

## Lösungen zu den Hausübung zur Numerischen Mathematik I

### Hausaufgabe 1.1 (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$ .

- (i) Man bestimme das Interpolationspolynom  $p$  von  $f$  zu den Knoten  $x_i = -1 + i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).
- (ii) Man rechne nach, daß  $f(x) = p(x) + \omega(x)$  gilt, wobei  $\omega(x)$  das Knotenpolynom ist. Man beweise, daß diese Aussage unabhängig von der Wahl der Stützstellen  $x_i, i = 1, \dots, 3$  gilt.
- (iii) Man berechne den exakten Interpolationsfehler im Punkt  $x = 0.5$ .

Lösung.

- (i) dividierte Differenzen  $\Rightarrow f[x_0] = 10, f[x_0, x_1] = -9, f[x_0, x_1, x_2] = 5, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -2$   
 $\Rightarrow p(x) = 10 + (x + 1)(-9 + (x - 0)(5 + (x - 1)(-2))) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 1.$  ③
- (ii)  $f(x) - p(x) = \frac{\omega(x)}{4!} f^{(4)}(\xi(x)), \xi(x) \in (-1, 2), f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{\omega(x)}{4!} \cdot 24 = \omega(x).$  ③
- (iii)  $f(0.5) - p(0.5) = 0.5625.$  ①

□

**Hausaufgabe 2.1** (9 Punkte)

Interpoliere die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  auf dem Intervall  $I = [-4, 4]$  durch

- (i) die Funktion  $p_3$  mit den Stützstellen  $x_k = -3 + 2k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ ,
- (ii) die Funktion  $p_3^*$  mit den Stützstellen  $x_0, \dots, x_3$  als Nullstellen des vierten Tschebyscheff-Polynoms  $T_4$ .
- (iii) Man skizziere die Funktionen  $f$ ,  $p_3$  und  $p_3^*$ .
- (iv) Man schätze den Fehler  $\|f - p_3^*\|_{\infty, I}$ . Dazu berechne man  $\|\omega\|_{\infty, I}$  exakt und verwende (ohne Beweis)  $\|f^{(4)}\|_{\infty, I} = |f^{(4)}(0)|$ .

Lösung.

(i) dividierte Differenzen  $\Rightarrow f[x_0] = \frac{1}{10}$ ,  $f[x_0, x_1] = \frac{1}{5}$ ,  $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1}{20}$ ,  $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$   
 $\Rightarrow p_3(x) = \frac{1}{10} + (x+3)\left(\frac{1}{5} + (x+1)\frac{-1}{20}\right) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{11}{20}$ . ②

(ii)  $\tilde{x}_k = 4 \cos\left(\frac{k+1/2}{4}\pi\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

$\tilde{x}_0 \doteq 3.69552 =: x_3$ ,

$\tilde{x}_1 \doteq 1.53073 =: x_2$ ,

$\tilde{x}_2 \doteq -1.53073 =: x_1$ ,

$\tilde{x}_3 \doteq -3.69552 =: x_0$ .

dividierte Differenzen  $\Rightarrow p_3^*(x) = 0.0682275 + (x - x_0)(0.106658 - (x - x_1)0.0204081)$   
 $= -0.0204081x^2 + 0.346938$ . ⑤

(iii) Man zeichne  $f(x)$  und verwende die Interpolationseigenschaften um  $p$  und  $p^*$  zu skizzieren ( $p(-3) = f(-3)$ , ...). ⑬

(iv) Es ist  $\omega(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_3) = 4^4 \left(\frac{x-x_0}{4}\right) \cdots \left(\frac{x-x_3}{4}\right) = 4^4 \hat{\omega}(\hat{x})$  mit  $\hat{\omega}(\hat{x})$  Knotenpolynom für Tschebyscheff-Knoten  $\hat{x} \in [-1, 1] \Rightarrow \|\omega\|_{\infty, [-4, 4]} = 4^4 \|\hat{\omega}\|_{\infty, [-1, 1]} = 4^4 \cdot 2^{-3} = 2^5$ . ①

Nun gilt

$\|f - p_3^*\|_{\infty, [-4, 4]} \leq \frac{\|\omega\|_{\infty, [-4, 4]}}{4!} \|f^{(4)}\|_{\infty, [-4, 4]} = \frac{2^5}{4!} |f^{(4)}(0)| = \frac{2^5}{4!} \cdot 24 = 32$ . ②

□

**Hausaufgabe 3.1** (8 Punkte)

Gesucht ist der kubische Spline  $\psi$ , der folgende Bedingungen erfüllt:

$$\psi(0) = \frac{1}{4}, \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \psi''(0) = 0, \quad \psi''\left(\frac{1}{2}\right) = 24.$$

(i) Man berechne die Koeffizienten von  $\psi$  zur B-Spline-Basis.

(ii) Man berechne  $\psi'(0)$ ,  $\psi'\left(\frac{1}{4}\right)$ ,  $\psi'\left(\frac{1}{2}\right)$  und skizziere die Funktion  $\psi$  auf dem Intervall  $[0, \frac{1}{2}]$ .

Lösung.

(i) LGS wie in Stundenübung aufstellen:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 96 & -192 & 96 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/3 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_{-1} = 0, \alpha_0 = \frac{1}{4}, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{2}. \quad \textcircled{5}$$

(ii)

$$\psi'(0) = \frac{1}{2h}(\alpha_1 - \alpha_{-1}) = 1,$$

$$\psi'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2h}(\alpha_2 - \alpha_0) = -1,$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2h}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.$$

*Skizze fehlt hier.* Man kennt die Werte von  $\psi$  und  $\psi'$  an den Stellen  $0$ ,  $\frac{1}{4}$ , und  $\frac{1}{2}$ . Das genügt, um eine Skizze zu erstellen. ⑬

⑬

□

**Hausaufgabe 4.1** (7 Punkte)

Es ist das Gleichungssystem  $Ax = b$  zu lösen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei eine *approximative* LR-Zerlegung von  $A$ , nämlich  $A \approx LR$  mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne mit den angegebenen Matrizen  $L$  und  $R$  eine Näherungslösung  $x^{(0)}$ .

(ii) Man berechne ein  $x^{(1)}$  mit der Methode der Nachiteration.

(iii) Ist  $x^{(1)}$  eine bessere Lösung als  $x^{(0)}$ ? (Berechne dazu die echte Lösung  $x$  und betrachte die euklidische Norm des Fehlers.)

Lösung.

$$(i) \quad Ly = b \Rightarrow y = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$Rx^{(0)} = y \Rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{2}$$

$$(ii) \quad Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.25 \\ -0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow r(x^{(0)}) = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.25 \\ 1.25 \end{pmatrix},$$
$$Ly = r(x^{(0)}) \Rightarrow y = r(x^{(0)}),$$
$$R\delta = y \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.08333 \\ 0.625 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + \delta = \begin{pmatrix} 0.8125 \\ 0.91667 \\ 1.125 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{3}$$

$$(iii) \quad \text{Exakte Lösung } x = (1, 1, 1)^T, \quad \textcircled{0.5}$$
$$\Rightarrow \|x - x^{(0)}\|_2 \doteq 0.559, \|x - x^{(1)}\|_2 \doteq 0.240. \quad \textcircled{1}$$
$$\Rightarrow x^{(1)} \text{ ist eine bessere Näherung als } x^{(0)}. \quad \textcircled{0.5}$$

□

#### Hausaufgabe 4.2 (4 Punkte)

Es sei  $A$  die positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die LR-Zerlegung von  $A$ .

(ii) Man löse das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = (3, 9, 2, -1)^T$ .

Lösung.

$$(i) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & 2/3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{2.5}$$

$$(ii) \quad x = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T. \quad \textcircled{1.5}$$

□

**Hausaufgabe 5.1** (4 Punkte)

Es sei  $A$  die positiv definite Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -10 \\ 6 & 18 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ -10 & -9 & 2 & 94 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die Cholesky-Zerlegung von  $A$ .

(ii) Man löse das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $b = (3, 9, 2, -1)^T$ .

Lösung.

$$(i) S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{3}$$

$$(ii) x = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T \text{ (vgl. Hausübung 4.2)}. \quad \textcircled{1}$$

□

**Hausaufgabe 5.2** (5 Punkte)

Es sei  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm auf  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Man zeige: Wenn  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\|C\| < 1$ , so gelten

$$(I - C)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{\nu}, \quad C^0 := I = \text{Einheitsmatrix}$$

und

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Hinweis: Man zeige zuerst, daß gilt:  $(I - C) \sum_{\nu=0}^k C^{\nu} = I - C^{k+1}$ .

Lösung. Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$(I - C) \sum_{\nu=0}^k C^{\nu} = \sum_{\nu=0}^k C^{\nu} - \sum_{\nu=0}^k C^{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^k C^{\nu} - \sum_{\nu=1}^{k+1} C^{\nu} = C^0 - C^{k+1} = I - C^{k+1}. \quad (*)$$

①

Nun gilt

$$\|\lim_{k \rightarrow \infty} C^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|C^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|C\|^k = 0.$$

Das erste „ $=$ “ gilt, da Normen stetig sind, das „ $\leq$ “ ist die Matrixnorm-Eigenschaft, und das zweite „ $=$ “ gilt wegen  $\|C\| < 1$ . Da  $\|\cdot\|$  eine Norm ist, gilt damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0$  (\*\*). ①

Mit (\*) und (\*\*) gilt nun  $(I - C) \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{\nu} = I$ , also  $\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{\nu} = (I - C)^{-1}$ . ①

Außerdem gilt

$$\|(I - C)^{-1}\| = \left\| \sum_{\nu=0}^k C^{\nu} \right\| \leq \sum_{\nu=0}^k \|C^{\nu}\| \leq \sum_{\nu=0}^k \|C\|^{\nu} = \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

Das erste „ $\leq$ “ ist die Dreiecksungleichung, das zweite „ $\leq$ “ die Matrixnorm-Eigenschaft, das letzte „ $=$ “ einfach die geometrische Reihe für reelle Zahlen. ②

□

**Hausaufgabe 6.1** (9 Punkte)

Gegeben sei das LGS  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & -3 & 0.2 \\ 1 & -0.2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Man berechne die exakte Lösung  $x$ .
- (ii) Man führe drei Schritte mit dem Jacobi- (Gesamtschritt-)Verfahren durch und berechne  $\|x - x_J^{(3)}\|_2$ . Als Startwert nehme man den Nullvektor.
- (iii) Man führe drei Schritte mit dem Gauß-Seidel- (Einzelschritt-)Verfahren durch und berechne  $\|x - x_{GS}^{(3)}\|_2$ . Als Startwert nehme man den Nullvektor.
- (iv) Kann man mit Hilfe der Sassenfeldschen Zahlen eine Fehlerabschätzung für das Gauß-Seidel-Verfahren angeben?

Lösung.

(i)  $x = (2.1, 1, -1)^T$ . ①

(ii)  $x_J^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 0.3\bar{6} \\ -0.05 \end{pmatrix}, x_J^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.78\bar{3} \\ 0.99\bar{6} \\ -0.96\bar{3} \end{pmatrix}, x_J^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.079\bar{3} \\ 0.896\bar{8} \\ -0.842 \end{pmatrix}$ .  
 $\|x - x_J^{(3)}\|_2 \doteq 0.1898046$ . ③

(iii)  $x_{GS}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1 \\ -0.9 \end{pmatrix}, x_{GS}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.04 \\ 0.98\bar{6} \\ -0.971\bar{3} \end{pmatrix}, x_{GS}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.0881\bar{3} \\ 0.9979\bar{5} \\ -0.99427\bar{1} \end{pmatrix}$ .  
 $\|x - x_{GS}^{(3)}\|_2 \doteq 0.01333483$ . ③

(iv)  $\beta = \max_{i=1,2,3} \beta_i \geq \beta_1 = \frac{0.4+0.6}{1} = 1 \Rightarrow$  keine Fehlerabschätzung möglich! ①

Die Ergebnisse können je nach Rechengenauigkeit ein bißchen variieren. □

**Hausaufgabe 6.2** (3 Punkte)

Ist die Iterationsmatrix  $M = -(D + A_L)^{-1}A_R$  des Einzelschrittverfahrens invertierbar?

Lösung. Nein, denn  $A_R$  ist obere Dreieckmatrix mit Nullen auf der Diagonalen  $\Rightarrow \det A_R = 0 \Rightarrow \det M = 0$ . ③  
□

**Hausaufgabe 7.1** (9 Punkte)

Gesucht ist die Nullstelle  $(x^*, y^*)$  der Funktion  $F(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2x \\ x^2 - y^2 - y \end{pmatrix}$  mit  $0 < x, y < 2$ .

(i) Dazu führe man zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren (Startwert  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 1)$ ) durch.

(ii) Man zeige, daß  $x^*$  bzw.  $y^*$  die Gleichungen

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4 = 0$$

lösen.

(iii) Man führe für jedes der Gleichungen aus (ii) zwei Schritte mit dem Newton-Verfahren durch (Startwerte  $x_0 = 1, y_0 = 1$ ).

Lösung.

$$(i) \quad F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 & 2y \\ 2x & -2y - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (F'(x, y))^{-1} = \frac{1}{-8xy - 2x + 4y + 2} \begin{pmatrix} -2y - 1 & -2y \\ -2x & 2x - 2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{1}$$

$$F(1.5, 1) = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.36\bar{1} \\ 0.94 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{1}$$

(ii) Es gilt  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  (1) und  $x^2 - y^2 - y = 0$  (2).

(1)  $\Rightarrow y = \sqrt{2x - x^2}$  da  $y > 0$ . Einsetzen in (2) liefert  $x^2 - (2x - x^2) = \sqrt{2x - x^2}$ .

$$\text{Quadrieren} \Rightarrow 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0. \quad \textcircled{2}$$

(2)  $\Rightarrow x = \sqrt{y + y^2}$  da  $x > 0$ . Einsetzen in (1) liefert  $2y^2 + y = 2\sqrt{y + y^2}$ .

$$\text{Quadrieren} \Rightarrow 4y^4 + 4y^3 + y^2 = 4y + 4y^2 \Rightarrow 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4 = 0. \quad \textcircled{2}$$

(iii)  $g(x) := 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2, g'(x) = 12x^2 - 16x + 5$

$$x_0 = 1, x_1 = 1 - \frac{-1}{1} = 2, x_2 = 2 - \frac{8}{21} \doteq 1.61905. \quad \textcircled{1}$$

$$h(y) := 4y^3 + 4y^2 - 3y - 4, h'(y) = 12y^2 + 8y - 3$$

$$y_0 = 1, y_1 = 1 - \frac{1}{17} \doteq 0.941177, y_2 = 0.941177 - \frac{0.0545492}{15.1592} \doteq 0.937578. \quad \textcircled{1}$$

□

**Hausaufgabe 8.1** (8 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 26 & -12 \\ -4 & 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Man löse das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  näherungsweise, indem man zwei Schritte mit dem CG-Verfahren durchführt. Als Startvektor nehme man den Nullvektor.

$$\text{Lösung. } x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r^0 = -b^0 = -p^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$Ap^0 = \begin{pmatrix} -88 \\ 20 \\ -180 \\ 156 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \frac{-304}{2744} = -0.110787, \quad x^1 = x^0 - \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} -1.10787 \\ 0.221574 \\ 0.221574 \\ 1.55102 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$r^1 = r^0 - \alpha_0 Ap^0 = \begin{pmatrix} 0.250729 \\ 0.215743 \\ -21.9417 \\ 3.28280 \end{pmatrix}, \quad \beta_0 = \frac{4443.87}{2744} = 1.61949, \quad p^1 = r^1 - \beta_0 p^0 = \begin{pmatrix} 16.4456 \\ -3.02323 \\ -25.1807 \\ -19.3900 \end{pmatrix} \quad \textcircled{25}$$

$$Ap^1 = \begin{pmatrix} -1.69508 \\ 11.4237 \\ -317.297 \\ 42.4854 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{-492.324}{7103.54} = 0.0693068, \quad x^2 = x^1 - \alpha_1 p^1 = \begin{pmatrix} -2.24766 \\ 0.431105 \\ 1.96677 \\ 2.89488 \end{pmatrix} \quad \textcircled{25}$$

$$\text{(Exakte Lösung } x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) \quad \square$$

**Hausaufgabe 9.1** (8 Punkte)

Wir betrachten den Raum  $L^2(I, w)$  mit  $I = [-1, 1]$  und  $w(x) = 1$ . Es sei  $P_n$  der Raum der Polynome bis zum Grad  $n$ . Für  $i = 1, 2, 3$  bestimme man die beste Approximation  $v_i \in \mathbb{P}_{i-1}$  zu

$$u(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und gebe den Fehler  $\|u - v_i\|_{L^2(I)}$  an. Desweiteren zeichne man  $u$  und  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösung.  $\langle u, l_1 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \langle u, l_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \langle u, l_3 \rangle = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$  ②

$$v_i = \sum_{j=1}^i \langle u, l_j \rangle l_j \implies v_1(x) = \frac{1}{4}, \quad v_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x, \quad v_3(x) = \frac{3}{32} + \frac{1}{2}x + \frac{15}{32}x^2$$
 ②

Hier sind  $v_1, v_2$  und  $v_3$  eingezeichnet. Die Funktion  $u$  möge man selber ergänzen! ②

$$\|u - v_i\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^i \langle u, l_j \rangle^2, \quad \|u\|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\implies \|u - v_1\| = \sqrt{\frac{5}{24}} = 0.45644, \quad \|u - v_2\| = \sqrt{\frac{1}{24}} = 0.20412, \quad \|u - v_3\| = \sqrt{\frac{1}{384}} = 0.051031. \quad \text{②} \quad \square$$

**Hausaufgabe 10.1** (4 Punkte)

Es sei  $f(y) = \frac{\cos \frac{\pi}{8} y}{\sqrt{y^2 + y}}$ . Man approximiere das Integral  $\int_0^4 f(y) dy$  mit Hilfe der Mittelpunkregel, der Trapezregel und der Simpson-Regel. Dazu substituiere man zuerst  $y = x^2$ . Warum ist dies nötig?

Lösung.

$$\int_0^4 f(y) dy = \int_0^4 \frac{\cos(\frac{\pi}{8} y)}{\sqrt{y^2 + y}} dy = \int_0^2 \frac{\cos(\frac{\pi}{8} x^2)}{\sqrt{x^4 + x^2}} 2x dx = \int_0^2 \frac{2 \cos(\frac{\pi}{8} x^2)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =: \int_0^2 g(x) dx. \quad \text{①}$$

$$I^M(g) = 2g(1) \doteq 2.6131259,$$

$$I^T(g) = \frac{2}{2}(g(0) + g(2)) = 2 + 0 = 2,$$

$$I^S(g) = \frac{2}{6}(g(0) + 4g(1) + g(2)) = \frac{1}{2}(2 + 4g(1)) \doteq 2.4087506 \quad \text{②}$$

Die Substitution ist nötig, da  $f(0)$  nicht auswertbar ist! ①

□

**Hausaufgabe 10.2** (4 Punkte)

Gegeben eine Quadraturformel der Gestalt  $I(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$  zur Approximation von  $\int_a^b f(t) dt$ . Man zeige, daß  $I(f)$  Polynome vom Grad  $2n + 2$  nicht mehr exakt integriert.

Lösung. Definiere  $f(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$ . Es ist  $f(x_i) = 0$ , also auch  $I(f) = 0$ . ②  
 Aber wegen  $f(x) > 0 \forall x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$  gilt  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . ②

**Hausaufgabe 11.1** (8 Punkte)

Es soll die Funktion  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$  numerisch über das Intervall  $[0,1]$  integriert werden.

- (i) Substituiere im Integral  $x = t^2$ . Was gewinnt man hierbei?
- (ii) Nun führe man die summierte Trapezregel mit  $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  für den neuen Integranden durch.
- (iii) Man verbessere das Ergebnis durch Extrapolation aus diesen Werten mit dem Romberg-Schema.
- (iv) Man berechne das gesuchte Integral (nach der Substitution aus (i)) näherungsweise mit der Gauß-Quadraturformel mit drei Knoten.

Lösung. (i)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt$ . Damit ist  $g(t)$  beliebig oft differenzierbar (auch bei  $t = 0$ ), so daß sämtliche Quadraturarten und auch Rombergextrapolation sinnvoll sind. ⑮

(ii)  $T(1) = T_{0,0} = 0.5, T(\frac{1}{2}) = T_{1,0} = 0.45, T(\frac{1}{4}) = T_{2,0} = 0.4344117647, T(\frac{1}{8}) = T_{3,0} = 0.4305057528$  ②

(iii)  $T_{1,1} = 0.4\bar{3}, T_{2,1} = 0.4292156863, T_{3,1} = 0.4292037488$   
 $T_{2,2} = 0.4289411765, T_{3,2} = 0.4292029529, T_{3,3} = 0.4292071081$  ⑮

(iv)  $\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{(s+1)^2}{4+(s+1)^2}}_{:=\varphi(s)} ds \approx \frac{5}{9}(\varphi(-\sqrt{3/5}) + \varphi(\sqrt{3/5})) + \frac{8}{9}\varphi(0) \doteq 0.42946593$  ②

**Hausaufgabe 12.1** (5 Punkte)

Man berechne das Integral  $\int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx$  näherungsweise mit der Gauß-Quadraturformel mit drei Knoten und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert.

Lösung. Gauß mit drei Knoten (Substitution  $x = \ln t, t = \frac{1}{2}(s+1)$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx &= \int_0^1 t \ln t dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (s+1) \ln\left(\frac{s+1}{2}\right) ds =: \frac{1}{4} \int_{-1}^1 g(s) ds \\ &\approx \frac{1}{4} \left( \frac{5}{9} (g(-\sqrt{3/5}) + g(\sqrt{3/5})) + \frac{8}{9} g(0) \right) \doteq -0.251845708. \end{aligned}$$

Exakt:

$$\int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx = \frac{1}{2} xe^{2x} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = -\frac{1}{4} xe^{2x} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{4} = -0.25$$

Vergleich: Fehler =  $1.85 \cdot 10^{-3}$

**Hausaufgabe 12.2** (3 Punkte)

Es sei  $I(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$  eine Quadraturformel für  $\int_a^b f(x) dx$  mit dem Exaktheitsgrad  $m \in \mathbb{N}$  (d.h.  $E(p) = 0$  für  $p \in \mathbb{P}_m$ ). Es gelte  $a < x_0 < \dots < x_n < b$ . Weiter sei  $K_m(t) := \frac{1}{m!} E_x([(x-t)_+]^m)$  der zugehörige Peano-Kern. Man zeige

$$K_m(a) = K_m(b) = 0.$$

Lösung. Es ist  $K_m(t) = \frac{1}{m!} (\int_a^b [(x-t)_+]^m dx - \sum_{i=0}^n \alpha_i [(x_i-t)_+]^m)$ , also der Quadraturfehler für die Funktion  $[(x-t)_+]^m$ .

Für  $t = a$  ist  $[(x-a)_+]^m = (x-a)^m$  für alle  $x > a$  und  $[(x_i-a)_+]^m = (x_i-a)^m$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , also

$$K_m(a) = \frac{1}{m!} (\int_a^b (x-a)^m dx - \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i-a)^m) = E_x((x-a)^m) = 0 \text{ wegen } E(p) = 0 \text{ für } p \in \mathbb{P}_m. \quad \textcircled{2}$$

Für  $t = b$  ist  $[(x-b)_+]^m = 0$  für alle  $x < b$  und  $[(x_i-b)_+]^m = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , also  $K_m(b) = 0$ . \textcircled{1}

□