Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

SoSe 2003, Institut für
Mathematische Stochastik

6. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 35: Eine Urne enthalte n mit den Zahlen von 1 bis n nummerierte Kugeln. Nacheinander werden n Kugel mit Zurücklegen aus der Urne gezogen; X_n sei die Anzahl der Kugeln, die am Ende des Experiments die Urne niemals verlassen haben.

Bestimmen Sie den Erwartungswert EX_n von X_n. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}EX_n$ mit $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 36: (Indikatorfunktionen)
Es sei im Folgenden 1_A die Indikatorfunktion zu einer Menge A. Zeigen Sie, dass

$$1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(\omega) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{H \subset \{1,\ldots,n\} \\ \#H = k}} 1_{\bigcap_{i\in H} A_i}(\omega)$$

gilt, und erklären Sie, wie dies zum Beweis der Siebformel von Sylvester-Poincaré verwendet werden kann.

Aufgabe 37: Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X}.$$

Aufgabe 38: (Maximum-Likelihood Prinzip)
Es sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Welcher Wert für p maximiert die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für $k = 0,1,\ldots,n$? Hierbei handelt es sich um eine statistische Methode um den unbekannten Parameter p "möglichst gut" zu schätzen, wenn eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilte Zufallsvariable den Wert k annimmt. Wenn die Anzahl der Versuchswiederholungen n bekannt ist, so schätzen wir den unbekannten Parameter p durch den Wert für p, der $P(X=k)$ maximiert. Man spricht auch vom sogenannten "Maximum-Likelihood" Prinzip.

Hausübung

Aufgabe 39: (Das Postbotenproblem)
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ von $(1,2,\ldots,n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment (vgl. das Postbotenproblem). Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.
(4 Punkte)

Aufgabe 40: (Indikatorfunktionen)
Es sei im folgenden 1_A die Indikatorfunktion zu einer Menge A.

(a) Wie übertragen sich die mengentheoretischen Operationen $\cap$, $\cup$, ^{c} und $\triangle$ in entsprechende Operationen zwischen den zugehörigen Indikatorfunktionen?

(b) Zeigen Sie, dass für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen einer festen Menge Ω die folgenden Beziehungen gelten:

$$\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} \;=\; 1_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}, \quad \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n} \;=\; 1_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n}.$$

(3/3 Punkte)

Aufgabe 41: Ein fairer sechsseitiger Würfel werde zweimal geworfen, X bzw. Y seien die Augenzahlen beim ersten bzw. beim zweiten Wurf. Weiter bezeichne $Z := \max\{X,Y\}$.

(a) Stellen Sie die Massenfunktionen von X und Z sowie die gemeinsame Massenfunktion von X und Z tabellarisch dar.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(Z-X)$ und $E(X\cdot Z)$.

(3/3 Punkte)

Aufgabe 42: Es sei $X \sim P(\lambda)$. Welcher Wert für λ maximiert die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$?
(2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Stundenübungen am 21. und 23. Mai. Die Lösungen der Hausübungen finden Sie auf unserer Homepage.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

7. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 43: (Kovarianz)
Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kovarianz ein bilinearer Operator ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(aX + bY, Z) &= a \operatorname{cov}(X, Z) + b \operatorname{cov}(Y, Z), \\ \operatorname{cov}(Z, aX + bY) &= a \operatorname{cov}(Z, X) + b \operatorname{cov}(Z, Y). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unkorrelierte Zufallsgrößen nicht notwendigerweise auch unabhängig sind.

Aufgabe 44: (Multinomialverteilung)
Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, ..., X_r)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1, p_2, ..., p_r)$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_i, $i = 1, 2, ..., r$.

(b) Bestimmen Sie für $i, j = 1, 2, ..., r$ die Kovarianzen $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ der Komponenten von X.

(c) Sind die Komponenten von X unabhängig?

Aufgabe 45: Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X unter $X + Y = z$, wenn $X \sim \text{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ gilt.

Aufgabe 46: (W'erz. Fkt. und Faltung der Binomialverteilung)
Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, beide binomialverteilt mit den Parametern n bzw. m und p.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Bestimmen Sie die Verteilung der Faltung von X und Y.

Hausübung

Aufgabe 47: (Bedingte Erwartungswerte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ diskrete Zufallsvariablen, $Z : \Omega \to S$ eine diskrete Zufallsgröße und $\varphi : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) $E[\alpha X + \beta Y | Z] = \alpha E[X|Z] + \beta E[Y|Z]$,

(b) $E[E[X|Z]|Z] = E[X|Z]$ und $E(E[X|Z]) = E(X)$,

(c) $E[X \cdot \varphi(Z)|Z] = \varphi(Z) \cdot E[X|Z]$,

(d) ist Z konstant, so ist $E[X|Z] = E(X)$.

Zeigen Sie hiermit

(e) $E(X - E[X|Z])^2 \leq E(X - \varphi(Z))^2$ für alle $\varphi : S \to \mathbb{R}$,

(f) $E(X - EX)^2 \leq E(X - a)^2$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2/2/2/2/2/1 Punkte)

Aufgabe 48: Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariable. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X unter $X+Y = z$, wenn X und Y geometrisch verteilt sind mit Parameter p.
(2 Punkte)

Aufgabe 49: (W'erz. Fkt. und Faltung der negativen Binomialverteilung)
Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, beide negativ binomialverteilt mit den Parametern r bzw. s und p.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Bestimmen Sie die Verteilung der Faltung von X und Y.

(3/2/1 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Stundenübungen am 28. und 30. Mai. Die Lösungen der Hausübungen finden Sie auf unserer Homepage.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

SoSe 2003, Institut für
Mathematische Stochastik

10. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 62: Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1)}$ und $P = \mathrm{unif}[0,1)$. Die Dezimalentwicklung einer Zahl $\omega \in \Omega$ ist bekanntlich die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, 10^{-n}, \qquad \#\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 9\} = \infty.$$

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ sei $X_n(\omega) = a_n$, d.h. X_n bildet eine Zahl auf die n-te Ziffer ihrer Dezimaldarstellung ab. Zeigen Sie, dass die X_n's Zufallsgrößen, also $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar sind.

(b) Es sei A die Menge aller $\omega \in \Omega$ mit der Eigenschaft, dass alle Ziffern $0,1,\ldots,9$ unendlich oft in der Dezimalentwicklung von ω vorkommen. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{A}$ gilt (A ist also eine Borel-Menge).

(c) Es sei B die Menge aller Zahlen $\omega \in [0,1)$, in deren Dezimalentwicklung die Ziffer 5 nicht vorkommt. Zeigen Sie, dass B überabzählbar ist und in $\mathcal{A}$ liegt, und dass $P(B) = 0$ gilt. (B ist somit ein Beispiel für eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge.)

Aufgabe 63: Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei die Quantilfunktion zu X, definiert durch

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}\,.$$

Zeigen Sie, dass F^{-1} linksseitig stetig und schwach monoton wachsend ist. Bestimmen Sie außerdem, unter der zusätzlichen Annahme, dass F stetig ist, die Verteilung von $Y := F(X)$.

Aufgabe 64: Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\cdot(1-x^2) & \text{, falls } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{, falls } |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat die Konstante c?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie $P(-0.5 < X < 0)$ und $P(X > 0 \mid X > -0.5)$.

Bitte wenden!

Hausübung

Aufgabe 65: (Eigenschaften von Verteilungsfunktionen)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ der linksseitige Grenzwert von F in x existiert, d.h. dass gilt: zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x$ mit $n \to \infty$, die Aussage $F(x_n) \to a$ mit $n \to \infty$ gilt. Wir schreiben $F(x^-)$ für diesen (von x abhängigen) Wert a und kürzen den gesamten Sachverhalt ab durch $F(x^-) := \lim_{y\to x, y<x} F(y)$.

(b) Zeigen Sie, dass die linksseitigen Grenzwerte von F aus Teil (a) zur Zufallsvariablen X im folgenden Zusammenhang stehen: $F(x^-) = P(X < x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Höhe des Sprungs von F in x gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass X den Wert x annimmt, d.h. dass $F(x) - F(x^-) = P(X = x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Schließen Sie hieraus, dass die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen genau dann stetig ist, wenn diese Zufallsvariable keinen Wert mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Sprungstellen von F höchstens abzählbar ist. Was bedeutet dies für die Zufallsvariable X?

(2/2/1/1 Punkte)

Aufgabe 66: (zur Exponentialverteilung)
Für jedes $\lambda > 0$ definieren wir $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass F_λ eine Verteilungsfunktion ist. Wir nennen die Verteilung mit Verteilungsfunktion F_λ die *Exponentialverteilung* mit Parameter λ.

(b) Zeigen Sie, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X "gedächtnislos" ist im Sinne von:

$$P(X \geq t + x \,|\, X \geq t) = P(X \geq x) \qquad \text{für alle } x, t \geq 0.$$

(c) Viele Programmiersprachen beinhalten einen sogenannten Zufallszahlengenerator, der Zahlen liefert, die "für praktische Zwecke" als gleichverteilt über dem Intervall $(0, 1)$ angesehen werden können. Wie würden Sie verfahren, wenn Sie einen solchen Generator für exponentialverteilte Werte benötigen?

(d) Es sei X eine mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := \lceil X \rceil$ (hierbei ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl k mit $k \geq x$).

(1/1/1/1 Punkte)

Aufgabe 67: Die Lebensdauer T eines Transistortyps sei eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot e^{-10(t-\theta)} & , t \geq \theta, \\ 0 & , t < \theta, \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}$. θ bezeichne hierbei die "minimale Lebensdauer" des Transistors.

(a) Zeigen Sie, dass $c = 10$ gelten muss.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu T.

(c) Berechnen Sie $P(T \in [\theta, 2\theta])$, sowie $P(T > 4\theta | T > 2\theta)$.

(1/1/1 Punkte)

Aufgabe 68: Es sei F eine Verteilungsfunktion zu einer Zufallsvariable X und es gelte

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{4}, \\ 2x, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{8}, \\ 2x - \frac{1}{2}, & \frac{5}{8} < x < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

(a) Welchen Wert hat F in $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ und für $x \geq \frac{3}{4}$? Fertigen Sie eine Skizze von F an.

(b) Bestimmen Sie $P(X = \frac{1}{4})$.

(c) Bestimmen Sie die Quantilfunktion zu F.

(1/1/1 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Stundenübungen am 25. und 27. Juni.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

SoSe 2003, Institut für
Mathematische Stochastik

11. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 69: (zur Normalverteilung und Gammaverteilung)

(a) Die Zufallsvariable X sei $N(0,1)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von X^2.

(b) Es seien c eine positive reelle Zahl und X eine $\Gamma(\alpha,\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := c \cdot X$.

(c) Bestimmen Sie das 0.975-Quantil zu $N(5,9)$ mit Hilfe der Quantiltabelle zur Standardnormalverteilung aus der Vorlesung.

Aufgabe 70: (Faltung der Gammaverteilung)
Versuchen Sie, durch Analogiebetrachtungen heuristischer Natur eine Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X+Y$ zu erhalten, wenn X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_X bzw. f_Y sind. Was ergibt sich als Verteilung von $X+Y$ im Falle $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$?

Aufgabe 71: Es sei Z der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen X und Y; wir setzen voraus, daß X und Y unabhängig und auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilt sind. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Verteilungsfunktion von Z.

Hausübung

Aufgabe 72: (Cauchy-Verteilung)
Es sei X gleichverteilt auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ und $Y := \tan(X)$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Verteilungsfunktion zu Y. Die Verteilung von Y heißt auch *(Standard-)Cauchy-Verteilung.*

(b) Existiert der Erwartungswert zu Y?

(2/2 Punkte)

Aufgabe 73: (Varianz der Normalverteilung)
Es sei X eine $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Varianz von X.
(2 Punkte)

Aufgabe 74: (Faltung der Gleichverteilung)
Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und unif(0,1)-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu $X+Y$.
(3 Punkte)

Aufgabe 75: Es sei $P = (X,Y)$ ein zufällig gewählter Punkt in der Ebene. Genauer: Die Koordinaten X und Y seien unabhängig und jeweils $\mathrm{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $Z := \tan(\varphi)$, wobei φ der von der x-Achse und der Verbindungsstrecke von P zum Ursprung eingeschlossene Winkel ist.
(4 Punkte)*

Abgabe der Hausübungen in den Stundenübungen am 02. und 04. Juli.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

12. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 76: Ein Sortiment von Werkstücken soll geprüft werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein willkürlich ausgewähltes Werkstück untauglich ist, sei bei jeder Prüfung die gleiche und betrage $\frac{1}{10}$. Das Sortiment wird nicht abgenommen, wenn mindestens 10 untaugliche Werkstücke gefunden werden. Man gebe näherungsweise an, wieviele Werkstücke man prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{10}$ behaupten zu können, dass das Sortiment nicht abgenommen wird.

Aufgabe 77: Ein Experiment, bei dem ein Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ eintritt, wird $n = 50$ mal wiederholt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A höchstens 3 mal in diesen 50 Versuchen auftritt

(a) durch exakte Rechnung,

(b) mit Hilfe des Gesetzes der seltenen Ereignisse,

(c) mit Hilfe des Grenzwertsatzes von De Moivre-Laplace.

Aufgabe 78: (De Moivre-Laplace)
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sei gleich p. Es werden n unabhängige Versuche durchgeführt. X/n sei die relative Häufigkeit von A in dieser Versuchsreihe. Mit der durch den zentralen Grenzwertsatz von *De Moivre-Laplace* gegebenen Approximation der Binomialverteilung beantworte man folgende Fragen:

(a) Sei $p = 0.4$ und $n = 1500$. Wie groß ist $P(0.4 \leq X/n \leq 0.44)$?

(b) Sei $p = 0.375$. Wie groß muss n sein, damit $P(|X/n - p| \leq 0.01) \geq 0.995$ ist?

(c) $p = \frac{2}{3}$, $n = 1200$. Wie groß muss ε gewählt werden, damit $P(|X/n - p| < \varepsilon) \geq 0.985$ ist?

(d) Sei $n = 14400$. Für welche Werte von p wird $P(|X/n - p| < 0.01) \geq 0.99$?

Aufgabe 79: Eine Urne enthalte n mit den Zahlen 1 bis n nummerierte Kugeln. Es werden nacheinander Kugeln zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Es sei T_n die Nummer des Zuges, in dem Kugel 1 das erste Mal erscheint. Zeigen Sie, dass T_n/n in Verteilung gegen eine mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsgröße konvergiert.

Hausübung

Aufgabe 80*: Eine Urne enthalte n mit den Zahlen 1 bis n nummerierte Kugeln. Es werden nacheinander Kugeln zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

Es sei X_n die Nummer der Ziehung, bei der erstmalig eine Kugel erneut erscheint. Bestimmen Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $a_n X_n$ mit $n \to \infty$ in Verteilung gegen einen nicht konstanten Grenzwert konvergiert.
(4 Punkte)*

Aufgabe 81: Es soll eine sogenannte Multiple-Choice-Klausur konzipiert werden. Dabei sollen die Teilnehmer bei n Aufgaben von jeweils drei Antworten (eine richtige und zwei falsche) eine ankreuzen. Die Klausur soll als bestanden gelten, wenn bei mindestens der Hälfte der Aufgaben die richtige Antwort angekreuzt ist.

Wie groß muss n ungefähr sein, damit höchstens mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit α die Klausur durch rein zufälliges Ankreuzen bestanden werden kann? Welcher Zahlenwert ergibt sich bei $\alpha = 0.025$? Verwenden Sie die Normalapproximation.
(3 Punkte)

Aufgabe 82: Ein fairer Würfel wir 20 Mal geworfen. Es bezeichne X die Summe der Augenzahlen. (Die einzelnen Würfe werden als stochastisch unabhängig angenommen.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 30)$, $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ und $P(X = 100)$. (Es bietet sich an, dies mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von X zu tun und MAPLE zuhilfe zu nehmen.)

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den Werten der Dichte einer Normalverteilung mit den unter (b) ermittelten Parametern an den Stellen $x = 30, 50, 70, 100$.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X und die Dichte aus Teil (c) in einem Diagramm dar.

(e) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie ein Satz über die Normalapproximation für die Verteilung der Augensumme beim n-fachen Wurf eines Würfels (lokale Form) aussehen könnte.

(2/2/2/2/1 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Stundenübungen am 09. und 11. Juli.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich
Dipl.-Math. C. Franz

SoSe 2003, Institut für
Mathematische Stochastik

13. Übungsblatt Stochastik I

Stundenübung

Aufgabe 83: (Stichprobenvarianz)
Es sei $(X_1, ..., X_n)$ eine Stichprobe aus einer (unbekannten) Verteilung Q mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass die sog. *Stichprobenvarianz*

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

eine erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

Aufgabe 84: (ML-Schätzer bei der Gleichverteilung)
Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und jeweils $\text{unif}(0, \theta)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$.

(a) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\hat{\theta}_n^{ML}$ für θ.

(b) Bestimmen Sie Bias und MSE für $\hat{\theta}_n^{ML}$.

(c) Ein alternativer Schätzer für θ ist $\hat{\theta}_n^{Alt} := 2\bar{X}_n$. Bestimmen Sie auch für diesen Schätzer Bias und MSE.

(d) Vergleichen Sie die beiden Schätzer qualitativ.

Hinweise zur Klausur

Die Klausur zur Vorlesung „Stochastik I“ findet am Mittwoch, den **16. Juni 2003**, von 16:00 bis 18:00 Uhr, in den Räumen F 102 und B 305 statt. Die Aufteilung auf diese beiden Räume geschieht nach dem Anfangsbuchstaben des Nachnamens. Studierende mit Anfangsbuchstaben **A-K** schreiben in Raum **F 102**, Studierende mit Anfangsbuchstaben **L-Z** in Raum **B 305**.

Zugelassene Hilfsmittel in der Klausur sind: Eine Vorlesungsmitschrift, sämtliche Haus- und Stundenübungen, eine Formelsammlung, ein (nichtprogrammierbarer) Taschenrechner. Außerdem bringen Sie zur Klausur bitte Ihren **Personalausweis** und eine gültige **Immatrikulationsbescheinigung** bzw. Ihren **Studentenausweis** mit.

Voraussetzung für die Zulassung zur Klausur ist das Erreichen von mindestens 40% der maximal möglichen Hausübungspunkte. Ihren aktuellen Punktestand entnehmen Sie bitte dem Aushang am Schwarzen Brett des Instituts für Mathematische Stochastik neben Raum F 439.

Sind mehr als 40% der Hausübungspunkte erreicht worden, so gibt es hierfür in der Klausur einen entsprechenden Bonus. Das genau Verfahren entnehmen Sie bitte den zu Beginn der Vorlesung verteilten „Allgemeinen Hinweisen zur Vorlesung“, die Sie auch von unserer Homepage `http://www.stochastik.uni-hannover.de` herunterladen können. Sollte der Fall eintreten, dass ein(e) Student(in) die Klausur nicht besteht, durch die Bonuspunkte aus den Hausübungen aber über die Bestehensgrenze der Klausur gehoben wird, so erhält diese(r) die Möglichkeit durch das Bestehen einer mündlichen Nachprüfung doch noch einen Schein zu dieser Vorlesung zu erwerben. Der Termin dieser mündlichen Nachprüfung wird gesondert vereinbart.

Sobald die Ergebnisse der Klausur feststehen, werden wir sie am Schwarzen Brett des Instituts für Mathematische Stochastik veröffentlichen. Bis dahin möchten wir Sie bitten von Nachfragen abzusehen.

Studierende, die diese Klausur nicht bestehen, haben die Möglichkeit durch eine Nachschreibklausur zu Beginn des WS 03/04 doch noch einen Schein zu erwerben. Es sei hier jedoch schon darauf hingewiesen, dass eine solche Nachschreibklausur auch den Stoff der letzten Woche der Vorlesung behandeln wird, der naturgemäß nicht Gegenstand der eigentlichen Klausur sein kann.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich

SS 2003, Institut für
Mathematische Stochastik

Klausur zur Vorlesung Stochastik I

Name,Vorname			Mtkl.Nr.	
Punkte:	Prozent:	Aufwertung:	Gesamt:	Note:

1	2	3	4	5	6	$\sum$
08	10	10	12	12	08	60

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsmitschrift und sämtliche Haus- und Stundenübungen, Formelsammlung, nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Aufgabe 1: Eine Urne enthalte 2 (r)ote und 3 (b)laue Kugeln. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne entnommen. X_1 bezeichne das Ergebnis der ersten, X_2 das Ergebnis der zweiten Ziehung (d.h. X_1 und X_2 können die Werte r und b annehmen).

(a) Berechnen Sie $P(X_2 = b)$.

(b) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie: Für drei Ereignisse A, B, C gilt:

$$P(A \cap B) \leq P(A \cap C) + P(B \cap C^c).$$

(b) Zeigen Sie: Sind A, B zwei Ereignisse mit $P(B) > 0$, so gilt:

$$|P(A) - P(A|B)| \leq P(B^c).$$

Aufgabe 3: Es seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit Standardabweichungen $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ sowie Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$.

(a) Zeigen Sie: $\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$.

(b) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$ und $\sigma(x)\sigma(y) > 0$. Zeigen Sie:

$$\rho(aX + b, cY + d) = \operatorname{sign}(ac) \cdot \rho(X, Y). \quad (\operatorname{sign}(x) = \tfrac{x}{|x|} \text{ für } x \neq 0,\ \operatorname{sign}(0) = 0.)$$

Aufgabe 4: Es seien Ω eine nicht-leere Menge und $T : \Omega \to \Omega$ eine bijektive Abbildung; für $A \subset \Omega$ sei $T(A) := \{T(\omega) : \omega \in A\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $T(A^c) = T(A)^c$ für alle $A \subset \Omega$ gilt.

(b) Wir nennen $A \subset \Omega$ *invariant unter* T, wenn $T(A) = A$ gilt. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{A}_T$ aller unter T invarianten Teilmengen von Ω eine σ-Algebra bildet.

(c) Zeigen Sie, dass T $(\mathcal{A}_T, \mathcal{A}_T)$-messbar ist.

Aufgabe 5: Es sei

$$f(x) = cx \cdot 1_{[0,1]}(x),\ c \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) X habe die Dichte f. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) X und Y seien unabhängig, beide mit Dichte f. Bestimmen Sie eine Dichte der Faltung $X + Y$.

Aufgabe 6: Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch $\operatorname{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen und $Y_n := \max\{X_1, ..., X_n\}$. Bestimmen Sie eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass $Y_n - a_n$ mit $n \to \infty$ in Verteilung gegen einen nichttrivialen Grenzwert konvergiert.

Viel Erfolg!

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. M. Reich

15.10.2003, Institut für Mathematische Stochastik

Wiederholungsklausur zur Vorlesung Stochastik I

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsmitschrift und sämtliche Haus- und Stundenübungen, Formelsammlung, nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Aufgabe 1: Beim Pokerspiel besteht das zugrundeliegende Kartendeck aus 52 Karten (2, 3, 4, ..., 10, Bube, Dame, König, As in den Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz). Jeder Mitspieler erhält 5 zufällig ausgewählte Karten. Angenommen Petra nimmt an einem solchen Pokerspiel teil.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter Petras fünf Karten genau zwei Asse?

(b) Wenn eine Pokerhand aus einem Tripel von drei gleichartigen Karten und einem Paar von zwei (anderen) gleichartigen Karten besteht, so nennt man dies ein „Full House“. (Beispiel: drei Buben, zwei Asse.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Petra beim Verteilen der Karten ein „Full House“?

(c) Angenommen, Petra hat von den fünf ihr zugeteilten Karten erst drei aufgenommen und darunter genau ein Ass entdeckt. Mit welcher Wahrcheinlichkeit befindet sich unter den verbleibenden zwei Karten mindestens ein weiteres Ass?

Aufgabe 2: Es sei

$$f(z) := \frac{z^2}{4}\left(1 + 2z + z^2\right), z \in [0,1].$$

(a) Begründen Sie, warum $f(z)$ eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist und geben sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion an.

(b) Es sei X eine Zufallsvariable mit wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion f. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{var}(X)$.

(c) Es seien Y, Z zwei unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung P auf $\mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie P so, dass $Y + Z$ die in Teil (a) bestimmte Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion besitzt.

Aufgabe 3: Wir betrachten das Laplace-Experiment über $\Omega = \{1, ..., n\}$, wählen also eine Zahl ω zufällig und gleichverteilt aus den ersten n natürlichen Zahlen aus. Es sei $X_n(\omega)$ die größte in ω enthaltene Zweierpotenz, also beispielsweise 6 bei $\omega = 192$, 0 bei 193 und 1 bei 194.

(a) Bestimmen Sie $P(X_n = k)$.

(b) Zeigen Sie, dass bei festem $k \in \mathbb{N}_0$ die in (a) bestimmte Wahrscheinlichkeit mit $n \to \infty$ gegen einen Wert $p(k)$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die in (b) bestimmte Funktion p eine Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion ist. Können Sie die zugehörige Verteilung zu einer der in der Vorlesung eingeführten Verteilungsfamilien in Beziehung setzen?

Aufgabe 4: Es seien $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$ und

$$\mathcal{E} := \big\{(x, x+1] \,:\, x \in \mathbb{R}\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$ ist.

(b) Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. Zeigen Sie, dass P und Q dann auf ganz $\mathcal{B}$ übereinstimmen.

Aufgabe 5: Es sei

$$f(x) = c \cdot \sin(x) \cdot 1_{[0,\pi]}(x),\ c \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) X habe die Dichte f. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Y sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \pi]$. Bestimmen Sie eine Dichte der Faltung von X und Y.

Aufgabe 6: Es seien $X_1, ..., X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und jeweils negativ binomialverteilt mit bekanntem Parameter $r \in \mathbb{N}$ und unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$. (Achtung: Gemeint ist die in der Vorlesung verwendete negative Binomialverteilung auf $\{r, r+1, ...\}$.) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_{\mathrm{ML}}$ für p.

Viel Erfolg!