Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 10.04.2003

1. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 1.1
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0.5$$

mit exakter Lösung $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$. Man approximiere y mittels

(i) der Methode von Euler zur Schrittweite $h = 0.025$,

(ii) der modifizierten Methode von Euler zur Schrittweite $h = 0.05$

(iii) und dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung zur Schrittweite $h = 0.1$

und vergleiche die Methoden.

Aufgabe 1.2
Zur AWA aus Stundenübung 1.1 approximiere man y mittels der Methode von Adams-Bashforth ($m = 3$) zur Schrittweite $h = 0.2$. Dabei verwende man die exakten Werte von $y(t)$ für $t = 0.2$, $t = 0.4$ und $t = 0.6$.

Aufgabe 1.3
Für die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = 2x^2 + 2y\,, \quad y(0) = 1\,; \quad 0 \le x \le 1$$

gebe man eine Fehlerabschätzung des lokalen Diskretisierungsfehlers (für (i) auch des globalen Diskretisierungsfehlers) zum

(i) Euler-Verfahren,

(ii) modifizierten Euler-Verfahren

zur Schrittweite $h = 0.1$ an.

Hausübung

Hausaufgabe 1.1 (7 Punkte)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = -2xy^2, \quad 1 \le x \le 1.5, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

(i) Man zeige, daß $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$ die AWA löst.

(ii) Zur Schrittweite $h = 1/2$ rechne man einen Schritt mit

   (a) dem expliziten Euler-Verfahren,
   (b) dem modifizierten Euler-Verfahren,
   (c) dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung.

Abgabe der Hausübung bis Di. 22.04.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

IfAM

Hannover, den 17.04.2003

2. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 2.1
Wie lautet das Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung) für 2×2-Systeme 1.Ordnung, also für

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x,y), \qquad & x(t_0) &= x_0 \\ y'(t) &= g(t,x,y), \qquad & y(t_0) &= y_0? \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'' = x + y^2 + y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(i) Man reduziere die obige AWA auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

(ii) Man bestimme Näherungen für $y(0.2)$ mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.1$ und mit dem verbesserten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.2$.

Aufgabe 2.3 (i) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = y - x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0.5$$

mit exakter Lösung $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$. Man approximiere y mittels dem Adams-Bashforth-Vierschritt-Verfahren und dem Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.2$.

(ii) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y' = e^y, \quad 0 \le x \le 0.25, \quad y(0) = 1.$$

Welcher Unterschied besteht bei der Ausführung des Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahrens (bzw. jedes anderen impliziten Verfahrens) im Vergleich zu der AWA aus (i)?

Aufgabe 2.4
Zur AWA aus Stundenübung 2.3 (i) approximiere man y

(i) mittels der zugehörigen Prädiktor-Korrektor-Methode, wobei man als Korrekturschritt eine Fixpunktiteration nehme. Die nötigen Startwerte ermittele man mit dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung,

(ii) mittels der Milne-Prädiktor-Korrektor-Methode 4. Ordnung.

Aufgabe 2.5
Man zeige, dass das Verfahren $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$ zur Lösung der AWA

$$y' = -2y + 1, \quad 0 \le x \le 4, \quad y(0) = 1$$

numerisch instabil ist.

Hausübung

Hausaufgabe 2.1 (6 Punkte)
Die Anfangswertaufgabe

$$y' = 1 + (x - y)^2, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad y(2) = 1$$

hat die exakte Lösung $y(x) = x + (1 - x)^{-1}$.
Zur Schrittweite $h = 0.2$ approximiere man $y(2.8)$ mit den folgenden Prädiktor-Korrektor-Methoden, wobei man als Korrekturschritt eine Fixpunktiteration nehme. Die nötigen Startwerte ermittele man mit der exakten Lösung.

(i) Mittels der Prädiktor-Korrektor-Methode, die auf dem Adams-Bashforth-Vierschritt-Verfahren und dem Adams-Moulton-Dreischritt-Verfahren basiert,

(ii) mittels der Milne-Prädiktor-Korrektor-Methode 4. Ordnung.

Hausaufgabe 2.2 (6 Punkte)
Man betrachte die Anfangswertaufgabe $y' = 2y$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 1$. Zu den Schrittweiten $h = 1/4$, $h = 1/8$, $h = 1/16$ und $h = 1/32$ bestimme man mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem verbesserten Euler-Verfahren Näherungen für $y(1) = e^2$. Man bestimme jeweils den Fehler und aus aufeinanderfolgenden Schrittweiten Näherungen für die Konvergenzordnung der Verfahren.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 28.04.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Vorbesprechung Programmierübung (für diejenigen, die einen Schein brauchen): Dienstag, 22.4., 16:00 Uhr in F120

Sprechstunden

Prof. Dr. E. P. Stephan	Do	12:00 – 13:00	Raum F 122
F. Leydecker	Mi	11:00 – 12:00	Raum F 120

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 22.04.2003

1. Programmierübung zur Numerischen Mathematik II

Zu jedem Programm gebe man ein Listing des Programmcodes ab.

Programmieraufgabe 1.1
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $y' = x + y$, y(0)=1.
Man schreibe ein Programm, um einen Näherungswert für $y(0.2)$ zu bestimmen, und zwar für das

(i) Euler-Verfahren,

(ii) modifizierte Euler-Verfahren,

(iii) Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.

Zu den Schrittweiten $h = 0.1$, 0.05 und 0.025 gebe man in Tabellenform x- und y-Werte an.

Programmieraufgabe 1.2
Man programmiere das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung, um folgendes Anfangswertproblem zu lösen:

$$y'' + cy' + k^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Man gebe die Resultate für die Fälle $x \in [0, 3]$, $c = 0.1$, $k = 3.2$, $h = 0.2$, 0.1, 0.05 an.
Hinweis: Man schreibe die DGL 2. Ordnung als System zweier gewöhnlicher DGLn.

Programmieraufgabe 1.3
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $y' = x + y$, $y(0) = 0$ mit Lösung $y(x) = e^x - 1 - x$.
Man schreibe ein Programm, um zur Schrittweite $h = 1/32$ einen Näherungswert für $y(1)$ zu bestimmen, und zwar für

(i) das Adams-Bashforth-Verfahren

(ii) die Adams-Moulton Prädiktor-Korrektor-Methode (vierter Ordnung, ein Korrektor Schritt).

Als Anfangswerte nehme man die genauen Werte. Man gebe die x- und y-Werte und die Fehler in Tabellenform an.

Programmieraufgabe 1.4
Man schreibe ein Programm, um die Lösung der AWA aus Stundenübung 2.5 mit dem dort angegebenen Verfahren zur Schrittweite $h = 1/32$ zu approximieren. Als Anfangswerte nehme man die genauen Werte. Man gebe die x- und y-Werte und die Fehler in Tabellenform an.

Abgabe der Programmierübung bis Di. 13.05.03 um 16:00 Uhr.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 24.04.2003

3. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 3.1
Man löse die Randwertaufgabe

$$y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$$

mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = 0.1$.

Aufgabe 3.2
Man approximiere die Lösung der Randwertaufgabe

$$y''(x) + y(x) = 2\cos(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(\tfrac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi} y(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = \frac{\pi}{8}$.

Aufgabe 3.3
Die Randwertaufgabe

$$y'' = -2yy' + 2x, \quad 0.5 < y < 4, \quad y(0.5) = 2.5, \quad y(4) = 4.25$$

soll mit dem Schießverfahren behandelt werden.

Aufgabe 3.4
Mit welchen iterativen Methoden kann man das LGS lösen, das beim Lösen der Randwertaufgabe

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite h entsteht? Welches Problem tritt bei zunehmender Verfeinerung auf?

Hausübung

Hausaufgabe 3.1 (5 Punkte)
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y'' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Man finde eine Näherung zu y mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = \frac{1}{4}$. Man vergleiche die Werte mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$ in $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \frac{3}{4}$.

Hausaufgabe 3.2 (5 Punkte)
Für die Randwertaufgabe

$$y'' + x^2 y' - xy = x^2, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$$

finde man eine Näherung zu y mit der Methode der finiten Differenzen zur Schrittweite $h = \frac{1}{3}$.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 05.04.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Sprechstunden

Sabrina Dreier	Di	11:00 – 12:00	Raum G 001
Hauke Sander	Di	10:00 – 11:00	Raum G 001

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 05.05.2003

4. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 4.1
Die Randwertaufgabe

$$-u''(x) + \pi^2 u(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

ist mit dem Ritz-Verfahren zu lösen. Dabei nehme man S_h = Menge der stetigen und stückweise linearen Funktionen (h=0.1) (mit Basis aus Hutfunktionen).

Aufgabe 4.2
Man löse die Randwertaufgabe aus Aufgabe 4.1 mit dem Ritz-Verfahren unter Benutzung kubischer Spline-Funktionen (B-Splines).

Aufgabe 4.3
Man berechne eine Näherungslösung u_h der Randwertaufgabe

$$-u''(x) + u(x) = \cos(x), \quad 0 < x < \pi, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren. Dazu wähle man $S_h = \text{span}\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$. Man bestimme zusätzlich $-u_h''(x) + u_h(x)$.

Hausübung

Hausaufgabe 4.1 (8 Punkte)
Man stelle das LGS auf, das man beim Lösen der RWA

$$-u''(x) + u(x) = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren erhält. Dabei wähle man S_h^1 als Menge der stetigen und stückweise linearen Funktionen zur Schrittweite $h = 0.25$. Als Basis nehme man die Hutfunktionen.

Hausaufgabe 4.2 (6 Punkte)
Man berechne eine Näherungslösung u_h der Randwertaufgabe

$$-xu''(x) - u'(x) + \frac{u(x)}{x} = \cos(\tfrac{\pi}{2}x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u'(1) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren. Dazu wähle man $S_h = \text{span}\{x, x^2\}$.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 12.05.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 08.05.2003

5. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 5.1
Wir wollen die Randwertaufgabe

$$-u''(x) + u(x) = 1, \quad a < x < b, \quad u(a) = 0, u(b) = 0$$

mit der Methode dem Ritz-Verfahren lösen. Für S_h der Raum der

(i) stetigen, stückweise linearen Funktionen,

(ii) stetigen, stückweise quadratischen Funktionen,

(iii) stetig differenzierbaren, stückweise kubischen Funktionen

stelle man die lokalen und globalen Steifigkeits- und Massenmatrizen auf.

Aufgabe 5.2
Man löse die Randwertaufgabe

$$-u^{(4)}(x) + u(x) = 1, \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren. Wie sehen die Beiträge der lokalen Steifigkeitsmatrix für allgemeine Ansatzfunktionen aus?

Aufgabe 5.3
Gegeben seien $u \in H^2(a,b)$ und die Green'sche Funktion

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(b-y)}{b-a}, & a \leq x < y \leq b \\ \frac{(b-x)(y-a)}{b-a}, & a \leq y < x \leq b \end{cases}.$$

Man zeige, daß die Funktion $e(x) := -\int_a^b G(x,y)u''(y)dy$ die RWA

$$e''(x) = u''(x),\, a < x < b, \quad e(a) = e(b) = 0$$

erfüllt. Hieraus folgere man $e = u - u_I$, wobei u_I die linear Interpolierende zu u in den Endpunkten a, b ist.

Hausübung

Hausaufgabe 5.1 (9 Punkte)
Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-u^{(4)}(x) + u(x) = 1, \quad a < x < b, \quad u(a) = 0, u(b) = 0, u'(a) = 0, u'(b) = 0.$$

(i) Man berechne die lokale Steifigkeitsmatrix bei Verwendung stetig differenzierbarer, stückweise kubischen Funktionen (vgl. Stundenübungen 5.1 und 5.2).

(ii) Können für die obige RWA auch stetige, *nicht* differenzierbare Ansatzfunktionen (wie in Stundenübung 5.1 (i),(ii)) gewählt werden?

Abgabe der Hausübung bis Mo. 19.05.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Das Skript zur Vorlesung, Hausübungen, Lösungshinweise, sowie Aktuelles zur Vorlesung finden sich unter www.ifam.uni-hannover.de/~leydecke/numa2-03/

Die 1. Klausur findet am 22.05.03 von 10:00 bis 12:00 Uhr statt.
Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.
Bitte Studenten– sowie Lichtbildausweis mitbringen!

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

IfAM

Hannover, den 13.05.2003

2. Programmierübung zur Numerischen Mathematik II

Programmieraufgabe 2.1
Man schreibe ein Programm, das die Randwertaufgabe

$$-u''(x) + 2u(x) = 1, \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \, u(2) = 0$$

mit dem Ritz-Verfahren löst, und zwar für

(i) stetige, stückweise lineare,

(ii) stetige, stückweise quadratische,

(iii) stetig differenzierbare, stückweise kubische

Ansatzfunktionen. Für die Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ gebe man die Koeffizienten der Lösung an (Die Basisfunktionen wähle man wie in Stundenübung 5.1). Ferner drucke man ein Listing des Programmcodes.

Abgabe der Programmierübung bis Di. 03.06.03 um 16:00 Uhr.

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 15.05.2003

6. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 6.1
Es sei $B(\omega)$ die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens (=SOR-Verfahren) zur Lösung des LGS $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} b & c & & & & \\ a & b & c & & & \\ & a & b & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b & c \\ & & & & a & b \end{pmatrix}.$$

mit $b = 2/h^2$, $a = c = -1/h^2$ ist.

(i) Man bestimme alle Eigenwerte der Matrix $B(\omega)$.

(ii) Für $\omega = 1$ bestimme man den Spektralradius $\varrho(B(1))$.

Aufgabe 6.2
Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die optimale Wahl des Dämpfungsparameters ω beim SOR-Verfahren?

Aufgabe 6.3
Für das System

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & -1 & & & \cdots & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \vdots & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & \cdots & & & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{pmatrix}$$

schreibe man das Jacobi-Zeilen-Iterations-Verfahren in Matrix-Form und bestimme den Spektralradius der resultierenden Iterationsmatrix.

Das Skript zur Vorlesung, Hausübungen, Lösungshinweise, sowie Aktuelles zur Vorlesung finden sich unter www.ifam.uni-hannover.de/~leydecke/numa2-03/

Die 1. Klausur findet am 22.05.03 von 10:00 bis 12:00 Uhr statt.
Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.
Bitte Studenten– sowie Lichtbildausweis mitbringen!

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 26.05.2003

7. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 7.1
Betrachte die DuFort-Frankel Methode

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{n,j-1}}{2k} = a^2 \frac{U_{n-1,j} - (U_{n,j+1} + U_{n,j-1}) + U_{n+1,j}}{h^2}.$$

Man zeige, dass dieses Verfahren von Neumann stabil ist.

Aufgabe 7.2
Man zeige, dass die DuFort-Frankel Methode mit $u_t = a^2 u_{xx}$ konsistent ist, nur, wenn $\lim_{k,h\to 0} \frac{k}{h} = 0$.

Aufgabe 7.3
Man zeige, dass das explizite Verfahren

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{n,j}}{k} = a^2 \frac{U_{n+1,j} - 2U_{n,j} + U_{n-1,j}}{h^2} \tag{1}$$

einen lokalen Abbruchfehler $\mathcal{O}(k + h^2)$ hat. Falls

$$\frac{k}{h^2} = \frac{1}{6a^2}$$

gilt, dann kann der lokale Abbruchfehler auf $\mathcal{O}(k^2 + h^4)$ reduziert werden.

Aufgabe 7.4
Für $r := a^2 k/h^2 \leq 1/2$ ist die explizite Methode (1) konvergent, wenn sie auf das Problem

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= 0 && 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) && 0 < x < 1 \\ u(0,t) = p(t),\ u(1,t) &= q(t), && t > 0 \end{aligned}$$

angewendet wird.

Hausübung

Hausaufgabe 7.1 (5 Punkte)
Man zeige, dass das implizite Verfahren

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{n,j}}{k} = a^2 \frac{U_{n+1,j+1} - 2U_{n,j+1} + U_{n-1,j+1}}{h^2}$$

von Neumann stabil ist.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 02.06.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Das Skript zur Vorlesung, Hausübungen, Lösungshinweise, sowie Aktuelles zur Vorlesung finden sich unter
www.ifam.uni-hannover.de/~leydecke/numa2-03/

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 02.06.2003

8. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 8.1
Für das System

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & & & \cdots & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & \cdots & & & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{pmatrix}$$

bestimme man den Spektralradius der Iterationsmatrix

(i) des Jacobi–Verfahrens

(ii) des Jacobi-Zeilen-Iterations-Verfahrens

Aufgabe 8.2
Man gebe eine geometrische Interpretation des CG-Verfahrens für n=2.

Aufgabe 8.3
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 26 & -12 \\ -4 & 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ näherungsweise, indem man zwei Schritte mit dem CG-Verfahren durchführt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor.

Hausübung

Hausaufgabe 8.1 (8 Punkte)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ näherungsweise, indem man zwei Schritte mit dem CG-Verfahren durchführt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 16.06.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Das Skript zur Vorlesung, Hausübungen, Lösungshinweise, sowie Aktuelles zur Vorlesung finden sich unter
www.ifam.uni-hannover.de/~leydecke/numa2-03/

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 03.06.2003

3. Programmierübung zur Numerischen Mathematik II

Programmieraufgabe 3.1
Zum Problem aus Programmieraufgabe 2.1 verwende man ein graduiertes Gitter, d.h.

$$x_0 = 0,\, x_i = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Man stelle die Galerkin-Matrix für stetige, stückweise lineare Ansatzfunktionen und $n = 5, 10, 15$ auf. Man löse die Gleichungssysteme mit dem CG-Verfahren und dem vorkonditionierten CG-Verfahren, wobei man als Vorkonditionierer eine Diagonalmatrix, bestehend aus den Inversen der Diagonalelemente der Galerkinmatrix, benutzt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor, und als Abbruchkriterium benutze man $|x_i - x_{i-1}|/|x_{i-1}| < 0.0001$
Man gebe die Lösung sowie die Anzahl der benötigten Schritte der iterativen Löser an.
Ferner drucke man ein Listing des Programmcodes.

Programmieraufgabe 3.2
Man schreibe ein Programm, das mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad \text{in } \Omega = \{0 < x, y < 1\} \\ u(x,y) &= e^{2\pi x} \sin 2\pi y \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zur Schrittweite $h = 0.1$ approximiert. Man löse das Gleichungssystem mit dem Gauß-Seidel-Verfahren, dem Jacobi-Verfahren und dem SOR-Verfahren ($\omega = 1$ und $\omega = 1.528$). Man iteriere solange, bis das maximale Residuum kleiner als 0.005 ist.
Man gebe die Anzahl der benötigten Schritte an und vergleiche die Lösung mit der exakten Lösung $u = e^{2\pi x} \sin 2\pi y$. Wie könnte man die Lösung verbessern?
Ferner drucke man ein Listing des Programmcodes.

Abgabe der Programmierübung bis Di. 24.06.03 um 16:00 Uhr.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 16.06.2003

9. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 9.1
Wie lautet eine Finite-Differenzen-Methode der Ordnung $O(h^2)$ für das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x,y) \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g(x,y) \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

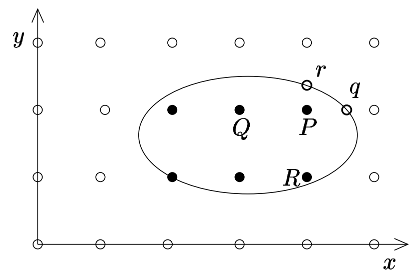
wobei Ω das Rechteck $0 < x < a, 0 < x < b$ darstellt?

Aufgabe 9.2
Man approximiere die Lösung von

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x^2 + y^2 < 1,\ y > 0 \\ u(x,y) &= 100, \quad x^2 + y^2 = 1,\ y > 0 \\ u(x,y) &= 0, \quad y = 0, -1 < x < 1 \end{aligned}$$

durch ein Differenzenverfahren mit quadratischem Gitter und $h = 0.5$. Man benutze dabei die $O(h)$-Approximation im Punkt $P = (x_m, y_n)$ zur Laplace-Gleichung:

$$\frac{U(Q)}{\alpha+1} + \frac{U(R)}{\beta+1} - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})U(P) + \frac{U(q)}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{U(r)}{\beta(\beta+1)}$$



Aufgabe 9.3 (i) Wie kann man die Methode der Finiten Differenzen auf die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten anwenden?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

(ii) Man löse Aufgabe 9.2 mit Hilfe von Polarkoordinaten, dabei benutze man ein Netz mit $\Delta r = 0.5$ und $\Delta\theta = \pi/4$.

Aufgabe 9.4
Welcher algebraischen Gleichung genügen die Eigenwerte der Aufgabe

$$-y'' = \lambda y \quad \text{mit } y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0,$$

wenn man sie näherungsweise nach dem Differenzenverfahren berechnet (Schrittweite $h = 1/2$) berechnet?

Hausübung

Hausaufgabe 9.1 (6 Punkte)
Man berechne für folgende Eigenwert-Aufgabe

$$\frac{1}{3}y'' + \lambda x y = 0 \quad \text{mit } y(0) = y(1) = 0$$

mit dem Differenzenverfahren (Schrittweite $h = 1/3$) näherungsweise die Eigenwerte

---

Abgabe der Hausübung bis Mo. 23.06.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

$\mathrm{I}^f\mathrm{AM}$

Hannover, den 19.06.2003

10. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 10.1
Die trigonometrischen Funktionen $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx)$ bilden für das Intervall $[-\pi, \pi]$ ein System von paarweise orthogonalen Funktionen. Es gelten folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\cos(kx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{für alle } j \neq k \\ 2\pi & \text{für } j = k = 0 \\ \pi & \text{für } j = k > 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{für alle } j \neq k,\ j,\ k > 0 \\ \pi & \text{für } j = k > 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\sin(kx)\,dx &= 0 \quad \text{für alle } j \geq 0,\ k > 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.2
Für $N \in \mathbb{N}$ sei $x_j = \frac{2\pi}{N} j$, $(j = 0, 1, 2, \ldots, N)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \cos(kx_j)\cos(lx_j) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{k+l}{N} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{N}{2}, & \text{falls entweder } \frac{k+l}{N} \in \mathbb{Z} \text{ oder } \frac{k-l}{N} \in \mathbb{Z} \\ N, & \text{falls } \frac{k+l}{N} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
\sum_{j=1}^{N} \sin(kx_j)\sin(lx_j) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{k+l}{N} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \notin \mathbb{Z} \\ & \text{oder } \frac{k+l}{N} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \in \mathbb{Z} \\ -\frac{N}{2}, & \text{falls } \frac{k+l}{N} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{N}{2}, & \text{falls } \frac{k+l}{N} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N} \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
\sum_{j=1}^{N} \cos(kx_j)\sin(lx_j) &= 0 \qquad \text{für alle } k,\ l \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.3
Man zeige folgende Gleichungen aus der Vorlesung

$$\begin{aligned}
a_k^* - ib_k^* &= \frac{1}{N}(c_k + \bar{c}_{n-k}) - \frac{i}{N}(c_k - \bar{c}_{n-k})e^{-ik\pi/n} \\
a_{n-k}^* - ib_{n-k}^* &= \frac{1}{N}(\bar{c}_k + c_{n-k}) - \frac{i}{N}(\bar{c}_k - c_{n-k})e^{ik\pi/n}
\end{aligned}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$, falls $b_0^* = b_n^* = 0$ und $c_n = c_0$ gesetzt wird.

Aufgabe 10.4
Man berechne die diskrete, komplexe Fourierentwicklung der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

mittels der FFT (schnelle Fouriertransformation, „fast Fourier transform“) zu $N = 8$.

Aufgabe 10.5
Man vergleiche den Rechenaufwand der „normalen“ diskreten, komplexen Fouriertransformation mit dem der FFT.

Hausübung

Hausaufgabe 10.1 (8 Punkte)
Man berechne die diskrete, komplexe Fourierentwicklung der 2π-periodischen Funktion $f(x) = |\sin x|$ mittels der FFT zu $N = 8$. Man ermittele daraus die entsprechende diskrete, reelle Fourierentwicklung.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 30.06.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, F. Leydecker

Hannover, den 26.06.2003

11. Übung zur Numerischen Mathematik II

Aufgabe 11.1
Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

berechne man näherungsweise die Eigenwerte mit dem Jacobi-Verfahren

Aufgabe 11.2
Man zeige:

(i) Die QR-Transformierte einer Hessenbergmatrix ist wieder eine Hessenbergmatrix.

(ii) Die QR-Transformierte einer symmetrischen Matrix ist wieder eine symmetrische Matrix. Insbesondere ist die QR-Transformierte einer symmetrischen tridiagonalen Matrix wieder symmetrisch und tridiagonal.

Aufgabe 11.3
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Eigenwerte mit dem

(i) QR-Verfahren,

(ii) QR-Verfahren mit Rayleigh-Shift.

Aufgabe 11.4
Man nähere die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

an, indem man einen Schritt mit dem QR-Verfahren mit Wilkinson-Shift durchführt.

Aufgabe 11.5
Man berechne das Ausgleichspolynom 2. Grades für die Punkte (0,3), (2,5), (3,5), (5,-3), (6,0).

Hausübung

Hausaufgabe 11.1 (7 Punkte)
Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

führe man einen Schritt des QR-Verfahrens mit Rayleigh-Shift durch.

Abgabe der Hausübung bis Mo. 07.07.03 um 10:00 Uhr.
Bitte in den Kasten auf dem Gang gegenüber dem UNIX-Terminal-Raum werfen.