:} 16y_2 - 31y_1 = -16y_0 = 0$ ①
$\underline{n = 2:} 16y_3 - 31y_2 + 16y_1 = 0$ ①
$\underline{n = 3:} -31y_3 + 16y_2 = -16y_4 = -16$ ①

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_1 = 0.2943, y_2 = 0.5702, y_3 = 0.8104$ ①

$y = \frac{\sin x}{\sin 1}, \quad e_n := |y(x_n) - y_n|$
$\Rightarrow$
$e_1 = 2.86 \cdot 10^{-4}$
$e_2 = 2.4 \cdot 10^{-4}$
$e_3 = 3.44 \cdot 10^{-4}$ ①
□

Hausaufgabe 3.2 (5 Punkte)
Für die Randwertaufgabe

$$y'' + x^2 y' - xy = x^2, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$$

finde man eine Näherung zu y mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.

Lösung.

$y_n'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$
$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$ ($\mathcal{O}(h^2)$Approximation)

$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3, \quad x_2 = 2/3, \quad x_3 = 1$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + x_n^2 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - x_n y_n = x_n^2$$
$$\Rightarrow (9 - \frac{3}{2}x_n^2)y_{n-1} + (-18 - x_n)y_n + (9 + \frac{3}{2}x_n^2)y_{n+1} = x_n^2$$

$\underline{n = 1:}$ $(9 - \frac{1}{6})y_0 + (-18 - \frac{1}{3})y_1 + (9 + \frac{1}{6})y_2 = \frac{1}{9}$ ①
$\underline{n = 2:}$ $(9 - \frac{2}{3})y_1 + (-18 - \frac{2}{3})y_2 + (9 + \frac{2}{3})y_3 = \frac{4}{9}$ ①
$\underline{n = 3:}$ $(9 - \frac{3}{2})y_2 + (-18 - 1)y_3 + (9 + \frac{3}{2})y_4 = 1$ ①
Randbedingungen:
$y_0 = 1$
$-\frac{3}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = y_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{55}{3} & \frac{55}{6} & 0 \\ \frac{25}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{29}{3} \\ 0 & 18 & -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{157}{18} \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$ ①

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 0.7576 \\ y_2 &= 0.5637 \\ y_3 &= 0.4814 \end{aligned}$$ ①

□

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

I^{f}AM

Hannover, den 02.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 4.1 (8 Punkte)
Man stelle das LGS auf, das man beim Lösen der RWA

$$-u''(x) + u(x) = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren erhält. Dabei wähle man S_h^1 als Menge der stetigen und stückweise linearen Funktionen zur Schrittweite $h = 0.25$. Als Basis nehme man die Hutfunktionen.

Lösung.
Nach Stundenübung:

$$A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

②

$$\begin{aligned} b_1 &= 4 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}} x^2\,dx + 4 \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{1}{2} - x\right)dx = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3\Big|_0^{\frac{1}{4}} + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{48} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= 4 \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x\left(x - \frac{1}{4}\right)dx + 4 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x\left(\frac{3}{4} - x\right)dx = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^2\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{48} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{27}{32} - \frac{3}{8} - \frac{9}{16} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= 4 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x\left(x - \frac{1}{2}\right)dx + 4 \cdot \int_{\frac{3}{4}}^{1} x(1-x)\,dx = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{3}{4}}^{1} \\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{6} - \frac{9}{16} + \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{8} - \frac{4}{3} + \frac{9}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⑥

□

Hausaufgabe 4.2 (6 Punkte)
Man berechne eine Näherungslösung u_h der Randwertaufgabe

$$-xu''(x) - u'(x) + \frac{u(x)}{x} = \cos(\tfrac{\pi}{2}x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren. Dazu wähle man $S_h = \operatorname{span}\{x, x^2\}$.

Lösung.
$\Phi_k(x) = x^k, \quad , k = 1, 2, \quad \Phi'_k(x) = kx^{k-1}$
$\tau(x) = x, \quad q(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{ij} = \left(\int_0^1 xix^{i-1}jx^{j-1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x}x^i x^j dx\right)_{ij} \\ &= \left(ij\int_0^1 x^{i+j-1}dx + \int_0^1 x^{i+j-1}dx\right)_{ij} = \left(\frac{ij}{i+j}\frac{1}{i+j}\right)_{ij} \\ &= \left(\frac{1+ij}{i+j}\right)_{ij} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ 2.5

zur rechten Seite:

$$\int_0^1 x\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\cos\frac{\pi}{2}x\,dx &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}x\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \end{pmatrix}$ 2.5

Zu lösen ist also das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{4}{\pi}\right) = -0.442959 \\ \alpha_1 &= \frac{2}{\pi} - \frac{20}{\pi^2} + \frac{64}{\pi^2} = 0.674294303 \end{aligned}$$

1

$\Rightarrow y_h(x) = 0.6743 \cdot x - 0.4430 \cdot x^2$

□

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 19.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 5.1
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$u^{(4)}(x) + u(x) = 1, \quad a < x < b, \quad u(a) = 0,\, u(b) = 0,\, u'(a) = 0,\, u'(b) = 0.$$

(i) Man berechne die lokale Steifigkeitsmatrix bei Verwendung stetig differenzierbarer, stückweise kubischen Funktionen (vgl. Stundenübungen 5.1 und 5.2).

(ii) Können für die obige RWA auch stetige, *nicht* differenzierbare Ansatzfunktionen (wie in Stundenübung 5.1 (i),(ii)) gewählt werden?

Lösung.

(i) Für die Ableitungen der Basisfunktionen auf dem Referenzelement erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1''(\xi) &= -6 + 12\xi \\
\tilde{\phi}_2''(\xi) &= h(-4 + 6\xi) \\
\tilde{\phi}_3''(\xi) &= 6 - 12\xi \\
\tilde{\phi}_4''(\xi) &= h(-2 + 6\xi)
\end{aligned}$$

Die Matrixeinträge berechnen sich laut Übung wie folgt

$$k_{ij} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_i''(x)\phi_j''(x)\,dx = \frac{1}{h^3}\int_0^1 \tilde{\phi}_i''(\xi)\tilde{\phi}_j''(\xi)\,d\xi$$

Im einzelnen ergibt sich

$$\begin{aligned}
k_{11} = k_{33} &= \frac{1}{h^3}\int_0^1 (12\xi - 6)^2\,d\xi = \frac{1}{h^3}\cdot\frac{1}{3\cdot 12}(12\xi - 6)^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{h^3}\cdot\frac{6^3}{36}(2\xi - 1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{h^3}\cdot 6\cdot(1^3 + 1^3) = \frac{12}{h^3} \\
k_{22} &= \frac{1}{h^3}\int_0^1 \big(h(-4 + 6\xi)\big)^2\,d\xi = \frac{1}{h}\int_0^1 (6\xi - 4)^2\,d\xi \\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{3\cdot 6}(6\xi - 4)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{18}\big(2^3 + 4^3\big) = \frac{4}{h} \\
k_{44} &= \frac{1}{h^3}h^2\int_0^1 (6\xi - 2)^2\,d\xi = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{3\cdot 6}(6\xi - 2)^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{18}\cdot\big(4^3 + 2^3\big) = \frac{4}{h} \\
k_{12} &= -k_{23} = \frac{1}{h^3}\cdot h\int_0^1 (12\xi - 6)(6\xi - 4)\,d\xi \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^1 \big(72\xi^2 - 84\xi + 24\big)\,d\xi = \ldots = \frac{6}{h^2} \\
k_{14} &= -k_{34} = \ldots = \frac{6}{h^2} \\
k_{13} &= -k_{11} = -\frac{12}{h^3} \\
k_{24} &= \ldots = \frac{2}{h}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow k = \frac{1}{h^3}\begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}$$

⑧

(ii) Die ϕ_i's müssen aus $\mathcal{C}^1$, also stetig differenzierbar, sein, da $\phi_i''(x)$ im Integral vorkommt! Ist $\phi_i \notin \mathcal{C}^1$, so ist $\int \big(\phi_i''(x)\big)^2 \, dx = \infty$!

①

□

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 30.05.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 7.1 (5 Punkte)
Man zeige, dass das implizite Verfahren

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{n,j}}{k} = a^2 \frac{U_{n+1,j+1} - 2U_{n,j+1} + U_{n-1,j+1}}{h^2}$$

von Neumann stabil ist.

Lösung.
Setze $r := \frac{a^2 k}{h^2}$

$\Rightarrow -rU_{n-1,j+1} + (1+2r)U_{n,j+1} - rU_{n+1,j+1} = U_{n,j}$

Ansatz: $U_{n,j} = \xi^j e^{i\beta n}$

$\Rightarrow -r\xi^{j+1}e^{i\beta(n-1)} + (1+2r)\xi^{j+1}e^{i\beta n} - r\xi^{j+1}e^{i\beta(n+1)} = \xi^j e^{i\beta n}$

$\Rightarrow -r\xi e^{-i\beta} + (1+2r)\xi - r\xi e^{i\beta} = 1$

$\Rightarrow \xi \left(-re^{-i\beta} + (1+2r) - re^{i\beta}\right) = 1$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} \xi & = (1+2r-2r\cos\beta)^{-1} \\ & = (1+4r\sin^2\frac{\beta}{2})^{-1} \end{array} \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$\Rightarrow |\xi| \leq 1 \;\; \forall \;\; \beta$ unabhängig von r ⑤

□

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

$\mathrm{I}^f\mathrm{AM}$

Hannover, den 16.06.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 8.1 (8 Punkte)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ näherungsweise, indem man zwei Schritte mit dem CG-Verfahren durchführt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor.

Lösung.

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r^0 = -b^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, p^0 = -r^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ①$$

$$Ap^0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 195 \\ 35 \\ -201 \end{pmatrix} \qquad (0.5)$$

$$\alpha_0 = \frac{<r^0, p^0>}{<Ap^0, p^0>} = \frac{-95}{2266} \approx -0.041924 \qquad ①$$

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} 0.125772 \\ 0.377317 \\ 0.083848 \\ -0.041924 \end{pmatrix}, r^1 = r^0 - \alpha_0 Ap^0 = \begin{pmatrix} 0.35392 \\ -0.82482 \\ -0.53266 \\ -7.42672 \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

$$\beta_0 = \frac{<r^1, Ap^0>}{<p^0, Ap^0>} = \frac{1341.602124}{2266} = 0.592057 \qquad ①$$

$$p^1 = r^1 - \beta_0 p^0 = \begin{pmatrix} -1.422251 \\ -6.153333 \\ -1.716774 \\ -6.834667 \end{pmatrix}, Ap^1 = \begin{pmatrix} 22.30412 \\ -62.931819 \\ -38.407383 \\ -576.289739 \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{<r^1, p^1>}{<p^1, Ap^1>} = \frac{56.2456713}{4360.203640} = 0.012900 \qquad ①$$

$$x^2 = x^1 - \alpha_1 p^1 = \begin{pmatrix} 0.144119 \\ 0.456695 \\ 0.105994 \\ 0.046243 \end{pmatrix} \qquad (0.5)$$

Zum Vergleich: $x_{exakt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

□

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 26.06.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 9.1 (6 Punkte)
Man berechne für folgende Eigenwert-Aufgabe

$$\frac{1}{3}y'' + \lambda xy = 0 \quad \text{mit } y(0) = y(1) = 0$$

mit dem Differenzenverfahren (Schrittweite $h = 1/3$) näherungsweise die Eigenwerte.

Lösung.
Schrittweite: $h = \frac{1}{3}$
$y_0 = y(0) = 0;\ y_3 = y(1) = 0; \quad y_1 = y(\frac{1}{3});\ y_2 = y(\frac{2}{3})$

Zur Bestimmung von y_1 und y_2 benötigen wir noch zwei Gleichungen, die wir uns über das Differenzenverfahren verschaffen.

$$\frac{1}{3}\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\frac{1}{9}} + \lambda x_k y_k = 0,\ k = 1, 2 \qquad ①$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad k = 1: &\quad 3(y_2 - 2y_1 + y_0) + \lambda y_1/3 = 0 \quad ① \\ k = 2: &\quad 3(y_3 - 2y_2 + y_1) + 2\lambda y_2/3 = 0 \quad ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 3y_2 - 6y_1 + \tfrac{\lambda y_1}{3} &= 0 \\ -6y_2 + 3y_1 + \tfrac{2\lambda y_2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Dies führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} \lambda/3 - 6 & 3 \\ 3 & 2\lambda/3 - 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ①$$

Dieses homogene LGS kann nur nichttriviale Lösungen besitzen, falls die Determinante verschwindet.

$det(\dots) = (\lambda/3 - 6)(2\lambda/3 - 6) - 9 = 0$ ①
$\Rightarrow \lambda^2 - 27\lambda + 243/2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \approx 21.294, \quad \lambda_2 \approx 5.706$ ①
□

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 26.06.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 10.1 (8 Punkte)
Man berechne die diskrete, komplexe Fourierentwicklung der 2π-periodischen Funktion $f(x) = |\sin x|$ mittels der FFT zu $N = 8$. Man ermittele daraus die entsprechende diskrete, reelle Fourierentwicklung.

Lösung.
$F(x) = |\sin x|\,,\quad$ FFT mit N = 8 :

	1	1	1	1	2
k	x_k	a_k	y_k	z_k	c_k
0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = c_0$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = c_4$
2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} = c_2$
3	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{4} = c_6$
4	π	0	0	0	$0 = c_1$
5	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	0	0	$0 = c_5$
6	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$0 = c_3$
7	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	0	0	$0 = c_7$

$\Rightarrow f(x) \approx 0.6035 - 0.25e^{2ix} - 0.1035e^{4ix} - 0.25e^{6ix}$ 1

reell: $f(x) \approx 0.6035 - 0.25\cos 2x - 0.1035\cos 4x - 0.25\cos 6x$ 1

$\square$

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

IfAM

Hannover, den 26.06.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik II

Hausaufgabe 11.1 (7 Punkte)
Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

führe man einen Schritt des QR-Verfahrens mit Rayleigh-Shift durch.

Lösung.

QR-Verfahren mit Rayleigh-Shift:

(I) Shift $\sigma = a_{33} = 3$

(II) Shiftausführung: $\tilde{A}^{(0)} = A^{(0)} - \sigma E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ①

(III) QR-Zerlegung:
<u>1.Schritt:</u> zu a_{11}

(i) $s := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2} = \sqrt{16} = 4$

(ii) $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{11}|}{s}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{a_{21}}{\omega_1 s} sgn(a_{11}) = \frac{1}{2}\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega_3 = 0$

$\Rightarrow \ \omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Transformationsmatrix: $P^{(1)} = E - 2\omega^{(1)}{\omega^{(1)}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = P^{(1)}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ②

<u>2.Schritt:</u> zu $a_{22}^{(1)}$

(i) $s := \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

(ii) $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{22}|}{s}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\right)} = 0.948683$

$\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{0.948683\cdot 5} \cdot 1 = 0.3162279$

$\Rightarrow \omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.948683 \\ 0.3162279 \end{pmatrix}$

(iii) $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}^{(2)} = P^{(2)} \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$ ②

$\Rightarrow Q^T = P^{(2)} P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$ ①

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & -0.8 & -0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$

(IV) $\tilde{A}^{(1)} = RQ = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ①

(V) Rückwärtsshift: $A^{(1)} = \tilde{A}^{(1)} + \sigma E = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 3 ist Eigenwert von A $\square$