Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hannover
Prof. Dr. E. P. Stephan, M. Teltscher

Hannover, den 27.01.2003

Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik I

Hausaufgabe 1.1 (7 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.

(i) Man bestimme das Interpolationspolynom p von f zu den Knoten $x_i = -1 + i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

(ii) Man rechne nach, daß $f(x) = p(x) + \omega(x)$ gilt, wobei $\omega(x)$ das Knotenpolynom ist. Man beweise, daß diese Aussage unabhängig von der Wahl der Stützstellen $x_i, i = 1, \ldots, 3$ gilt.

(iii) Man berechne den exakten Interpolationsfehler im Punkt $x = 0.5$.

Lösung.

(i) dividierte Differenzen $\Rightarrow f[x_0] = 10,\ f[x_0, x_1] = -9,\ f[x_0, x_1, x_2] = 5,\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -2$
$\Rightarrow p(x) = 10 + (x + 1)(-9 + (x - 0)(5 + (x - 1)(-2))) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 1.$ ③

(ii) $f(x) - p(x) = \frac{\omega(x)}{4!} f^{(4)}(\xi(x)),\ \xi(x) \in (-1, 2),\ f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{\omega(x)}{4!} \cdot 24 = \omega(x).$ ③

(iii) $f(0.5) - p(0.5) = 0.5625.$ ①

□

Hausaufgabe 2.1 (9 Punkte)

Interpoliere die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ auf dem Intervall $I = [-4, 4]$ durch

(i) die Funktion p_3 mit den Stützstellen $x_k = -3 + 2k$, $k = 0, \dots, 3$,

(ii) die Funktion p_3^* mit den Stützstellen $x_0, \dots, x_3$ als Nullstellen des vierten Tschebyscheff-Polynoms T_4.

(iii) Man skizziere die Funktionen f, p_3 und p_3^*.

(iv) Man schätze den Fehler $\|f - p_3^*\|_{\infty,I}$. Dazu berechne man $\|\omega\|_{\infty,I}$ exakt und verwende (ohne Beweis) $\|f^{(4)}\|_{\infty,I} = |f^{(4)}(0)|$.

Lösung.

(i) dividierte Differenzen $\Rightarrow f[x_0] = \frac{1}{10}$, $f[x_0, x_1] = \frac{1}{5}$, $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1}{20}$, $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$
$\Rightarrow p_3(x) = \frac{1}{10} + (x+3)(\frac{1}{5} + (x+1)\frac{-1}{20}) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{11}{20}$. 2

(ii) $\tilde{x}_k = 4\cos(\frac{k+1/2}{4}\pi)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
$\tilde{x}_0 \doteq 3.69552 =: x_3$,
$\tilde{x}_1 \doteq 1.53073 =: x_2$,
$\tilde{x}_2 \doteq -1.53073 =: x_1$,
$\tilde{x}_3 \doteq -3.69552 =: x_0$.
dividierte Differenzen $\Rightarrow p_3^*(x) = 0.0682275 + (x - x_0)(0.106658 - (x - x_1)0.0204081)$
$= -0.0204081x^2 + 0.346938$. 2.5

(iii) Man zeichne $f(x)$ und verwende die Interpolationseigenschaften um p und p^* zu skizzieren ($p(-3) = f(-3)$, $\dots$). 1.5

(iv) Es ist $\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_3) = 4^4(\frac{x-x_0}{4})\cdots(\frac{x-x_3}{4}) = 4^4\hat{\omega}(\hat{x})$ mit $\hat{\omega}(\hat{x})$ Knotenpolynom für Tschebyscheff-Knoten $\hat{x} \in [-1, 1] \Rightarrow \|\omega\|_{\infty,[-4,4]} = 4^4\|\hat{\omega}\|_{\infty,[-1,1]} = 4^4 \cdot 2^{-3} = 2^5$. 1
Nun gilt
$\|f - p_3^*\|_{\infty,[-4,4]} \leq \frac{\|\omega\|_{\infty,[-4,4]}}{4!}\|f^{(4)}\|_{\infty,[-4,4]} = \frac{2^5}{4!}|f^{(4)}(0)| = \frac{2^5}{4!} \cdot 24 = 32$. 2

$\square$

Hausaufgabe 3.1 (8 Punkte)
Gesucht ist der kubische Spline ψ, der folgende Bedingungen erfüllt:

$$\psi(0) = \tfrac{1}{4}, \quad \psi(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{3}, \quad \psi(\tfrac{1}{2}) = 0, \quad \psi''(0) = 0, \quad \psi''(\tfrac{1}{2}) = 24.$$

(i) Man berechne die Koeffizienten von ψ zur B-Spline-Basis.

(ii) Man berechne $\psi'(0)$, $\psi'(\frac{1}{4})$, $\psi'(\frac{1}{2})$ und skizziere die Funktion ψ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Lösung.

(i) LGS wie in Stundenübung aufstellen:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & 96 & -192 & 96 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/3 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_{-1} = 0$, $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$. ⑤

(ii)

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= \tfrac{1}{2h}(\alpha_1 - \alpha_{-1}) = 1, \\ \psi'(\tfrac{1}{4}) &= \tfrac{1}{2h}(\alpha_2 - \alpha_0) = -1, \\ \psi'(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2h}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0. \end{aligned}$$

1.5

Skizze fehlt hier. Man kennt die Werte von ψ und ψ' and den Stellen 0, $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{2}$. Das genügt, um eine Skizze zu erstellen. 1.5

□

Hausaufgabe 4.1 (7 Punkte)
Es ist das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei eine *approximative* LR-Zerlegung von A, nämlich $A \approx LR$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne mit den angegebenen Matrizen L und R eine Näherungslösung $x^{(0)}$.

(ii) Man berechne ein $x^{(1)}$ mit der Methode der Nachiteration.

(iii) Ist $x^{(1)}$ eine bessere Lösung als $x^{(0)}$? (Berechne dazu die echte Lösung x und betrachte die euklidische Norm des Fehlers.)

Lösung.

(i) $Ly = b \Rightarrow y = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

$Rx^{(0)} = y \Rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$ ②

(ii) $Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.25 \\ -0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow r(x^{(0)}) = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.25 \\ 1.25 \end{pmatrix},$

$Ly = r(x^{(0)}) \Rightarrow y = r(x^{(0)}),$

$R\delta = y \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.08333 \\ 0.625 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + \delta = \begin{pmatrix} 0.8125 \\ 0.91667 \\ 1.125 \end{pmatrix}.$ ③

(iii) Exakte Lösung $x = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$, ⓪⑤
$\Rightarrow \|x - x^{(0)}\|_2 \doteq 0.559$, $\|x - x^{(1)}\|_2 \doteq 0.240$. ①
$\Rightarrow x^{(1)}$ ist eine bessere Näherung als $x^{(0)}$. ⓪⑤

□

Hausaufgabe 4.2 (4 Punkte)
Es sei A die positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die LR-Zerlegung von A.

(ii) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 9, 2, -1)^\mathsf{T}$.

Lösung.

(i) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & 2/3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$. ②⑤

(ii) $x = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\mathsf{T}$. ①⑤

□

Hausaufgabe 5.1 (4 Punkte)
Es sei A die positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die Cholesky-Zerlegung von A.

(ii) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (3, 9, 2, -1)^\mathsf{T}$.

Lösung.

(i) $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. ③

(ii) $x = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^\mathsf{T}$ (vgl. Hausübung 4.2). ①

□

Hausaufgabe 5.2 (5 Punkte)
Es sei $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige: Wenn $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|C\| < 1$, so gelten

$$(I - C)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C^\nu, \quad C^0 := I = \text{Einheitsmatrix}$$

und

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Hinweis: Man zeige zuerst, daß gilt: $(I - C)\sum_{\nu=0}^{k} C^\nu = I - C^{k+1}$.

Lösung. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$(I - C)\sum_{\nu=0}^{k} C^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} C^\nu - \sum_{\nu=0}^{k} C^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{k} C^\nu - \sum_{\nu=1}^{k+1} C^\nu = C^0 - C^{k+1} = I - C^{k+1}. \quad (*)$$

①

Nun gilt
$\|\lim_{k\to\infty} C^k\| = \lim_{k\to\infty} \|C^k\| \leq \lim_{k\to\infty} \|C\|^k = 0.$
Das erste „=“ gilt, da Normen stetig sind, das „≤“ ist die Matrixnorm-Eigenschaft, und das zweite „=“ gilt wegen $\|C\| < 1$. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, gilt damit $\lim_{k\to\infty} C^k = 0 \quad (**)$. ①
Mit $(*)$ und $(**)$ gilt nun $(I - C)\sum_{\nu=0}^{\infty} C^\nu = I$, also $\sum_{\nu=0}^{k} C^\nu = (I - C)^{-1}$. ①
Außerdem gilt

$$\|(I - C)^{-1}\| = \|\sum_{\nu=0}^{k} C^\nu\| \leq \sum_{\nu=0}^{k} \|C^\nu\| \leq \sum_{\nu=0}^{k} \|C\|^\nu = \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Das erste „≤“ ist die Dreiecksungleichung, das zweite „≤“ die Matrixnorm-Eigenschaft, das letzte „=“ einfach die geometrische Reihe für reelle Zahlen. ②

□

Hausaufgabe 6.1 (9 Punkte)
Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & -3 & 0.2 \\ 1 & -0.2 & 2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die exakte Lösung x.

(ii) Man führe drei Schritte mit dem Jacobi- (Gesamtschritt-)Verfahren durch und berechne $\|x - x_J^{(3)}\|_2$. Als Startwert nehme man den Nullvektor.

(iii) Man führe drei Schritte mit dem Gauß-Seidel- (Einzelschritt-)Verfahren durch und berechne $\|x - x_{GS}^{(3)}\|_2$. Als Startwert nehme man den Nullvektor.

(iv) Kann man mit Hilfe der Sassenfeldschen Zahlen eine Fehlerabschätzung für das Gauß-Seidel-Verfahren angeben?

Lösung.

(i) $x = (2.1, 1, -1)^\mathsf{T}$. ①

(ii) $x_J^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.3\bar{6} \\ -0.05 \end{pmatrix}, \ x_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.78\bar{3} \\ 0.99\bar{6} \\ -0.96\bar{3} \end{pmatrix}, \ x_J^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.079\bar{3} \\ 0.896\bar{8} \\ -0.842 \end{pmatrix}.$

$\|x - x_J^{(3)}\|_2 \doteq 0.1898046.$ ③

(iii) $x_{GS}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1 \\ -0.9 \end{pmatrix}, \ x_{GS}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.04 \\ 0.98\bar{6} \\ -0.971\bar{3} \end{pmatrix}, \ x_{GS}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.0881\bar{3} \\ 0.9979\bar{5} \\ -0.99427\bar{1} \end{pmatrix}.$

$\|x - x_{GS}^{(3)}\|_2 \doteq 0.01333483.$ ③

(iv) $\beta = \max_{i=1,2,3} \beta_i \geq \beta_1 = \frac{0.4+0.6}{1} = 1 \Rightarrow$ keine Fehlerabschätzung möglich! ①

Die Ergebnisse können je nach Rechengenauigkeit ein bißchen variieren. □

Hausaufgabe 6.2 (3 Punkte)
Ist die Iterationsmatrix $M = -(D + A_L)^{-1} A_R$ des Einzelschrittverfahrens invertierbar?

Lösung. Nein, denn A_R ist obere Dreieckmatrix mit Nullen auf der Diagonalen $\Rightarrow \det A_R = 0 \Rightarrow \det M = 0.$ ③
□

Hausaufgabe 7.1 (9 Punkte)

Gesucht ist die Nullstelle (x^*, y^*) der Funktion $F(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2x \\ x^2 - y^2 - y \end{pmatrix}$ mit $0 < x, y < 2$.

(i) Dazu führe man zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren (Startwert $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1,1)$) durch.

(ii) Man zeige, daß x^* bzw. y^* die Gleichungen

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4 = 0$$

lösen.

(iii) Man führe für jedes der Gleichungen aus (ii) zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren durch (Startwerte $x_0 = 1$, $y_0 = 1$).

Lösung.

(i) $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ 2x & -2y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow (F'(x,y))^{-1} = \dfrac{1}{-8xy - 2x + 4y + 2} \begin{pmatrix} -2y-1 & -2y \\ -2x & 2x-2 \end{pmatrix}$ ①

$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$. ①

$F(1.5, 1) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.36\bar{1} \\ 0.9\bar{4} \end{pmatrix}$. ①

(ii) Es gilt $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (1) und $x^2 - y^2 - y = 0$ (2).
(1) $\Rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$ da $y > 0$. Einsetzen in (2) liefert $x^2 - (2x - x^2) = \sqrt{2x - x^2}$.
Quadrieren $\Rightarrow 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0$. ②
(2) $\Rightarrow x = \sqrt{y + y^2}$ da $x > 0$. Einsetzen in (1) liefert $2y^2 + y = 2\sqrt{y + y^2}$.
Quadrieren $\Rightarrow 4y^4 + 4y^3 + y^2 = 4y + 4y^2 \Rightarrow 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4 = 0$. ②

(iii) $g(x) := 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2$, $g'(x) = 12x^2 - 16x + 5$

$x_0 = 1$, $x_1 = 1 - \dfrac{-1}{1} = 2$, $x_2 = 2 - \dfrac{8}{21} \doteq 1.61905$. ①

$h(y) := 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4$, $h'(y) = 12y^2 + 8y - 3$

$y_0 = 1$, $y_1 = 1 - \dfrac{1}{17} \doteq 0.941177$, $y_2 = 0.941177 - \dfrac{0.0545492}{15.1592} \doteq 0.937578$. ①

□

Hausaufgabe 8.1 (8 Punkte)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 26 & -12 \\ -4 & 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ näherungsweise, indem man zwei Schritte mit dem CG-Verfahren durchführt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor.

Lösung. $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r^0 = -b^0 = -p^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix}$ 1

$Ap^0 = \begin{pmatrix} -88 \\ 20 \\ -180 \\ 156 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \dfrac{-304}{2744} = -0.110787, \quad x^1 = x^0 - \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} -1.10787 \\ 0.221574 \\ 0.221574 \\ 1.55102 \end{pmatrix}$ 2

$r^1 = r^0 - \alpha_0 Ap^0 = \begin{pmatrix} 0.250729 \\ 0.215743 \\ -21.9417 \\ 3.28280 \end{pmatrix}, \quad \beta_0 = \dfrac{4443.87}{2744} = 1.61949, \quad p^1 = r^1 - \beta_0 p^0 = \begin{pmatrix} 16.4456 \\ -3.02323 \\ -25.1807 \\ -19.3900 \end{pmatrix}$ 2.5

$Ap^1 = \begin{pmatrix} -1.69508 \\ 11.4237 \\ -317.297 \\ 42.4854 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \dfrac{-492.324}{7103.54} = 0.0693068, \quad x^2 = x^1 - \alpha_1 p^1 = \begin{pmatrix} -2.24766 \\ 0.431105 \\ 1.96677 \\ 2.89488 \end{pmatrix}$ 2.5

(Exakte Lösung $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$) □

Hausaufgabe 9.1 (8 Punkte)
Wir betrachten den Raum $L^2(I,w)$ mit $I=[-1,1]$ und $w(x)=1$. Es sei P_n der Raum der Polynome bis zum Grad n. Für $i=1,2,3$ bestimme man die beste Approximation $v_i \in \mathbb{P}_{i-1}$ zu

$$u(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

und gebe den Fehler $\|u - v_i\|_{L^2(I)}$ an. Desweiteren zeichne man u und v_i $(i=1,2,3)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung. $\langle u, l_1\rangle = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \langle u, l_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad \langle u, l_3\rangle = \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ②

$v_i = \sum_{j=1}^{i}\langle u, l_i\rangle l_i \Longrightarrow v_1(x) = \dfrac{1}{4},\ v_2(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}x,\ v_3(x) = \dfrac{3}{32} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{32}x^2$ ②

Hier sind v_1, v_2 und v_3 eingezeichnet. Die Funktion u möge man selber ergänzen! ②

$\|u - v_i\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{i}\langle u, l_i\rangle^2, \quad \|u\|^2 = \dfrac{1}{3}$

$\Longrightarrow \|u - v_1\| = \sqrt{\dfrac{5}{24}} = 0.45644, \quad \|u - v_2\| = \sqrt{\dfrac{1}{24}} = 0.20412, \quad \|u - v_3\| = \sqrt{\dfrac{1}{384}} = 0.051031.$ ② □

Hausaufgabe 10.1 (4 Punkte)
Es sei $f(y) = \dfrac{\cos\frac{\pi}{8}y}{\sqrt{y^2+y}}$. Man approximiere das Integral $\int_0^4 f(y)\,dy$ mit Hilfe der Mittelpunktregel, der Trapezregel und der Simpson-Regel. Dazu substituiere man zuerst $y = x^2$. Warum ist dies nötig?

Lösung.

$$\int_0^4 f(y)dy = \int_0^4 \frac{\cos(\frac{\pi}{8}y)}{\sqrt{y^2+y}}dy = \int_0^2 \frac{\cos(\frac{\pi}{8}x^2)}{\sqrt{x^4+x^2}}2x\,dx = \int_0^2 \frac{2\cos(\frac{\pi}{8}x^2)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =: \int_0^2 g(x)dx. \quad ①$$

$I^M(g) = 2g(1) \doteq 2.6131259,$
$I^T(g) = \frac{2}{2}(g(0)+g(2)) = 2+0 = 2,$
$I^S(g) = \frac{2}{6}(g(0)+4g(1)+g(2)) = \frac{1}{2}(2+4g(1)) \doteq 2.4087506$ ②

Die Substitution ist nötig, da $f(0)$ nicht auswertbar ist! ①
□

Hausaufgabe 10.2 (4 Punkte)
Gegeben eine Quadraturformel der Gestalt $I(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ zur Approximation von $\int_a^b f(t)\,dt$. Man zeige, daß $I(f)$ Polynome vom Grad $2n+2$ nicht mehr exakt integriert.

Lösung. Definiere $f(x) := \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$. Es ist $f(x_i) = 0$, also auch $I(f) = 0$. ②
Aber wegen $f(x) > 0\ \forall x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ gilt $\int_a^b f(x)dx > 0$. ②
□

Hausaufgabe 11.1 (8 Punkte)
Es soll die Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ numerisch über das Intervall [0,1] integriert werden.

(i) Substituiere im Integral $x = t^2$. Was gewinnt man hierbei?

(ii) Nun führe man die summierte Trapezregel mit $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ für den neuen Integranden durch.

(iii) Man verbessere das Ergebnis durch Extrapolation aus diesen Werten mit dem Romberg-Schema.

(iv) Man berechne das gesuchte Integral (nach der Substitution aus (i)) näherungsweise mit der Gauß-Quadraturformel mit drei Knoten.

Lösung. (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt$. Damit ist $g(t)$ beliebig oft differenzierbar (auch bei $t = 0$), so daß sämtliche Quadraturarten und auch Rombergextrapolation sinnvoll sind. ⑮

(ii) $T(1) = T_{0,0} = 0.5$, $T(\frac{1}{2}) = T_{1,0} = 0.45$, $T(\frac{1}{4}) = T_{2,0} = 0.4344117647$, $T(\frac{1}{8}) = T_{3,0} = 0.4305057528$ ②

(iii) $T_{1,1} = 0.4\bar{3}$, $T_{2,1} = 0.4292156863$, $T_{3,1} = 0.4292037488$
$T_{2,2} = 0.4289411765$, $T_{3,2} = 0.4292029529$, $T_{3,3} = 0.4292071081$ ㉕

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{(s+1)^2}{4+(s+1)^2}}_{:=\varphi(s)} ds \approx \frac{5}{9}(\varphi(-\sqrt{3/5}) + \varphi(\sqrt{3/5})) + \frac{8}{9}\varphi(0) \doteq 0.42946593$ ②

□

Hausaufgabe 12.1 (5 Punkte)
Man berechne das Integral $\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\,dx$ näherungsweise mit der Gauß-Quadraturformel mit drei Knoten und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert.

Lösung. Gauß mit drei Knoten (Substitution $x = \ln t$, $t = \frac{1}{2}(s+1)$):

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}dx = \int_0^1 t\ln t\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(s+1)\ln(\frac{s+1}{2})\,ds =: \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} g(s)ds$$
$$\approx \frac{1}{4}(\frac{5}{9}(g(-\sqrt{3/5}) + g(\sqrt{3/5})) + \frac{8}{9}g(0)) \doteq -0.251845708.$$

③

Exakt:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = -\frac{1}{4}xe^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

⑮

Vergleich: Fehler $= 1.85 \cdot 10^{-3}$ ⓪⑤
□

Hausaufgabe 12.2 (3 Punkte)
Es sei $I(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ eine Quadraturformel für $\int_a^b f(x)dx$ mit dem Exaktheitsgrad $m \in \mathbb{N}$ (d.h. $E(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_m$). Es gelte $a < x_0 < \ldots < x_n < b$. Weiter sei $K_m(t) := \frac{1}{m!} E_x([(x-t)_+]^m)$ der zugehörige Peano-Kern. Man zeige

$$K_m(a) = K_m(b) = 0.$$

Lösung. Es ist $K_m(t) = \frac{1}{m!}(\int_a^b [(x-t)_+]^m dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i [(x_i - t)_+]^m)$, also der Quadraturfehler für die Funktion $[(x-t)_+]^m$.
Für $t = a$ ist $[(x-a)_+]^m = (x-a)^m$ für alle $x > a$ und $[(x_i - a)_+]^m = (x_i - a)^m$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $K_m(a) = \frac{1}{m!}(\int_a^b (x-a)^m dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x_i - a)^m) = E_x((x-a)^m) = 0$ wegen $E(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_m$. ②
Für $t = b$ ist $[(x-b)_+]^m = 0$ für alle $x < b$ und $[(x_i - b)_+]^m = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $K_m(b) = 0$. ①

$\square$