Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 13. April 2004

Übungsblatt 1 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

6. Eine Gruppe von 11 Wissenschaftlern arbeitet an einem Geheimprojekt, dessen Pläne in einem Safe aufbewahrt werden. Dieser Safe soll genau dann geöffnet werden können, wenn mindestens 6 Wissenschaftler anwesend sind. Zu diesem Zweck soll der Safe mit mehreren verschiedenen Schlössern versehen werden und jeder Wissenschaftler Schlüssel zu gewissen ausgewählten Schlössern erhalten. Wie viele Schlösser sind erforderlich und wie viele Schlüssel muss jeder Wissenschaftler haben?

(4 Punkte)

Lösung: Immer, wenn sich 5 Wissenschaftler treffen, muss ihnen (mindestens) ein Schlüssel fehlen, um den Tresor zu öffnen. Andererseits sollen sie in der Lage sein, mit jedem der übrigen 6 Wissenschaftler den Tresor zu öffnen, so dass jeder dieser verbleibenden 6 diesen fehlenden Schlüssel besitzt.

Es muss also für jede der insgesamt $\binom{11}{5}$ Teilmengen von 5 Wissenschaftlern einen fehlenden Schlüssel geben, so dass man $\binom{11}{5}$ Schlösser benötigt. Jeder der Wissenschaftler ist an $\binom{10}{5}$ solcher Fünfergruppen nicht beteiligt, so dass er also $\binom{10}{5}$ Schlüssel tragen muss.

7. Auf wie viele Arten können Sie eine Treppe mit n Stufen hinaufgehen, wenn Sie bei jedem Schritt eine oder zwei Stufen nehmen dürfen?

<u>Hinweis:</u> Leiten Sie eine Rekursionsformel für die gesuchte Anzahl her.

(4 Punkte)

Lösung: Offenbar gilt $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ und zerlegt man a_n danach, ob man mit dem ersten Schritt nur ein oder zwei Stufen genommen hat, so erhält man die Rekursionsformel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Wieder erhält man eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die man analog zu Aufgabe 4 lösen kann. Es ergibt sich

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n, \ n \geq 1.$$

8. Sie wissen, dass von vier verdeckt auf dem Tisch liegenden Karten zwei rot und zwei schwarz sind. Wenn Sie alle vier Karten durch Zufall zu raten versuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit raten Sie dann

a) 0, b) 2, c) 4

Karten richtig?

(1+1+1 Punkte)

Lösung: Ich treffe meine Entscheidung, indem ich zwei der vier Positionen auswähle, auf denen meiner Meinung nach die beiden roten Karten liegen (auf den anderen beiden Positionen liegen dann natürlich die schwarzen Karten). Insgesamt können die Karten auf $\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ verschiedene Arten auf die 4 Positionen verteilt werden. a) Dabei gibt es genau eine Möglichkeit, dass die beiden schwarzen Karten auf den Positionen landen, für die ich eigentlich die beiden roten Karten vorhergesagt hatte. In diesem Fall habe ich keine Karte richtig geraten und die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt $1/\big(\binom{4}{2}\binom{2}{2}\big)$. c) Ebenso gibt es genau eine Möglichkeit, dass die beiden roten Karten auf den Positionen landen, die ich für die beiden roten Karten auch tatsächlich vorhergesagt habe. In diesem Fall habe ich alle vier Karten richtig geraten und auch hier beträgt die Wahrscheinlichkeit $1/\big(\binom{4}{2}\binom{2}{2}\big)$. b) Schließlich gibt es vier Möglichkeiten, die Karten so zu verteilen, dass auf den Positionen, auf denen ich die beiden roten Karten vorhergesagt habe, eine rote und eine schwarze Karte landen. In diesem Fall habe ich zwei Karten richtig geraten und die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt $4/\big(\binom{4}{2}\binom{2}{2}\big)$. Probe: Die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.

9. Um einen runden Tisch stehen $n > 2$ Stühle, auf denen n Personen, darunter Frau A und Frau B, Platz nehmen sollen. Die Sitzordnung wird ausgelost. Alle möglichen Sitzandordnungen seien gleich wahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau A und Frau B nebeneinander sitzen?

(3 Punkte)

Lösung: n Personen lassen sich auf $n!$ verschiedene Arten auf n Stühle setzen. An einen runden Tisch sind allerdings jeweils n dieser Möglichkeiten aufgrund der Rotationsinvarianz identisch. Also gibt es insgesamt $(n-1)!$ verschiedene Möglichkeiten, diese n Personen an dem Tisch Platz nehmen zu lassen.

Nun sollen Frau A und Frau B nebeneinander sitzen, also setzen wir diese beiden als erstes nebeneinander an den Tisch. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten (Frau A sitzt entweder links oder rechts von Frau B). Die übrigen $(n-2)$ Personen lassen sich nun auf $(n-2)!$ Arten auf den verbleibenden $(n-2)$ Stühlen anordnen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\big(2(n-2)!\big)/(n-1)! = 2/(n-1)$.

10. n Punkte auf dem Kreisrand werden paarweise durch Strecken verbunden. Dabei sollen sich im Inneren der Kreisscheibe nie mehr als zwei Strecken in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Anzahl a_n der Gebiete, in die die Kreisscheibe zerlegt wird. Setzen Sie $a_1 = 1$, und überzeugen Sie sich durch Abzählen davon, dass $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$ und $a_5 = 16$ ist, beherzigen Sie dann aber nicht die bei gewissen Tests als Zeichen von Intelligenz bewertete „Logik“, sondern leiten Sie eine Rekursionsformel für a_n her.

(5 Punkte)

Lösung: Angenommen, es sind bereits n Punkte auf dem Rand des Kreises, sowie die zugehörigen Verbindungslinien eingezeichnet. O.B.d.A. seien die Punkte im Uhrzeigersinn von 1 bis n aufsteigend durchnummeriert. Nun markieren wir einen weiteren Punkt auf der Kreisscheibe, und zwar o.B.d.A. zwischen Punkt 1 und Punkt n. Dann ziehen wir die Verbindungslinien von diesem neuen Punkt zu jedem der vorhandenen n Punkte.

Eine solche Verbindungslinie vom neuen Punkt zu Punkt k $(1 \leq k \leq n)$ schneidet genau $(k-1)(n-k)$ der alten Linien, denn es liegen genau $(k-1)$ Punkte auf der einen und $(n-k)$ Punkte auf der anderen Seite dieser Linie und jeder Punkt ist mit jedem verbunden.

Schneidet so eine neue Linie genau m der alten Linien, so verläuft sie durch insgesamt $m+1$ Gebiet und teilt jedes dieser Gebiete in zwei Teile, so dass $m+1$ neue Gebiete entstehen.

Insgesamt ergibt sich somit

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{k=1}^{n} \big((k-1)(n-k)+1\big) = a_n + n + \sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k).$$

Insbesondere ist $a_6 = 31$ und nicht etwa 32, wie man zunächst vermuten könnte.

Abgabetermin: Dienstag, 20.04.2004, vor der Vorlesung

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 20. April 2004

Übungsblatt 2 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I
SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

15. Beweisen Sie das folgende Lemma der Vorlesung: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semi-Ring, so ist der davon erzeugte Ring

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} E_j : E_1, ..., E_n \in \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt, } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(4 Punkte)

Lösung: Sei $\mathcal{R}_0 := \big\{ \sum_{j=1}^{n} E_j : E_1, ..., E_n \in \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt, } n \in \mathbb{N} \big\}$. Klar: $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}(\mathcal{E})$. Andererseits zeigt man leicht, dass $\mathcal{R}_0$ ein Ring ist. Da außerdem $\mathcal{R}_0$ das Mengensystem $\mathcal{E}$ enthält, ist auch $\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{R}_0$.

16. Es sei A eine Menge mit $r \in \mathbb{N}$ Elementen. Weiter sei $n \leq r$. Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzrelationen auf A mit genau n Äquivalenzklassen.

(2 Punkte)

Lösung: Eine Äquivalenzrelation auf A ist durch ihre Äquivalenzklassen eindeutig festgelegt. Durch jede surjektive Abbildung der Elemente von A auf n Äquivalenzklassen erhält man eine der gesuchten Äquivalenzrelationen. Dabei liefern jedoch Abbildungen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass sie durch Permutation der Bildelemente auseinander hervorgehen, dieselbe Äquivalenzrelation.
Also entspricht die gesuchte Anzahl der Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer r elementigen Menge in eine n elementige Menge, geteilt durch $n!$. Mit Hilfe der Vorlesung erhält man hierfür den Ausdruck

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r.$$

17. Sei μ eine endlich additive Mengenfunktion auf einem Ring $\mathcal{R}$. Beweisen Sie die folgende *Siebformel*: Für je endlich viele Menge $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k}} \mu\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big).$$

(4 Punkte)

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion. *IA:* Für $k = 2$ gilt: $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \cup A_1^c) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$ (Vgl. Vorlesung). *IS:* Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mu\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) \;=\; \mu\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big) \\
=\; & \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + \mu(A_n) - \mu\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n\big), \text{ nach IA,} \\
=\; & \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n-1\} \\ \#I = k}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) + \mu(A_n) - \mu\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n\big), \text{ nach IV,} \\
=\; & \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n-1\} \\ \#I = k}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) + \mu(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n-1\} \\ \#I = k}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n)\big), \text{ IV,} \\
=\; & \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n-1\} \\ \#I = k}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) + \mu(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n-1\} \\ \#I = k}} \mu\big(A_n \cap \bigcap_{i \in I} A_i\big) \\
=\; & \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k \\ n \notin I}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+2} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k+1 \\ n \in I}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \\
=\; & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k \\ n \notin I}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big), \text{ da es kein } I \subset \{1,...,n\}, \#I = n,\ n \notin I \text{ gibt,} \\
& + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k \\ n \in I}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big), \text{ Indexverschiebung,} \\
=\; & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k}} \mu\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big).
\end{aligned}$$

18. Sei Ω eine nicht leere Menge. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(3 Punkte)

Lösung: $\Omega^c = \emptyset$ ist abzählbar, also ist $\Omega \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist A abzählbar und somit $(A^c)^c$ abzählbar, oder es ist A^c abzählbar. In jedem Fall ist also A^c wieder in $\mathcal{A}$. Sei schließlich $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{A}$. Sind alle A_n abzählbar, so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar . Sonst gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A_{n_0}^c$ abzählbar ist, und damit auch $\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \subset A_{n_0}^c$. In jedem Fall liegt also auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ wieder in $\mathcal{A}$.

Sprechzeiten der Mitarbeiter

Mi	10.00 - 11.00	F 440	Baringhaus
Fr	09.00 - 10.00	F 450	Reich
Di	15.00 - 16.00	B 406	Kötter
Do	10.00 - 11.00	B 407	Mundt
Mi	14.00 - 15.00	F 448	Dennert
Mi	14.15 - 15.00	F 448	Krause
Do	12.00 - 13.00	F 448	Rodenbeck
Do	12.00 - 13.00	F 448	Schöneborn

Abgabetermin: Dienstag, 27.04.2004, vor der Vorlesung

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 27. April 2004

Übungsblatt 3 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

23. Gibt es zu der Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\exp(-x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}$, so dass $P\big((-\infty, x]\big) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist? Geben sie dieses Wahrscheinlichkeitsmaß gegebenenfalls an.

(3 Punkte)

Lösung: Es seien $P_1 := \delta_0$ das Einpunktmaß in 0 und $P_2 := \mathrm{Exp}(1)$ die Exponentialverteilung mit Parameter 1, sowie $P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$. Dann ist P als Konvexkombination zweier Wahrscheinlichkeitsmaße wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass darüber hinaus die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat, wie man sich leicht überzeugt.

24. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ und $F(x) := P\big((-\infty, x]\big)$, $x \in \mathbb{R}$, sowie

$$\begin{aligned} Z_F &:= \big\{x \in \mathbb{R} : F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\big\}, \\ S_F &:= \big\{x \in \mathbb{R} : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \big(F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)\big) > 0\big\}. \end{aligned}$$

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: $Z_F = S_F$.
(b) Zeigen Sie, dass Z_F abgeschlossen ist. Gilt dies auch für S_F?
(c) Zeigen Sie: $P(Z_F) = 1$.
(d) Zeigen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $P(A) = 1$, so ist $Z_F \subset A$.

(1+2+3+1 Punkte)

Lösung: (a) Betrachtet man beispielsweise die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$, also

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

so sieht man leicht, dass $Z_F = [0, 1]$ und $S_F = \emptyset$ gilt.
(b) Es ist $Z_F^c = \big\{x \in \mathbb{R} : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } F(x+\varepsilon) = F(x-\varepsilon)\big\}$. Diese Menge ist offenbar offen, also Z_F selbst abgeschlossen. S_F ist offenbar die Menge der Unstetigkeitsstellen von F. Wählt man $P = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta_{r_k}$, wobei $r_1, r_2, \ldots$ eine Abzählung der rationalen Zahlen sei und δ_x das Einpunktmaß in x, so ist $S_F = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist nicht abgeschlossen.
(c) Für $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$. Weiter sei $V := \big\{U_{1/n}(r) : n \in \mathbb{N},\ r \in Z_F^c \cap \mathbb{Q},\ F(r + 1/n) = F(r - 1/n)\big\}$. V ist eine abzählbare Menge von Mengen, und es gilt $Z_F^c \subset \bigcup_{U \in V} U$, also

$$P(Z_F^c) \leq \sum_{U \in V} P(U) = 0,$$

da $P(U) = 0$ ist für jedes $U \in V$.
(d) Sei $x \in A^c$. Da A^c offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset A^c$. Wegen $P(A^c) = 0$ ist auch $0 = P\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon]\big) = F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)$, also $x \in Z_F^c$.

25. Gegen sind $m+1$ Urnen $U_0, U_1, \ldots, U_m$. Die Urne U_i enthalte i rote und $m-i$ schwarze Kugeln, $i = 0, 1, \ldots, m$. Es wird eine der $m+1$ Urnen zufällig ausgewählt. (Genauer: Jede der Urnen wird mit Wahrscheinlichkeit $1/(m+1)$ gewählt.) Aus dieser Urne werden zunächst $n < m$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, bei der $(n+1)$-ten Ziehung aus dieser Urne eine rote Kugel zu ziehen, wenn bereits die ersten n gezogenen Kugeln rot sind?
Hinweis: Es gilt $\sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} = \frac{m+1-n}{n+1}\binom{m+1}{n}$.

(5 Punkte)

Lösung: Es sei für $i = 0, 1, \ldots, m$ das Ereignis $A_i :=$ „Urne i wird gewählt" und außerdem

R_1 := „Beim Ziehen o. Z. von n Kugeln aus der gewählten Urne werden n rote Kugeln gezogen",
R_2 := „Beim Ziehen der $(n+1)$-ten Kugel aus der gewählten Urne wird eine rote Kugel gezogen".

Gesucht ist dann $P(R_2|R_1)$. Mit dem Gesetz von der Totalen Wahrscheinlichkeit und der Umkehrformel von Bayes erhält man

$$\begin{aligned} P(R_2|R_1) &= \sum_{i=n+1}^{m} P(R_2|A_i \cap R_1) \cdot P(A_i|R_1) \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} P(R_2|A_i \cap R_1) \cdot \frac{P(R_1|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=n}^{m} P(R_1|A_j)P(A_j)} \end{aligned}$$

Nun gilt offenbar $P(A_i) = 1/(m+1)$, $i = 0, \ldots, m$, $P(R_1|A_i) = \binom{i}{n}/\binom{m}{n}$, $i = n, \ldots, m$, und $P(R_2|A_i \cap R_1) = (i-n)/(m-n)$, $i = n, \ldots, m$. Damit ist

$$P(R_2|R_1) = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{\sum_{i=n+1}^{m}(i-n)\binom{i}{n}}{\sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n}} = \frac{n+1}{m-n} \cdot \frac{\sum_{i=n+1}^{m}\binom{i}{n+1}}{\sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n}}.$$

Mit Hilfe von $\sum_{j=n}^{m}\binom{j}{n} = \frac{m+1-n}{n+1}\binom{m+1}{n}$ erhält man dann $P(R_2|R_1) = (n+1)/(n+2)$. Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis unabhängig von m ist.

26. Gestörter Datenkanal: Bei einer Übertragung der Zeichen '0' und '1' in einem digitalen Datensystem werden durch Störungen im Mittel 5% der gesendeten Nullen als Einsen und 3% der gesendeten Einsen als Nullen empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Nullen zu gesendeten Einsen ist $p = 3/5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls '0' bzw. '1' empfangen wurde?

(3 Punkte)

Lösung: Es sei

$$\begin{aligned} A_i &:= \text{„Es wird Zeichen '}i\text{' gesendet“}, \quad i = 0, 1\,, \\ B_i &:= \text{„Es wird Zeichen '}i\text{' empfangen“}, \quad i = 0, 1\,. \end{aligned}$$

Gesucht sind $P(A_i|B_i)$, $i = 0, 1$, gegeben $P(B_1|A_0) = 0.05$, $P(B_0|A_1) = 0.03$ und $P(A_0)/P(A_1) = 3/5$. Mit der Umkehrformel von Bayes ergeben sich dann analog zu Aufgabe 22 die Werte $P(A_0|B_0) \approx 0.95$ und $P(A_1|B_1) \approx 0.97$.

Abgabetermin: Dienstag, 04.05.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 04. Mai 2004

Übungsblatt 4 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

31. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse und $X := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}$. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{X=k\}} &= \sum_{\nu=k}^n (-1)^{v-k} \binom{\nu}{k} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}}, \\ \mathbb{1}_{\{X \ge k\}} &= \sum_{\nu=k}^n (-1)^{v-k} \binom{\nu - 1}{k-1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}}. \end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k bzw. mindestens k der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ eintreten?

(6 Punkte)

Lösung: Wir beweisen zunächst die erste Formel. Es sei $\omega \in \Omega$. O.B.d.A. sei $\omega \in A_1, ..., A_l$ und $\omega \notin A_{l+1}, ..., A_n$. Weiterhin sei $l \ge k$, sonst ist die Formel trivial. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=k}^n (-1)^{v-k} \binom{\nu}{k} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}} = \sum_{\nu=k}^l (-1)^{v-k} \binom{\nu}{k} \binom{l}{\nu} \\ &= \binom{l}{k} \sum_{\nu=k}^l (-1)^{v-k} \binom{l-k}{\nu - k} = \binom{l}{k} \sum_{\nu=0}^{l-k} (-1)^{v} \binom{l-k}{\nu} = \binom{l}{k} (1-1)^{l-k}. \end{aligned}$$

Also ist die rechte Seite der Formel 0 für $l > k$ und 1 für $l = k$, und dasselbe gilt natürlich auch für die linke Seite.

Zur zweiten Formel. Hier gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{X \ge k\}} &= \sum_{l=k}^n \mathbb{1}_{\{X=l\}} = \sum_{l=k}^n \sum_{\nu=l}^n (-1)^{v-l} \binom{\nu}{l} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}} \\ &= \sum_{\nu=k}^n \left(\sum_{l=k}^\nu (-1)^{\nu - l} \binom{\nu}{l} \right) \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}}. \end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht, dass $\sum_{l=k}^{\nu} (-1)^{v-l} \binom{\nu}{l} = (-1)^{\nu-k} \binom{\nu-1}{k-1}$ gilt, womit auch die zweite Formel bewiesen ist.

Schließlich erhält man die entsprechenden Formel für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten unter Ausnutzung von $E\mathbb{1}_A = P(A)$.

32. Eine Urne enthalte n durchnummerierte Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln entnommen. X_1 sei die Nummer der ersten gezogenen Kugel, X_2 die Nummer der zweiten gezogenen Kugel, $Y_1 := \min\{X_1, X_2\}$ und $Y_2 := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die Zähldichten von Y_1, Y_2, sowie die gemeinsame Zähldichte von Y_1 und Y_2.

(4 Punkte)

Lösung: Für $k = 1, ..., n-1$ gilt

$$\begin{aligned} P(Y_1 = k) &= P(X_1 = k, X_2 > k) + P(X_2 = k, X_1 > k) = 2P(X_1 = k, X_2 > k) \\ &= 2P(X_1 = k)P(X_2 > k | X_1 = k) = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-k}{n-1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Für $k = 2, ..., n$ erhält man analog $P(Y_2 = k) = \big(2(k-1)\big)/\big(n(n-1)\big)$. Schließlich gilt für $1 \le k_1 < k_2 \le n$, dass $P(Y_1 = k_1, Y_2 = k_2) = 2/\big(n(n-1)\big)$.

33. Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F, U sei gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$ und $F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $(0,1)$ festgelegt durch $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge u\}$ für $u \in (0,1)$. Zeigen Sie:

(a) $F^{-1}(U)$ und X haben dieselbe Verteilung. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u \in (0,1)$ gilt: $F(x) \ge u \Leftrightarrow F^{-1}(u) \le x$.

(b) Es sei F stetig. Dann haben $F(X)$ und U dieselbe Verteilung.

(2+3 Punkte)

Lösung: (a) Zunächst zum Beweis des Hinweises: '$\Rightarrow$' folgt unmittelbar aus der Definition von F^{-1}. Die Gegenrichtung erhält man mit der Rechtsstetigkeit von F unter Ausnutzung der Tatsache, dass F monoton wachstend ist:

$$F(x) < u \Rightarrow F(x + 1/n) < u \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \Rightarrow F^{-1}(u) \ge x + 1/n \Rightarrow F^{-1}(u) > x.$$

Mit dem Hinweis erhält man dann $P\big(F^{-1}(U) \le x\big) = P\big(U \le F(x)\big) = F(x)$. Also haben $F^{-1}(U)$ und X dieselbe Verteilung.

(b) Mit $u_t := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) = t\}$ ergibt sich $P\big(F(X) \le t\big) = P\big(X \le u_t\big) = F\big(u_t\big) = t = P(U \le t)$.

Abgabetermin: Dienstag, 11.05.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 11. Mai 2004

Übungsblatt 5 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

38. (a) Wiederholt wird aus einer Urne, die $n \geq 3$ mit den Zahlen von 1 bis n durchnumerierte Kugeln enthält, je eine Kugel gezogen und wieder in die Urne zurückgelegt. Die Zufallsvariable X_n bezeichne die Nummer des Zuges, bei dem die Zahl der gezogenen Kugel zum ersten Mal mit der Zahl einer bereits zuvor gezogenen Kugel übereinstimmt. Zeigen Sie:
(i) $P(X_n = r) = \frac{n!(r-1)}{n^r(n-r+1)!}$, $\quad 2 \leq r \leq n+1$.
(ii) $E(X_n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\frac{r!}{n^r} = \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^n \exp(-x)dx$.
(iii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}} = 1$.
(b) Beurteilen Sie die folgende Pressemitteilung vom 29.6.1995:

Erstmals im Lotto dieselbe Zahlenreihe

> **Stuttgart** (dpa/lsw). Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschicht des deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21.Juni diseses Jahres kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15,25,27,30,42,48 heraus. Genau dieselben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstagslotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1988. Welch ein Lottozufall: Unter der 49 Zahlen sind fast 14 Millionen verschiedene Sechserreihen möglich.

Bis zum 21.6.1995 gab es 2071 Ausspielungen im Samstagslotto und (2×472) Ausspielungen im Mittwochslotto (je A und B).

(1+3+4*+1 Punkte)

Lösung:(a) (i) Für $2 \leq r \leq n+1$ gilt

$$P(X_n = r) = 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{r-2}{n}\right)\cdot\frac{r-1}{n} = \frac{n!(r-1)}{n^r(n-r+1)!}.$$

(ii) Ebenso zeigt man für $0 \leq r \leq n$

$$P(X_n > r) = 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{r-2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right) = \frac{n!}{n^r(n-r)!}.$$

Für $r > n$ gilt $P(X_n > r) = 0$ und somit $E(X_n) = \sum_{r=0}^\infty P(X_n > r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\frac{r!}{n^r}$. Mit vollständiger Induktion und partieller Integration zeigt man $\int_0^\infty x^r \exp(-x)\,dx = r!$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\frac{r!}{n^r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\frac{1}{n^r}\int_0^\infty x^r \exp(-x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \Big(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\left(\frac{x}{n}\right)^r\Big)\exp(-x)\,dx = \int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \exp(-x)\,dx. \end{aligned}$$

(iii)* Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \exp(-x)\,dx &= \int_0^\infty \Big(-x + n\log\big(1+x/n\big)\Big)\,dx \\ &\geq \int_0^\infty \exp\Big(-x + n\big(x/n - x^2/(2n^2)\big)\Big)\,dx \\ &= \int_0^\infty \exp\big(-x^2/(2n)\big)\,dx = \sqrt{n\pi/2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $1-x \leq e^{-x}$ für $x > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}\frac{r!}{n^r} &= 1 + \sum_{r=1}^n 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + \sum_{r=1}^n \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r-1} i\right) = 1 + \sum_{r=1}^n \exp\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{(r-1)r}{2}\right) \\ &\leq 1 + \sum_{r=1}^n \exp\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{(r-1)^2}{2}\right) = 2 + \sum_{r=1}^{n-1}\exp\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{r^2}{2}\right) \\ &\leq 2 + \int_0^\infty \exp\big(-x^2/(2n)\big)\,dx = 2 + \sqrt{n\pi/2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt die Behauptung.

(b) Ist es wirklich eine Sensation, wenn bis zur 3015. Lottoziehung eine Zahlenreihe doppelt gezogen wird? Diese Fragestellung passt in die Situation von Aufgabenteil (a). Sei $r = 3015$ und $n = \binom{49}{6}$. Dann ist $P(X_n \leq r) = 1 - P(X_n > r) \approx 0.2774$. Von einer Sensation kann also keine Rede sein.

39. Es seien X, Y reelle Zufallsvariablen mit den λ-Dichten f, g. Es gebe ein $a \in \mathbb{R}$, so daß gilt $f(x) \geq g(x)$ für $x < a$ und $f(x) \leq g(x)$ für $x > a$. Zeigen Sie:
(a) $E(X) \leq E(Y)$, falls $E(|X|) < \infty$ und $E(|Y|) < \infty$.
(b) Ist $a > 0$, $f(x) = g(x) = 0$ für $x < 0$, so gilt $E(X^k) \leq E(Y^k)$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $E(|X^k|) < \infty$ und $E(|Y^k|) < \infty$.

(3+1 Punkte)

Lösung: (a) Es ist $E(Y) - E(X) = \int_{-\infty}^\infty (x-a)\,(g(x)-f(x))\,d\lambda(x) \geq 0$.
(b) Es ist $E(Y^k) - E(X^k) = \int_0^\infty (x^k - a^k)\,(g(x)-f(x))\,d\lambda(x) \geq 0$.

40. (Das Postbotenproblem) Ein Postbote soll n verschiedene Brief an n verschiedene Empfänger zustellen. Dabei bekommt jeder Empfänger genau einen Brief. Leider hat der

Briefträger an diesem Morgen seine Brille vergessen, und kann deshalb nicht erkennen, welcher der n Briefe in welchen der n Briefkästen gehört. Kurz entschlossen wirft er einfach willkürlich in jeden Birefkasten genau einen Brief.
Sei X die Anzahl der Brief, die im richtigen Briefkasten landen. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(3 Punkte)

Lösung: Wir nummerieren die Briefe und die Briefkästen von 1 bis n so durch, dass für alle $i = 1, ..., n$ Brief Nr. i in Kasten Nr. i gehört. Weiter sei A_i das Ereignis, dass bei der zufälligen Verteilung des Briefträgers Brief Nr. i im richtigen Kasten (Nr. i) landet. Da der Briefträger die Briefe zufällig verteilt, handelt es sich um ein Laplace-Experiment, der Ergebnisraum Ω besteht aus allen $n!$ verschiedenen Permutationen der n Briefe. Es ist dann

$$A_i = \big\{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega : \omega_i = i\big\},$$

also $\#A_i = (n-1)!$ für alle $i = 1, ..., n$. Damit erhält man

$$EX = E\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

41. (a) Es seien $a > 0$ und X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $E\min\{X, a\}$.
(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X, wenn X absolut-stetig verteilt ist mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1), \\ 2-x, & x \in (1,2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) X hat die Dichte $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ für $x > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} E\min\{X,a\} &= \int_0^\infty \min\{x,a\}\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \int_0^a \lambda x \exp(-\lambda x)\,dx + \int_a^\infty \lambda a \exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\big(1-\exp(-\lambda a)\big). \end{aligned}$$

(b) X ist symmetrisch verteilt um 1, also ist $EX = 1$.

Bemerkung: Ein * an einem Aufgabenteil bedeutet, dass es sich bei den Punkten hierfür um Bonuspunkte handelt, die nicht zur maximal erreichbaren Gesamtpunktzahl beitragen, wohl aber bei erfolgreicher Bearbeitung Ihrem Punktekonto gut geschrieben werden. So ist es möglich, bei dem entsprechenden Übungsblatt auch mehr als 100% der Punkte zu erreichen.

Abgabetermin: Dienstag, 18.05.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 18. Mai 2004

Übungsblatt 6 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

46. (a) Es sei X eine beschränkte Zufallsvariable und t eine reelle Zahl. Man zeige:

$$P(X \geq t) \leq \inf_{u \geq 0} \exp(-tu) E\big(\exp(uX)\big).$$

(b) Überprüfen Sie diese Ungleichung für $t = 7$, wenn X binomialverteilt ist mit den Parametern $n = 10$ und $p = 1/2$.

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Für alle $u \geq 0$ gilt

$$P(X \geq t) = P(X - t \geq 0) \leq P\big(\exp(uX - ut) \geq 1\big) \leq \exp(-ut) E\big(\exp(uX)\big).$$

(b) Es ist $\exp(-7u) E \exp(uX) = \exp(-7u)(1/2)^{10}(1 + \exp(u))^{10}$. Durch Differenzieren erhält man die Minimalstelle $u = 0.8472979$, der Funktionswert an dieser Stelle beträgt 0.4391875. Der tatsächliche Wert für $P(X \geq 7)$ ist 0.171875.

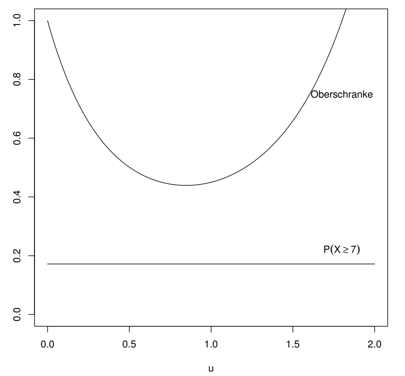

Abbildung 1: Zu Aufgabe 46.(b).

47. (Weierstraß'scher Approximationssatz) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Chebyshevschen Ungleichung – angewendet auf die Zufallsvariable X/n –, dass die Bernstein-Polynome

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad p \in [0,1],$$

gleichmäßig in $p \in [0,1]$ gegen f konvergieren.

(4 Punkte)

Lösung: Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \, \forall p \in [0,1] : |f(p) - f_n(p)| \leq \varepsilon.$$

Offenbar gilt $f_n(p) = Ef(X/n)$. Die Chebyschevsche Ungleichung liefert

$$P\big(|X/n - p| \geq \delta\big) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. f ist als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $p, q \in [0,1]$ mit $|p - q| < \delta$ gilt $|f(p) - f(q)| < \varepsilon/2$. Außerdem ist f als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt, es existiert also auch ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|f(p)| \leq K$ für alle $p \in [0,1]$. Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $p \in [0,1]$ gilt $2Kp(1-p)/(n\delta^2) \leq \varepsilon/2$. Dann haben wir für alle $p \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |f(p) - f_n(p)| &= |f(p) - Ef(X/n)| \\ &\leq E|f(p) - Ef(X/n)| \mathbb{1}\{|X/n - p| < \delta\} + \\ &\quad E|f(p) - Ef(X/n)| \mathbb{1}\{|X/n - p| \geq \delta\} \\ &\leq (\varepsilon/2) P(|X/n - p < \delta) + 2KP(|X/n - p| \geq \delta) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

48. (Das Postbotenproblem) Bestimmen Sie in der Situation von Aufgabe 40. die Varianz von X.

(4 Punkte)

Lösung: Sei wieder A_i, $i = 1, ..., n$ das Ereignis, dass bei der zufälligen Verteilung des Briefträgers Brief Nr. i im richtigen Kasten (Nr. i) landet, so dass $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$ gilt. Es ist

$$var(\mathbb{1}_{A_i}) = E(\mathbb{1}_{A_i}^2) - (E\mathbb{1}_{A_i})^2 = P(A_i) - P(A_i)^2 = 1/n - 1/n^2,$$

sowie

$$\text{cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = E\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j} - E\mathbb{1}_{A_i}E\mathbb{1}_{A_j} = P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j) = 1/\big(n(n-1)\big) - 1/n^2$$

für $i \neq j$. Mit der Gleichung von Bienaymé folgt also

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(\mathbb{1}_{A_i}) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = 1.$$

49. Zeigen Sie:

(a) (Einseitige Chebyshevsche Ungleichung) Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, so gilt für alle $a > 0$

$$P(X > \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad \text{und} \quad P(X < \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(b) (Jensensche Ungleichung) Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und f eine auf I definierte reelle konvexe Funktion. Wir setzen voraus, dass EX und $Ef(X)$ endlich sind. Zeigen Sie, dass dann

$$EX \in I \text{ und } f(EX) \leq Ef(X)$$

gelten. Hinweis: Liegt c im Innern von I, so gibt es eine reelle Zahl λ mit der Eigenschaft, dass $f(x) \geq \lambda(x - c) + f(c)$ gilt für alle $x \in I$.

(3+3 Punkte)

Lösung: (a) Es gelte zunächst $\mu = 0$. Dann gilt für alle $a > 0$:

$$a = E(a - X) \leq E(a - X)^+ := E(a - X)\mathbb{1}_{(-\infty,a]}(X),$$

Quadrieren und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefern:

$$a^2 \leq \big(E(a - X)\mathbb{1}_{(-\infty,a]}(X)\big)^2 \leq E(a - X)^2 \cdot E\big(1_{(-\infty,a]}(X)\big) = (a^2 + \sigma^2) \cdot P(X \leq a),$$

also $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) \leq \sigma^2/(\sigma^2 + a^2)$. Im Fall $\mu \neq 0$ gilt aber $P(X > \mu + a) = P(X - \mu > a)$ und $X - \mu$ hat Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 und wir erhalten dieselbe Aussage. Die zweite Aussage erhält man aus der ersten, indem man von X zu $-X$ übergeht.

(b) Es sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann gilt $EX \leq Eb = b$, sowie $EX \geq Ea = a$, also $EX \in [a, b]$. Im Falle von offenen oder halboffenen Intervallgrenzen ergeben sich ähnliche Aussagen, so dass in jedem Fall $EX \in I$ gilt. Man kann diese Aussage sogar auf den Fall verallgemeinern, dass $a = -\infty$ oder $b = \infty$ oder beides gilt.

Sei EX ein Randpunkt des Intervalles, o.B.d.A. $EX = a > -\infty$. Dann ist $P(X \geq EX) = 1$, woraus wegen $0 = E(X - EX) = \int (x - EX)P^X(dx)$ sofort $P(X > EX) = 0$, also $P(X = EX) = 1$ folgt. Folglich gilt die Jensensche Ungleichung mit Gleichheit. Liegt EX im Inneren des Intervalls I, so existiert eine reelle Zahl λ mit $f(x) \geq \lambda(x - EX) + f(EX)$ für alle $x \in I$. Aus der Monotonie des Erwartungswertes ergibt sich

$$Ef(X) \geq E\left(\lambda(X - EX) + f(EX)\right) = \lambda(EX - EX) + Ef(EX) = f(EX).$$

Klausurtermin: Dienstag, 20.07.2004, 15-17 Uhr.

Abgabetermin: Dienstag, 25.05.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 25. Mai 2004

Übungsblatt 7 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

54. Es seien $A_i, i \in I$, Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Ereignisse A_i, $i \in I$, sind unabhängig.

(b)$\forall K \subset I$, K endlich : $P(\bigcap_{k\in K} A_k) = \prod_{k\in K} P(A_k)$.

(c) $\forall J, K \subset I$, J, K endlich, $J \cap K = \emptyset$: $P(\bigcap\limits_{j\in J} A_j \cap \bigcap\limits_{k\in K} A_k^c) = \prod_{j\in J} P(A_j) \prod_{k\in K} P(A_k^c)$.

(4 Punkte)

Lösung: (a)$\Rightarrow$(b) ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition von Unabhängigkeit. (b)$\Rightarrow$(c) sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j \cap \bigcap_{k\in K} A_k^c\Big) &= P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j \cap \big(\bigcup_{k\in K} A_k\big)^c\Big) \\
&= P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) - P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j \cap \big(\bigcup_{k\in K} A_k\big)\Big) \\
&= P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) - P\Big(\bigcup_{k\in K} \big(A_k \cap \bigcap_{j\in J} A_j\big)\Big) \\
&= P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) - \sum_{\emptyset\neq H\subset K} (-1)^{\#H-1} P\Big(\bigcap_{k\in H} A_k \cap \bigcap_{j\in J} A_j\Big) \\
&= \prod_{j\in J} P(A_j) - \sum_{\emptyset\neq H\subset K} (-1)^{\#H-1} \prod_{k\in H} P(A_k) \prod_{j\in J} P(A_j) \\
&= \prod_{j\in J} P(A_j)\Big(1 - \sum_{\emptyset\neq H\subset K} (-1)^{\#H-1} \prod_{k\in H} P(A_k)\Big) \\
&= \prod_{j\in J} P(A_j) \prod_{k\in K} P(A_k^c).
\end{aligned}$$

(c)$\Rightarrow$(a) ist wieder unmittelbar einsichtig.

55. Es seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ unabhängig. Zeigen Sie: $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

(4 Punkte)

Lösung: Es seien zunächst $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_X^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_Y^2)$. Dann gilt für $Z := X + Y$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_X^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2}\right\}\right) dx.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Substitution

$$v := x \cdot \frac{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}{\sigma_X\sigma_Y} - z \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \cdot \sigma_Y}.$$

Dabei erhalten wir dann $dx = (\sigma_X\sigma_Y / \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})\, dv$, sowie

$$\begin{aligned}
v^2 + \frac{z^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} &= \frac{x^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} - \frac{2xz}{\sigma_Y^2} + \frac{z^2\sigma_X^2}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\sigma_Y^2} + \frac{z^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \\
&= \frac{x^2}{\sigma_Y^2} + \frac{x^2}{\sigma_X^2} - \frac{2xz}{\sigma_Y^2} + z^2 \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\sigma_Y^2} = \frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2}.
\end{aligned}$$

In der Tat ist diese Substitution gar nicht so "mystisch", wie sie auf den ersten Blick erscheinen mag. Es ist ja durch die Aufgabenstellung vorgegeben, dass $X + Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ gelten soll, also müssen wir den exp-Teil des Integrals auf die Gestalt

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big) \cdot \ldots$$

bringen, und dabei ergibt sich dann automatisch diese Substitution.

Es folgt

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \cdot \frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right),
\end{aligned}$$

also $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$. Nun ist bereits aus der Vorlesung bekannt, dass die Äquivalenz

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \iff X - \mu \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

gilt. Ist also $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ und $Z := X + Y$, so gilt:

$$Z = \underbrace{\underbrace{(X - \mu_X)}_{\sim \mathrm{N}(0,\sigma_X^2)} + \underbrace{(Y - \mu_Y)}_{\sim \mathrm{N}(0,\sigma_Y^2)}}_{\sim \mathrm{N}(0,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)} + (\mu_X + \mu_Y) \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

56. Es sei X eine Zufallsvariable, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien monoton wachsend. Es existieren $E(|u(X)|)$, $E(|v(X)|)$ und $E(|u(X)||v(X)|)$. Zeigen Sie: $E(u(X)v(X)) \geq Eu(X)Ev(X)$. Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für den Fall, daß u monoton wachsend und v monoton fallend ist.

Hinweis: Führen Sie eine von X unabhängige Zufallsvariable mit derselben Verteilung ein.

(3 Punkte)

Lösung: Es sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit derselben Verteilung. Dann gilt

$$0 \le E\big(u(X) - u(Y)\big)\big(v(X) - v(Y)\big) = 2Eu(X)v(X) - 2Eu(X)Ev(X),$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt. Ist u monoton wachsend, v monoton fallend, so ergibt sich analog $E(u(X)v(X)) \le Eu(X)Ev(X)$.

57. Es seien $X_j \sim \text{Exp}(\lambda_j)$, $j = 1, ..., n$, unabhängig.
(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\{X_1, ..., X_n\}$.
(b) Es sei $\lambda_1 = ... = \lambda_n =: \lambda$. Zeigen Sie, dass $X_1 + ... + X_n$ die $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x), & x \ge 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

hat.

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Es gilt

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1, ..., X_n\} \le x) &= 1 - P(\min\{X_1, ..., X_n\} > x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} P(X_j > x) \\ &= 1 - \exp(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x). \end{aligned}$$

Also ist $\min\{X_1, ..., X_n\} \sim \text{Exp}(\sum_{j=1}^n \lambda_j)$.
(b) Beweis durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Sei die Formel für die Dichte bereits für alle $n \le k$ gezeigt. Für $n = k + 1$ ergibt sich mit Hilfe der Faltungsformel der Vorlesung

$$\begin{aligned} f_{X_1+...+X_k+X_{k+1}}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+...+X_k}(z-x) f_{X_{k+1}}(x)\,dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^k}{(k-1)!}(z-x)^{k-1} \exp\big(-\lambda(z-x)\big) \cdot \lambda \exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda z) \int_0^z (z-x)^{k-1}\,dx = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} z^k \exp(-\lambda z). \end{aligned}$$

Abgabetermin: Dienstag, 08.06.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivialen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 08. Juni 2004

Übungsblatt 8 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Stundenübung

61. (Borel-Cantelli-Lemma für paarweise unabhängige Ereignisse)
(a) Sei X eine reelle, nicht negative Zufallsvariable mit $0 < E(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $P(X > 0) \geq (EX)^2/E(X^2)$ gilt.
(b) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen Ereignissen. Zeigen Sie, dass $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ ist, falls $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie für $n, r \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $X_{nr} = \sum_{k=n}^{n+r} \mathbb{1}_{A_k}$ und wenden Sie Teil (a) an.

Lösung: (a) Mit Cauchy-Schwarz: $(EX)^2 = \big(E(\mathbb{1}\{X > 0\}X)\big)^2 \leq P(X > 0)E(X^2)$.
(b) Mit der Stetigkeit von oben und Teil (a) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = \lim_{r\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{r} A_k^c\Big) = \lim_{r\to\infty} P(X_{nr} = 0) \leq 1 - \lim_{r\to\infty} E(X_{nr})^2/E(X_{nr}^2).$$

Es ist

$$E(X_{nr})^2 = \Big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\Big)^2,$$

und wegen der paarweisen Unabhängigkeit gilt

$$E(X_{nr}^2) = \Big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\Big)^2 - \sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)^2 + \sum_{k=n}^{n+r} P(A_k).$$

Also ist

$$\frac{E(X_{nr})^2}{E(X_{nr}^2)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)^2/\big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\big)^2 + \big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\big)^{-1}}.$$

Nun gilt

$$0 \leq \sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)^2/\Big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=n}^{n+r} P(A_k)\Big)^{-1}.$$

Also ist $\lim_{r\to\infty} E(X_{nr})^2/E(X_{nr}^2) = 1$ und damit $P\big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\big) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 \leq P\big((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c\big) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = 0$$

und daraus die Behauptung.

Lösungen zur Hausübung

62. Es seien $X_1, ..., X_n$ reelle, positive, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie $E\big(X_1/(X_1 + ... + X_n)\big)$.

(2 Punkte)

Lösung: Sei $Y_i := X_i/(X_1 + ... + X_n)$, $i = 1, ..., n$. Dann gilt $EY_1 + ... + EY_n = E(Y_1 + ... + Y_n) = E(1) = 1$. Außerdem haben sämtliche Y_i dieselbe Verteilung und damit auch den gleichen Erwartungswert. Also ist $EY_1 = 1/n$.

63. (a) Sei $X = (X_1, ..., X_d) \sim N_d(a, \Sigma)$. Zeigen Sie, dass die Komponenten $X_1, ..., X_d$ genau dann unabhängig sind, wenn Σ eine positive Diagonalmatrix ist.
(b) Seien $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ unabhängig und $Z := (X, XY)$. Zeigen Sie, dass die Komponenten des Zufallsvektors Z unkorreliert und normalverteilt, aber nicht unabhängig sind. Ist Z zweidimensional normalverteilt?

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Sind die Komponenten von X unabhängig, so sind insbesondere die paarweisen Kovarianzen gleich 0 und damit Σ eine Diagonalmatrix. Ist umgekehrt Σ eine Diagonalmatrix, so zerfällt die d-dimensionale Dichte von X faktoriell in das Produkt dere Randdichten und die Komponenten sind damit unabhängig.
(b) Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt $\operatorname{cov}(X, XY) = EY \operatorname{var}(X) = 0$. X is laut Voraussetzung normalverteilt, für XY gilt $P(XY \leq x) = P(X \leq x, Y = 1) + P(X \geq -x, Y = -1) = \frac{1}{2}\big(P(X \leq x) + P(X \geq -x)\big) = P(X \leq x)$, also ist auch XY normalverteilt. X und XY sind aber nicht unabhängig, beispielsweise ist $P\big((X, XY) \in [0, 1] \times [2, 3]\big) = 0$, die Randwahrscheinlichkeiten sind aber beide positiv. Schließlich folgt aus Teil (a), dass Z nicht zweidimensional normalverteilt sein kann, denn sonst würde aus der Unkorreliertheit der Komponenten die Unabhängigkeit folgen.

64. Beweisen Sie: Ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$, so gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und hierauf eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n die Verteilung P_n besitzt.
Gehen Sie dazu wie folgt vor:
(a) Beweisen Sie mit Aufgabe 51, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und hierauf eine Doppelfolge $(Z_{ni})_{n,i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen und identisch $\operatorname{Bin}(1, 1/2)$-verteilten Zufallsvariablen gibt.
(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \sum_{i=1}^{\infty} Z_{ni}2^{-i}$. Zeigen Sie, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch $\mathfrak{R}(0, 1)$-verteilten Zufallsvariablen ist.
(c) Sei F_n die zu P_n gehörige Verteilungsfunktion und $F_n^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq u\}$ für alle $u \in (0, 1)$. Sei weiter $X_n(\omega) = F^{-1}\big(U(\omega)\big)$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $U(\omega) \in (0, 1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst. Beweisen Sie mit Aufgabe 33 die gewünschte Aussage.

(1+3+1 Punkte)

Lösung: (a) Laut Aufgabe 51 existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und hierauf eine Folge von unabhängigen und identisch $\operatorname{Bin}(1, 1/2)$-verteilten Zufallsvariablen. Durch eine entsprechende Umnummerierung kann man diese in eine Doppelfolge $(Z_{ni})_{n,i\in\mathbb{N}}$

überführen.

(b) Für $n,k\in\mathbb{N}$ sei $S_{nk}:=\sum_{i=1}^{k} Z_{ni}2^{-i}$. Aus der Unabhängigkeit und der Verteilung der $(Z_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ folgt, dass $P(S_{nk}=s)=2^{-k}$ für alle $s=j2^{-k}$ mit $0\le j<2^k$ gilt. Ist nun $0\le x<1$, so liegen genau $\lfloor 2^k x\rfloor+1$ dieser s-Werte im Intervall $[0,x]$, also ist $P(S_{nk}\le x)=\big(\lfloor 2^k x\rfloor+1\big)/2^k$. Nun strebt aber S_{nk} mit $k\to\infty$ wachsend gegen U_n, also folgt mit der Stetigkeit von oben für Wahrscheinlichkeitsmaße $P(U_n\le x)=\lim_{k\to\infty}P(S_{nk}\le x)=x$. Also ist U_n für jedes $n\in\mathbb{N}$ $\mathfrak{R}(0,1)$-verteilt. Die Unabhängigkeit der $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entspringt der Tatsache, dass es sich um Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen handelt.

(c) In Aufgabe 33 haben wir gezeigt, dass X_n die Verteilung P_n besitzt. Außerdem sind auch sämtliche X_n als Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen unabhängig. Damit ist die Aussage der Aufgabe bewiesen.

65*. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $0\le a_n\le 1$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) heißt unter P *unabhängige Folge von Ereignissen*, wenn für jede endliche Teilmenge $K\subset\mathbb{N}$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{n\in K}A_n\Big)=\prod_{n\in K}P(A_n).$$

Zeigen Sie, dass genau dann ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) und eine unter P unabhängige Folge von Ereignissen $A_n\subset\Omega$, $n\in\mathbb{N}$, mit $P(A_n)=a_n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ existieren, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,1-a_n)<\infty$ ist.

(6* Punkte)

Lösung: Sei $\gamma_n=\min(a_n,1-a_n)$ für $n\in$ N. Ist $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$, so ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\gamma_n)=0$. Angenommen, es gibt einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) und eine Folge von unter P unabhängigen Ereignissen $A_n\subset\Omega, n\in$ N. Dann gibt es ein $\omega\in\Omega$ mit der Eigenschaft, dass $\varepsilon=P(\{\omega\})>0$ ist. Wir wählen ein $m\in$ N so, dass $\delta=\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)<\varepsilon$ ist. Für die unabhängigen Ereignisse

$$B_i=\begin{cases}A_i, & \text{falls } \omega\in A_i\\ A_i^c, & \text{falls } \omega\in A_i^c\end{cases},\quad i=1,\dots,m,$$

trifft $\omega\in\bigcap_{i=1}^{m}B_i$ zu. Dies führt auf den Widerspruch

$$\varepsilon\le P\Big(\bigcap_{i=1}^{m}B_i\Big)=\prod_{i=1}^{m}P(B_i)\le\prod_{i=1}^{m}(1-\gamma_i)=\delta.$$

Sei $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$. Es sei $\Omega=\{0,1\}^{\mathrm{N}}$,

$$\Omega_0=\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega;\omega_i=1 \text{ für jedes } i\in \mathrm{N}\}$$

und für jedes $n\in$ N

$$\Omega_n=\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega;\omega_n=0,\omega_i=1 \text{ für jedes } i\ge n+1\}.$$

Wir setzen abkürzend $\Gamma_{n+1}=\prod_{i=n+1}^{\infty}(1-\gamma_i)$ für $n\in \mathrm{N}_0$ und definieren

$$P\big(\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\}\big)=\Gamma_1\quad\text{für } (\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega_0,$$

$$P\big(\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\}\big)=\gamma_1\Gamma_2\quad\text{für } (\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega_1,$$

$$P\big(\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\}\big)=\gamma_n\Big[\prod_{i=1}^{n-1}\gamma_i^{1-\omega_i}(1-\gamma_i)^{\omega_i}\Big]\Gamma_{n+1}\quad\text{für } (\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega_n,\ n\ge 2.$$

Es ist $\Omega'=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Omega_n$ eine abzählbare Teilmenge von Ω, für jedes $n\ge 2$ gilt

$$\sum_{(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})\in\{0,1\}^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}\gamma_i^{1-\omega_i}(1-\gamma_i)^{\omega_i}=1,$$

also wegen

$$\Gamma_n+\gamma_n\Gamma_{n+1}=\Gamma_{n+1}\quad\text{für } n\ge 1$$

$$\sum_{\omega\in\Omega'}P(\{\omega\})=\Gamma_1+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\Gamma_{n+1}=\lim_{n\to\infty}[\Gamma_1+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Gamma_{k+1}]=\lim_{n\to\infty}\Gamma_{n+1}=1.$$

Auf diese Weise ist ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω festgelegt. Definieren wir für $n\in$ N

$$B_n=\{(\omega_i,i\in \mathrm{N})\in\Omega;\omega_n=0\},$$

so ist

$$P(B_n\cap\Omega_j)=\begin{cases}0, & j<n,\\ \gamma_n\Gamma_{n+1}, & j=n,\\ \gamma_n\gamma_j\Gamma_{j+1}, & j>n,\end{cases}$$

also

$$P(B_n)=\gamma_n[\Gamma_{n+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\gamma_j\Gamma_{j+1}]=\gamma_n.$$

Allgemeiner ergibt sich für je endlich viele natürliche Zahlen $n_1<\dots<n_k$ und die zugehörigen Ereignisse $B_{n_1},\dots,B_{n_k}$ die Identität

$$P(B_{n_1}\cap\dots\cap B_{n_k})=\gamma_{n_1}\cdot\ldots\cdot\gamma_{n_k}[\Gamma_{n_k+1}+\sum_{j=n_k+1}^{\infty}\gamma_j\Gamma_{j+1}]=\gamma_{n_1}\cdot\ldots\cdot\gamma_{n_k}.$$

Hieraus folgt die Unabhängigkeit der Ereignisse $B_n, n\in$ N. Definieren wir die Ereignisse $A_n, n\in$ N, in der Form $A_n=B_n$, falls $P(B_n)=a_n$ ist und $A_n=B_n^c$, falls $P(B_n)=1-a_n$ ist, so hat die Folge $A_n, n\in$ N, die gewünschten Eigenschaften.

Abgabetermin: Dienstag, 15.06.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 15. Juni 2004

Übungsblatt 9 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

70. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, reelle Zufallsvariablen. Man beweise oder widerlege:

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

(4 Punkte)

Lösung: Es seien $X_n, n \in \mathbb{N}$ unabhängig mit $P(X_n = 0) = 1-1/\sqrt{n}$, $P(X_n = n) = 1/\sqrt{n}$. Dann gilt offensichtlich $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Andererseits ist aber

$$\begin{aligned} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\Big| \geq \frac{1}{2}\Big) &= P\Big(\sum_{k=1}^n X_k \geq \frac{n}{2}\Big) \geq P\Big(\bigcup_{k=1}^n \{X_k \geq n/2\}\Big) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n P(X_k < n/2) = 1 - \prod_{k=\lceil n/2\rceil}^n (1-1/\sqrt{k}) \\ &\geq 1 - \exp\Big(-\sum_{k=\lceil n/2\rceil}^n 1/\sqrt{k}\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=\lceil n/2\rceil}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$ gilt daher *nicht* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

71. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, reelle, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Man zeige: Ist Y eine reelle Zufallsvariable, und gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to Y$ P-f.s., so ist $E|X_1| < \infty$ und $Y = EX_1$ P-f.ü.

Hinweise: (a) $\frac{1}{n}X_n \to 0$ P-f.s., (b) $E|X_1| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty P(|X_1| > n) < \infty$, (c) Borel-Cantelli-Lemma.

(3 Punkte)

Lösung: Es ist $\frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$, also folgt mit Aufgabe 69, dass $\frac{1}{n}X_n \to 0$ P-f.s. Mit Aufgabe 66 folgt dann $\sum_{n=1}^\infty P\big(|X_n| > n\big) < \infty$. Da die X_n identisch verteilt sind, ist dann auch $E|X_1| < \infty$ (Aufgabe 34). Daraus ergibt sich $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n \to E(X_1)$ P-f.s. (st.G.d.gr.Z.) und daher $Y = E(X_1)$ P-f.s.

72. (a) Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$ reelle, unabhängige Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Gilt $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to 0$ P-f.s., so ist $\sum_{n=1}^\infty P\big(\frac{1}{n}|X_n| \geq \varepsilon\big) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$.

(b) Es seien X_n, $n = 2,3,...$, unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $P(X_n = -n) = P(X_n = n) = 1/\big(2n\log(n)\big)$ und $P(X_n = 0) = 1 - 1/\big(n\log(n)\big)$. Man untersuche, ob $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k \to 0$ P-f.s. bzw. $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ gilt.

(1+3 Punkte)

Lösung: (a) Aus $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n \to 0$ P-f.s. folgt mit Aufgabe 69 $\frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} X_n \to 0$ P-f.s. und damit $\sum_{n=1}^\infty P\big(\frac{1}{n}|X_n| \geq \varepsilon\big) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ mit Aufgabe 66.

(b) Es ist $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n| \geq 1) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\log(n)} = \infty$. Nach Teil (a) gilt daher *nicht* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n \to 0$ P-f.s. Es ist aber

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k\Big) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^n \frac{k}{\log(k)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^n \frac{1}{\log(k)} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^m \frac{1}{\log(k)} + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\log(k)} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^m \frac{1}{\log(k)} + \frac{n-m}{n}\frac{1}{\log(m+1)} \end{aligned}$$

für alle $2 \leq m \leq n$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{var}\big(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k\big) \leq 1/\log(m+1)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}\big(\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k\big) = 0$. Dies liefert $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^n X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ (schw.G.d.gr.Z.).

73. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von reellen Zufallsvariablen und X eine weitere reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann

$$X_n \to X \ P\text{-f.s.} \ \Leftrightarrow \ X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$$

gilt.

(4 Punkte)

Lösung: Beweis der nichttrivialen Richtung: Sei $X_n \uparrow$ und $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$. Zu zeigen: $X_n \to X$ P-f.s. Es gilt

$$\begin{aligned} P(X_n \to X) &= P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \forall m \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}\Big\}\Big) \\ &= P\Big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}\Big\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}\Big\}\Big). \end{aligned}$$

Da $X_n \uparrow$, gilt $\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq 1/m\} \uparrow$, also

$$\bigcap_{n\geq n_0}\Big\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}\Big\} = \Big\{\omega \in \Omega : |X_{n_0}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}\Big\}$$

und mit der Stetigkeit von unten und der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit folgt

$$P\Big(\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}\Big\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{m}\Big\}\Big) = \lim_{n_0\to\infty} P\Big(|X_{n_0} - X| \leq \frac{1}{m}\Big) = 1.$$

Schließlich folgert man durch vollständige Induktion, dass $P(\bigcap A_n) = 1$ gilt, sofern $P(A_n) = 1$ für alle n gilt, womit sich die gesuchte Aussage ergibt.

Abgabetermin: Dienstag, 22.06.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivialen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 22. Juni 2004

Übungsblatt 10 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I
SoSe 2004

Lösungen zur Stundenübung

76. Es seien $\Omega_n := \{\pi | \pi : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \text{ bijektiv}\}$, $X_n(\pi) := |\{i \in \{1,...,n\} : \pi(i) = i\}|$ für alle $\pi \in \Omega_n$ und P_n das diskrete Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_n.
(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P_n(X_n = k) = P(X = k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei $X \sim \mathcal{P}(1)$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass $E\big(X(X-1)\cdot ... \cdot (X-r+1)\big) = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, und berechnen Sie $E\big(X_n(X_n-1)\cdot ... \cdot (X_n-r+1)\big)$.

Lösung: (a) Es gilt

$$P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{j!} \to \frac{1}{k!}e^{-1}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, also $\lim_{n\to\infty} P_n(X_n = k) = P(X = k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $X \sim \mathcal{P}(1)$ ist.
(b) Man rechnet direkt nach, dass für $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ gilt $EX(X-1)\cdot ... \cdot (X-r+1) = \lambda^r$. Für $n < r$ ist $E\big(X_n(X_n-1)\cdot ... \cdot (X_n-r+1)\big) = 0$. Für $r \le n$ folgt aus der Darstellung $X_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(A_i)$ mit $A_i = \{\pi \in \Omega_n : \pi(i) = i\}$, dass

$$X_n(X_n-1)\cdot ... \cdot (X_n-r+1) = r! \sum_{1\le i_1<...<i_r\le n} \mathbb{1}(A_{i_1}\cap ... \cap A_{i_r}),$$

also

$$E\big(X_n(X_n-1)\cdots(X_n-r+1)\big) = r!\binom{n}{r}P(A_1\cap\cdots\cap A_r) = r!\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!} = 1$$

ist.

Lösungen zur Hausübung

78. Es sei $X_\nu \sim \mathcal{H}(a_\nu, r_\nu, n)$, $\nu = 1, 2, ...$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ mit $\lim_{\nu\to\infty}\frac{r_\nu}{a_\nu} = p \in (0,1)$. Ferner sei $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} r_\nu = \infty$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\nu\to\infty} P(X_\nu = x) = P(X = x) \quad \text{für alle } x \in \{0,1,...,n\}.$$

Wie kann man diese Aussage interpretieren?

(4 Punkte)

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} P(X_\nu = x) &= \frac{\binom{r_\nu}{x}\binom{a_\nu-r_\nu}{n-x}}{\binom{a_\nu}{n}} = \frac{r_\nu!}{x!(r_\nu-x)!}\cdot\frac{(a_\nu-r_\nu)!}{(a_\nu-r_\nu-(n-x))!(n-x)!}\cdot\frac{n!(a_\nu-n)!}{a_\nu!} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{(a_\nu-r_\nu)(a_\nu-r_\nu-1)\cdot\dots\cdot(a_\nu-r_\nu-(n-x-1))}{a_\nu\cdot(a_\nu-1)\cdot ...\cdot(a_\nu-(n-1))} \\ &\quad \cdot r_\nu(r_\nu-1)\cdot ...\cdot(r_\nu-x+1) \\ &= \binom{n}{x}\underbrace{\frac{a_\nu-r_\nu}{a_\nu}}_{\to(1-p)}\cdot\underbrace{\frac{a_\nu-r_\nu-1}{a_\nu-1}}_{\to(1-p)}\cdot ...\cdot\underbrace{\frac{a_\nu-r_\nu-n+1}{a_\nu-n+1}}_{\to(1-p)} \\ &\quad \cdot\underbrace{\frac{r_\nu}{a_\nu-r_\nu-n+1}}_{\to\frac{p}{1-p}}\cdot ...\cdot\underbrace{\frac{r_\nu-x+1}{a_\nu-r_\nu-n+x}}_{\to\frac{p}{1-p}}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\lim_{\nu\to\infty} P(X_\nu = x) = \binom{n}{x}(1-p)^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^x = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = P(X = x).$$

79. (a) Es sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Zeigen Sie

$$P(X \le n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^\infty x^n \exp(-x)\,dx \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Es sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $Y \sim \mathrm{Nb}(r+1,p)$ auf $\{r+1, r+2, ..\}$ mit $r \in \{0,1,...,n-1\}$. Zeigen Sie

$$P(X \le r) = \binom{n}{r}(n-r)\int_p^1 x^r(1-x)^{n-r-1}dx = P(Y \ge n+1).$$

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Mit n-maliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_\lambda^\infty x^n\exp(-x)\,dx &= \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda) + \frac{1}{(n-1)!}\int_\lambda^\infty x^{n-1}\exp(-x)\,dx \;=\; ... \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda) + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda) + \cdots + \exp(-\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = k) \;=\; P(X \le n)\,. \end{aligned}$$

(b) Auch hier ergibt sich durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{r}(n-r)\int_p^1 x^r(1-x)^{n-r-1}\,dx \\
=\;& \binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}+\binom{n}{r}r\int_p^1 x^{r-1}(1-x)^{n-r}\,dx \\
=\;& \binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}+\binom{n}{r-1}(n-(r-1))\int_p^1 x^{r-1}(1-x)^{n-r}\,dx \;=\; \ldots \\
=\;& \binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}+\binom{n}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-(r-1)}+\cdots+\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0} \\
=\;& \sum_{k=0}^{r}P(X=k) \;=\; P(X\le r)\,.
\end{aligned}$$

Interpretiert man X als die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Y als die Anzahl der Versuche bis zum $(r+1)$-ten Erfolg bei unabhängigen Versuchswiederholungen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, so erkennt man

$$X\le r \;\Leftrightarrow\; Y\ge n+1,$$

also $P(X\le r)=P(Y\ge n+1)$.

80. Es seien $X_{n\nu}$, $\nu=1,...,n$, unabhängige Zufallsvariablen, $X_{n\nu}\sim \operatorname{Bin}(1,p_{n\nu})$. Es gelte $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le\nu\le n}p_{n\nu}=0$ und $\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu}=\lambda>0$. Zeigen Sie für $S_n=\sum_{\nu=1}^n X_{n\nu}$:

$$\lim_{n\to\infty}P(S_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad\text{für jedes } k\in\mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Man betrachte den Logarithmus der erzeugenden Funktion von S_n und wende dann eine geeignete, zweiseitige Abschätzung für den Logarithmus an.

(3 Punkte)

Lösung: Es ist $\log(1+x)=x+xr(x)$ mit $r(x)\to 0$ für $x\to 0$. Hieraus folgt für die erzeugende Funktion $f_n(t)$, $|t|\le 1$, von S_n die Darstellung

$$\log f_n(t)=\sum_{k=1}^n\log\big(1+p_{nk}(t-1)\big)=\Big[\sum_{k=1}^n p_{nk}\Big](t-1)+o(1)=\lambda(t-1)+o(1)\;\text{ für } n\to\infty.$$

81*. (a) Es seien $m,j\in\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für jedes $z\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{r=j}^{2z+j+1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r}\le\delta_{jm}\le\sum_{r=j}^{2z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r}.$$

(b) Es seien $X,X_1,X_2,...$ nicht negative ganzzahlige Zufallsvariablen mit $E(|X|^r)<\infty$ und $E(|X_n|^r)<\infty$ für alle $r\in\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}$. Es seien $b_r:=E\binom{X}{r}$, $b_r(n):=E\binom{X_n}{r}$, $r\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}$, und es gelte (1.) $P(X=k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=k}^n(-1)^{r-k}\binom{r}{k}b_r$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und (2.) $\lim_{n\to\infty}b_r(n)=b_r$ für alle $r\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=P(X=k)$ für jedes $k\in\mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Es sei $X\sim\mathcal{P}(\lambda),\lambda>0$. Zeigen Sie, dass die Aussage (1.) aus (b) zutrifft.

(d) n unterscheidbare Kugeln werden auf d_n unterscheidbare Urnen verteilt. Alle unterscheidbaren Aufteilungen seien gleichwahrscheinlich. Es sei X_n die Anzahl der Urnen, die leer bleiben. Es gelte $\lim_{n\to\infty}d_n\exp(-n/d_n)=\lambda>0$. Es sei $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=P(X=k)$ für jedes $k\in\mathbb{N}_0$ gilt.

(3*+2*+1*+2* Punkte)

Lösung: (a) Ist $m<j$, so gilt die Aussage offensichtlich. Im folgenden sei $j\le m$. Es sei $z\in\mathbb{N}_0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{r=j}^{z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r} &= \sum_{r=0}^{z}(-1)^r\binom{r+j}{j}\binom{m}{r+j} = \binom{m}{j}\sum_{r=0}^{z}(-1)^r\binom{m-j}{r}\\
&= \binom{m}{j}\sum_{r=0}^{\min(z,m-j)}(-1)^r\binom{m-j}{r}.
\end{aligned}$$

Erster Fall: $0\le z<m-j$. Hier ist $m>j$, also $\delta_{mj}=0$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{r=j}^{z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r} &= \binom{m}{j}\sum_{r=0}^{z}(-1)^r\binom{m-j}{r}\\
&= \binom{m}{j}\left[1+\sum_{r=1}^{z}(-1)^r\left[\binom{m-j-1}{r-1}+\binom{m-j-1}{r}\right]\right]\\
&= \binom{m}{j}\left[1-\binom{m-j-1}{0}+(-1)^z\binom{m-j-1}{z}\right]\\
&= \binom{m}{j}(-1)^z\binom{m-j-1}{z},
\end{aligned}$$

und dies ist ≥ 0 für z gerade bzw. ≤ 0 für z ungerade.

Zweiter Fall: $0\le m-j\le z$. Man erhält $\sum_{r=j}^{z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r}=\delta_{mj}$, also folgt auch hier die Behauptung.

(b) Mit (a) gilt zunächst für jedes $z\in\mathbb{N}_0$ und $j\in\mathbb{N}_0$:

$$\sum_{r=j}^{2z+j+1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{X_n}{r}\le 1_{\{X_n=j\}}\le\sum_{r=j}^{2z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{X_n}{r}.$$

Mit der Monotonie des Erwartungswertes folgt

$$\sum_{r=j}^{2z+j+1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}b_r(n)\le P(X_n=j)\le\sum_{r=j}^{2z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}b_r(n).$$

Mit (2.) erhält man

$$\sum_{r=j}^{2z+j+1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}b_r\le\liminf_{n\to\infty}P(X_n=j)\le\limsup_{n\to\infty}P(X_n=j)\le\sum_{r=j}^{2z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}b_r.$$

Mit (1.) ergibt sich dann für $z\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=j)=P(X=j).$$

(c) Es ist

$$\binom{X}{r} = \frac{X(X-1)\cdot\dots\cdot(X-(r-1))}{r!}$$

und damit

$$b_r = E\binom{X}{r} = \frac{E(X(X-1)\cdot\dots\cdot(X-(r-1)))}{r!}.$$

Wegen $E(X(X-1)\cdot\dots\cdot(X-(r-1))) = \lambda^r$, also $b_r = \lambda^r/r!$ folgt

$$\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}b_r = \sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{\lambda^r}{r!} = \frac{\lambda^k}{k!}\sum_{r=k}^{n}\frac{(-\lambda)^{r-k}}{(r-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-\lambda)^r}{r!},$$

und so

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=k}^{n}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}b_r = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) = P(X=k).$$

(d) Es sei $B_k :=$ „Urne k bleibt leer“. Es gilt dann offensichtlich $X_n = \sum_{k=1}^{d_n} 1_{B_k}$. Durch Induktion über r beweist man

$$X_n(X_n-1)\cdot\ldots\cdot(X_n-r+1) = r!\sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le d_n} 1_{B_{i_1}}\cdot\ldots\cdot 1_{B_{i_r}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
E\binom{X_n}{r} &= E\left(\frac{X_n(X_n-1)\cdot\ldots\cdot(X_n-(r-1))}{r!}\right) = E\sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le d_n} 1_{B_{i_1}}\cdot\ldots\cdot 1_{B_{i_r}} \\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le d_n} P(B_{i_1}\cap\ldots\cap B_{i_r}) = \binom{d_n}{r}\left(\frac{d_n-r}{d_n}\right)^n \\
&= \underbrace{\left(1-\frac{1}{d_n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{r-1}{d_n}\right)}_{\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}1}\underbrace{\left(d_n^r\left(1-\frac{r}{d_n}\right)^n\right)}_{\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\lambda^r}\frac{1}{r!},
\end{aligned}$$

also $\lim_{n\to\infty} E\binom{X_n}{r} = \frac{\lambda^r}{r!}$. Mit Teil (c) ergibt sich also $\lim_{n\to\infty} E\binom{X_n}{r} = E\binom{X}{r}$, wobei X eine mit Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable ist. Damit ist (2.) aus (b) gezeigt und es folgt $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X=k)$ für jedes $k\in\mathbb{N}_0$.

Abgabetermin: Dienstag, 29.06.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivialen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 29. Juni 2004

Übungsblatt 11 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I
SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

86. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sei gleich p. Es werden n unabhängige Versuche durchgeführt. X/n sei die relative Häufigkeit von A in dieser Versuchsreihe. Mit der durch den zentralen Grenzwertsatz von *De Moivre-Laplace* gegebenen Approximation der Binomialverteilung beantworte man folgende Fragen:
(a) Sei $p = 0.4$ und $n = 1500$. Wie groß ist $P(0.4 \leq X/n \leq 0.44)$?
(b) Sei $p = 0.375$. Wie groß muss n sein, damit $P(|X/n - p| \leq 0.01) \geq 0.995$ ist?
(c) $p = \frac{2}{3}$, $n = 1200$. Wie groß muss ε gewählt werden, damit $P(|X/n - p| < \varepsilon) \geq 0.985$ ist?
(d) Sei $n = 14400$. Für welche Werte von p wird $P(|X/n - p| < 0.01) \geq 0.99$?

(1+1+1+1 Punkte)

Lösung: Modell: n-facher Münzwurf, Wahrscheinlichkeit für Kopf ist p, X_n ist die Anzahl der Kopfwürfe, $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$. Wir wissen:

$$P\left(\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \beta\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

(a) $p = 0.4$, $n = 1500$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P\Big(0.4 \leq \frac{X_n}{n} \leq 0.44\Big) &= P\left(\frac{0.4n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{0.44n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi\Big(\frac{0.44n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) - \Phi\Big(\frac{0.4n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \\ &= \Phi(3.1623) - \Phi(0) \;=\; 0.9992 - 0.5 \;=\; 0.4992. \end{aligned}$$

(b) Alles dieselbe Idee. $n = 18468$. (c) $\varepsilon \geq 0.0331$. (d) $p \leq 0.3165$ oder $p \geq 0.683$.

87. Zwei Kinos konkurrieren um die Gunst von 1000 Kunden. Man nehme an, dass jeder Kunde unabhängig von den anderen Kunden eines der beiden besucht, wobei es ihm ganz egal ist, welches. Wieviele Sitze sollte es in jedem der beiden Kinos geben, wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Kunden wegen Platzmangel zu verlieren, kleiner als 0.01 sein soll?

(2 Punkte)

Lösung: Es sei X die Anzahl der Kunden, die in Kino 1 hineinwollen, und a die Anzahl der Sitze in Kino 1. Es gilt $X \sim \text{Bin}(1000, 1/2)$. Damit die Wahrscheinlichkeit, einen Kunden wegen Platzmangel zu verlieren, kleiner als 0.01 ist, muss gelten:

$$P(X > a) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{X - 500}{\sqrt{250}} > \frac{a - 500}{\sqrt{250}}\right) < 0.01.$$

Wegen

$$P\left(\frac{X - 500}{\sqrt{250}} > \frac{a - 500}{\sqrt{250}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a - 500}{\sqrt{250}}\right)$$

und

$$1 - \Phi\left(\frac{a - 500}{\sqrt{250}}\right) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{a - 500}{\sqrt{250}}\right) > 0.99,$$

sowie

$$\Phi(x) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2.33$$

muss gelten

$$\frac{a - 500}{\sqrt{250}} \geq 2.33 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 2.33\sqrt{250} + 500 \approx 536.8405.$$

Insgesamt muss $a \geq 537$ gelten, d.h. jedes Kino sollte mindestens 537 Sitze haben.

88. Es sei Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichte zur Standardnormalverteilung.
(a) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) \;<\; 1 - \Phi(x) \;<\; \frac{1}{x}\varphi(x) \qquad \text{für alle } x > 0.$$

(b) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \exp(-x^2/2)} \leq \Phi(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \exp\left(-x^2\right)} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Offenbar gilt $\varphi'(x) = -x \cdot \varphi(x)$. Damit und mit der Tatsache, dass $x > 0$ ist, folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \int_x^\infty \varphi(y)\,dy \stackrel{x \geq 0}{=} \int_x^\infty \frac{y}{y}\varphi(y)\,dy \;=\; -\int_x^\infty \frac{\varphi'(y)}{y}\,dy \\ &= -\frac{\varphi(y)}{y}\Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{y^2}\,dy \;=\; \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{y^2}\,dy, \end{aligned}$$

wobei das Integral offensichtlich einen positiven Wert liefert. Damit ist die erste Abschätzung gezeigt. Nun integrieren wir nochmals partiell:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{y^2}\,dy \;=\; \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^\infty \frac{-y \cdot \varphi(y)}{y^3}\,dy \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^\infty \frac{\varphi'(y)}{y^3}\,dy \;=\; \frac{\varphi(x)}{x} + \frac{\varphi(y)}{y^3}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty 3\,\frac{\varphi(y)}{y^4}\,dy \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^3} + 3 \cdot \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{y^4}\,dy, \end{aligned}$$

und wieder liefert das verbleibende Integral einen positiven Wert. Man kann so durch sukzessives partielles Integrieren eine ganze Folge von Abschätzungen für $1-\Phi(x)$ bekommen.
(b) Die behauptete Aussage ist äquivalent mit

$$(2\pi)\big(1-\exp(-x^2/2)\big) \leq \int_Q \exp(-|t|^2/2)\,dt \leq (2\pi)\big(1-\exp(-x^2)\big)$$

wobei $Q=\{t:=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 : -x\leq t_1\leq +x, -x\leq t_2\leq +x\}$ und $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist. Definieren wir $K_1=\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 : t_1^2+t_2^2\leq x^2\}$ und $K_2=\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 : t_1^2+t_2^2\leq 2x^2\}$, so ist $K_1\subset Q\subset K_2$ und folglich

$$\int_{K_1}\exp(-|t|^2/2)\,dt \leq \int_Q \exp(-|t|^2/2)\,dt \leq \int_{K_2}\exp(-|t|^2/2)\,dt.$$

Es ist

$$\int_{K_1}\exp(-|t|^2/2)\,dt = (2\pi)\big(1-\exp(-x^2/2)\big)$$

und

$$\int_{K_2}\exp(-|t|^2/2)\,dt = (2\pi)\big(1-\exp(-x^2)\big).$$

89. Lokale Form des ZGWS für die hypergeometrische Verteilung: Für $n\in\mathbb{N}$ sei $X_n\sim \mathrm{HypGeo}(N_n,M_n,n)$. Es seien $\mu_n:=(M_nn)/N_n$ und $\sigma_n^2:=n(M_n/N_n)(1-M_n/N_n)\big((N_n-n)/(N_n-1)\big)$ der Erwartungswert und die Varianz von X_n. Weiter gelte $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2=\infty$. Für $a>0$ sei:

$$C_n(a)=\left\{m\in\{0,...,\min\{M_n,n\}\}\ :\ |m-\mu_n|\leq a\sqrt{\sigma_n^2}\right\}.$$

Man zeige:

$$\sup_{m\in C_n(a)}\left|\frac{P(X_n=m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(m-\mu_n)^2}{\sigma_n^2}\right)}-1\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(4* Punkte)

Lösung: Für beliebiges $p_n\in(0,1)$ gilt

$$P(X_n=m)=\frac{\binom{M_n}{m}\binom{N_n-M_n}{n-m}}{\binom{N_n}{n}}=\frac{\binom{M_n}{m}p_n^m(1-p_n)^{M_n-m}\binom{N_n-M_n}{n-m}p_n^{n-m}(1-p_n)^{N_n-M_n-n+m}}{\binom{N_n}{n}p_n^n(1-p_n)^{N_n-n}}.$$

Man wähle nun speziell $p_n=n/N_n$ und verwende die lokale Form des ZGWS für die Binomialverteilung.

90. m Nullen und n Einsen werden in einer Reihe angeordnet. Alle unterscheidbaren Anordnungen seien gleichwahrscheinlich. Jede Anordnung läßt sich aufteilen in Serien von gleichen Elementen (z.B. besteht 000100110 aus den fünf Serien 000, 1, 00, 11, 0). Es sei $X_{m,n}$ die Anzahl der Serien.
(a) Zeigen Sie für $s\in\{1,...,\min(m,n)\}$:

$$P(X_{m,n}=2s)=2\frac{\binom{m-1}{s-1}\binom{n-1}{s-1}}{\binom{m+n}{m}},\quad P(X_{m,n}=2s+1)=\frac{\binom{m-1}{s}\binom{n-1}{s-1}+\binom{m-1}{s-1}\binom{n-1}{s}}{\binom{m+n}{m}}.$$

(b*) Es sei $\mu_{m,n}=2\frac{mn}{m+n}$, $\sigma_{m,n}^2=\frac{m^2n^2}{(m+n)^3}$. Zeigen Sie im Fall $\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^2=\infty$:

$$\lim_{m,n\to\infty}P\left(\frac{X_{m,n}-\mu_{m,n}}{2\sigma_{m,n}}\leq x\right)=\Phi(x)\qquad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

(c*) Es sei $X_{m,n}^{(0)}$ die Anzahl der Serien der Sorte „0“, $X_{m,n}^{(1)}$ die Anzahl der Serien der Sorte „1“ . Formulieren und beweisen Sie entsprechende Aussagen wie in Teil (a) und Teil (b) für $X_{m,n}^{(0)}$ und $X_{m,n}^{(1)}$.

(2+2*+2* Punkte)

Lösung: (a) In einer Folge von m Nullen und n Einsen gibt es genau dann $2s$ Serien, wenn es s Serien der Sorte 0 und s Serien der Sorte 1 gibt. Eine solche mit einer 0-Serie beginnende Folge erhalten wir, wenn bei einer Anordung von m Nullen in genau $s-1$ der $m-1$ Zwischenplätze Blöcke mit Einsen plaziert werden. Es gibt $\binom{m-1}{s-1}$ Möglichkeiten, diese Zwischenplätze auszuwählen. Denken wir uns diese $s-1$ Zwischenplätze als $s-1$ unterscheidbare Urnen, so gibt es $\binom{n-1}{s-1}$ Möglichkeiten, die nicht unterscheidbaren Einsen so auf diese $s-1$ Urnen zu verteilen, daß keine Urne leer bleibt. Folglich gibt es $\binom{m-1}{s-1}\binom{n-1}{s-1}$ Möglichkeiten für genau $2s$ Serien in einer Folge, die mit einer 0-Serie beginnt. Dieselbe Anzahl an Möglichkeiten ergibt sich für genau $2s$ Serien in einer Folge, die mit einer 1-Serie beginnt. Hieraus folgt die behauptete Aussage für $P(X_{m,n}=2s)$. Die Behauptung für $P(X_{m,n}=2s+1)$ ergibt sich durch entsprechende Überlegungen.
(b) Sei $Z_{m,n}\sim$ HypGeo$(m+n,m,n)$. Wegen $\binom{m-1}{s-1}=\frac{s}{m}\binom{m}{s}$ und $\binom{n-1}{s-1}=\frac{s}{n}\binom{n}{n-s}$ ist

$$P(X_{m,n}=2s)=\frac{2s^2}{mn}P(Z_{m,n}=s)$$

und analog wegen $\binom{m-1}{s}=\frac{m-s}{m}\binom{m}{s}$ und $\binom{n-1}{s}=\frac{n-s}{n}\binom{n}{n-s}$

$$P(X_{m,n}=2s+1)=\frac{(m+n-2s)s}{mn}P(Z_{m,n}=s).$$

Dies liefert, gleichmäßig in $s\in \mathrm{N}_0, |s-\mu_{m,n}|\leq a\sigma_{m,n}$, $a>0$ eine beliebige Konstante,

$$P(X_{m,n}=2s)+P(X_{m,n}=2s+1)=\frac{(m+n)s}{mn}P(Z_{m,n}=s)\sim 2P(Z_{m,n}=s),$$

womit die behauptete Aussage aus der lokalen Form des zentralen Grenzwertsatzes für die hypergeometrische Verteilung folgt.
c) Es ist $X_{m,n}^{(0)}\sim$ HypGeo$(m+n,n+1,m)$ und $X_{m,n}^{(1)}\sim$ HypGeo$(m+n,m+1,n)$, so daß unter der Voraussetzung $\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^2=\infty$ der zentrale Grenzwertsatz für hypergeometrische Verteilungen anwendbar ist.

Abgabetermin: Dienstag, 06.07.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 06. Juli 2004

Übungsblatt 12 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

95. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P_{(a,b)}(X_i = k) = \frac{1}{b-a+1}$$

für alle $k \in \{a, ..., b\}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ unbekannt sind. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für (a, b).

(3 Punkte)

Lösung: Es ist für $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$P_{(a,b)}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a+1)^n}, & \text{falls } a \leq \min(x_1, ..., x_n), b \geq \max(x_1, ..., x_n), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $P_{(a,b)}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ maximal für $a = \min(x_1, ..., x_n)$ und $b = \max(x_1, ..., x_n)$, also ist $d(X_1, ..., X_n) := \big(\min(X_1, ..., X_n), \max(X_1, ..., X_n)\big)$ der ML-Schätzer für (a, b).

96. Es sei $X = (X_1, ..., X_n)$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben $\text{Bin}(1,p)$-Verteilung mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$ sind. Es sei $f(p)$ ein Polynom vom Grad $r > n$. Man zeige, dass kein erwartungstreuer Schätzer für $f(p)$ existiert.

(3 Punkte)

Lösung: Angenommen, es gibt einen Schätzer d mit $\text{E}_p\big(d(X)\big) = f(p)$. Dann gilt

$$f(p) = \text{E}_p\big(d(X)\big) = \sum_{(k_1, ..., k_n) \in \{0,1\}^n} p^{\sum_{i=1}^n k_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n k_i} d(k_1, ..., k_n).$$

Die rechte Seite ist ein Polynom vom Grad $\leq n$. Dies ergibt einen Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $f(p)$ ein Polynom vom Grad $r > n$ ist.

97. Es seien $X, Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ unabhängig. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$P(X - Y \geq 1) \leq 1 - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $P^{X|Z=z}$, $z \in \mathbb{N}_0$, für $Z := X + Y$.

(3 Punkte)

Lösung: Es ist $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(2\lambda)$ und $P^{X|Z=z} = \text{Bin}(z, \frac{1}{2})$, also

$$\begin{aligned} P(X - Y \geq 1) &= P\Big(X \geq \frac{1}{2}(Z+1)\Big) = \sum_{z=0}^{\infty} P\Big(X \geq \frac{1}{2}(z+1) | Z = z\Big) P(Z = z) \\ &\leq \sum_{z=0}^{\infty} \frac{z}{z+1} P(Z = z) = E\Big(\frac{Z}{Z+1}\Big) = 1 - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

98. Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, je identisch $\text{Nb}(1,p)$-verteilt auf $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$e(z) := E\big(|X - Y| \,\big|\, \min(X,Y) = z\big)$$

ist konstant in $z \in \mathbb{N}_0$.

(3 Punkte)

Lösung: Es ist $P\big(\min(X,Y) = z\big) = q^{2z}(1-q^2)$ mit $q = 1 - p$ und

$$\begin{aligned} e(z) &= \sum_{y=z+1}^{\infty} (y-z) \frac{P\big(\max(X,Y) = y, \min(X,Y) = z\big)}{P\big(\min(X,Y) = z\big)} = 2 \sum_{y=z+1}^{\infty} (y-z) \frac{p^2 q^{y+z}}{q^{2z}(1-q^2)} \\ &= 2\frac{p^2}{1-q^2} \sum_{y=z+1}^{\infty} (y-z) q^{y-z} = 2\frac{p^2}{1-q^2} \sum_{y=1}^{\infty} y q^y = 2\frac{1-p}{1-q^2}. \end{aligned}$$

99*. Es sei $X = (X_1, ..., X_s) \sim \mathcal{M}(n; p_1, ..., p_s)$ mit $p_i \in (0,1)$, $i = 1, ..., s$, $\sum_{i=1}^s p_i = 1$, $T = \sum_{i=1}^s \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von T.

(6* Punkte)

Lösung: Es ist

$$E(T) = s - 1, \quad \text{var}(T) = 2(s-1)\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p_i} - s^2\Big).$$

Zur Berechnung der Varianz sind die Formeln

$$E\big((X_i - np_i)^4\big) = np_i(1-p_i)\big(1 + 3p_i(1-p_i)(n-2)\big)$$

für $1 \leq i \leq s$ und

$$E\big((X_i - np_i)^2 (X_j - np_j)^2\big) = -np_i p_j \big(1 - 2p_i - 2p_j + 6p_i p_j\big) + n^2 p_i p_j \big(1 - p_i - p_j + 3p_i p_j\big)$$

für $1 \leq i, j \leq s$, $i \neq j$, nützlich.

Abgabetermin: Dienstag, 13.07.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 13. Juli 2004

Übungsblatt 13 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Lösungen zur Hausübung

104. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P_{(a,b)}(X_i = k) = \frac{1}{b-a+1}$$

für alle $k \in \{a, ..., b\}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ unbekannt sind.
(a) Zeigen Sie, dass $t(x_1, ..., x_n) := \big(\min(x_1, ..., x_n), \max(x_1, ..., x_n)\big)$ suffizient ist für (a, b).
(b) Ist auch $s(x_1, ..., x_n) := \big(\sum_{i=1}^n x_i, \max(x_1, ..., x_n) - \min(x_1, ..., x_n)\big)$ suffizient für (a, b)?

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) Es gilt

$$P_{(a,b)}(X = x) = \Big(\frac{1}{b-a+1}\Big)^n \mathbb{1}_{[a,b]^2}\big(\min(x_1, ..., x_n), \max(x_1, ..., x_n)\big) = g_{(a,b)}\big(t(x)\big)h(x)$$

mit $h(x) := 1$ und $g_{(a,b)} := \big(\frac{1}{b-a+1}\big)^n \mathbb{1}_{[a,b]^2}$. Nach dem Neyman-Kriterium ist t daher suffizient für (a, b).
(b) Angenommen t wäre suffizient für (a, b). Nach dem Neyman-Kriterium gibt es Funktionen $g_{(a,b)}$ und h, so dass für alle $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ und alle $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$ gilt $P_{(a,b)}(X = x) = g_{(a,b)}\big(t(x)\big)h(x)$. Wählt man speziell $x = (3, 1, ..., 1)$ und $(a, b) = (0, 3)$, so ergibt sich

$$0 < P_{(0,3)}\big(X = (3, 1, ..., 1)\big) = g_{(0,3)}(n + 2, 2)h\big((3, 1, ..., 1)\big)\ ,$$

also $h\big((3, 1, ..., 1)\big) \neq 0$. Andererseits erhält man

$$0 = P_{(0,2)}\big(X = (3, 1, ..., 1)\big) = g_{(0,2)}(n + 2, 2)h\big((3, 1, ..., 1)\big)\ ,$$

also $g_2(n + 2) = 0$. Dies führt zum Widerspruch, denn

$$0 \neq P_{(0,2)}\big(X = (2, 2, 2, 1, ..., 1, 0)\big) = \underbrace{g_{(0,2)}(n + 2, 2)}_{=0} h\big((2, 2, 2, 1, ..., 1, 0)\big) = 0.$$

Damit ist $t(x)$ also i.A. nicht suffizient.

105. (a) Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben $\mathcal{P}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt, $X := (X_1, ..., X_n)$. Man bestimme den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\delta(\lambda) = P_\lambda(X_1 = x_1)$, $x_1 \in \mathbb{N}_0$ fest.

Hinweis: $\mathbb{1}_{\{x_1\}}(X_1)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\delta(\lambda)$ und $T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist suffizient für λ.
(b) Die Anzahl der pro Sekunde von einem Radium-Präparat emittierten und von einem Zählrohr registrierten α-Teilchen kann als Poisson-verteilt angenommen werden. Bei einer 20 Sekunden dauernden Messung wurden insgesamt 48 Impulse registriert. Geben Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass pro Sekunde genau i α-Teilchen registriert werden, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

(2+2 Punkte)

Lösung: (a) P^X ist eine 1-parametrische Potenzreihenfamilie in $\lambda > 0$ und T, also ist T suffizient und vollständig für P^X. Für $t \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\lambda\Big[\mathbb{1}_{\{x_1\}}(X_1)\Big|\sum_{i=1}^n X_i = t\Big] &= P_\lambda\Big(X_1 = x_1\Big|\sum_{i=1}^n X_i = t\Big) \\
&= \begin{cases} \binom{t}{x_1}\left(\frac{1}{n}\right)^{x_1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-x_1}, & x_1 \in \{0, ..., t\}, \\ 0\ , & \text{sonst}, \end{cases} \\
&=: d^*_{x_1}(t),
\end{aligned}$$

also $d^*_{x_1} \circ T$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\delta(\vartheta)$. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von Lehmann-Scheffé.
(b) Es sei X_ν die Anzahl der in der ν-ten Sekunde registrierten α-Teilchen, $\nu = 1, ..., n$, $n = 20$. Unter der Annahme der Unabhängigkeit der X_ν ergibt sich

$$d^*_i(48) = \binom{48}{i}\left(\frac{1}{20}\right)^i \left(\frac{19}{20}\right)^{48-i}$$

als Schätzwert für $P_\lambda(X_1 = i)$, $i = 0, ..., 4$. Es ist

$$d^*_0(48) \approx 0.08526,\ d^*_1(48) \approx 0.21539,\ d^*_2(48) \approx 0.26640,$$
$$d^*_3(48) \approx 0.21499,\ d^*_4(48) \approx 0.12730.$$

106*. Es sei X eine Zufallsvariable, die eine der beiden Verteilungen P^X_ϑ, $\vartheta \in \{0, 1\}$ haben kann. Es sei

$$s(x) = \begin{cases} P_1(X = x)/P_0(X = x), & P_0(X = x) > 0, \\ 0\ , & P_0(X = x) = P_1(X = x) = 0, \\ \infty\ , & P_0(X = x) = 0, P_1(X = x) > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass s suffizient ist.

(4* Punkte)

Lösung. Nach dem Kriterium von Neyman ist zu zeigen, dass es Funktionen $g_0 : [0, \infty] \to [0, \infty)$ und $g_1 : [0, \infty] \to [0, \infty)$ und eine Funktion $h : R \to [0, \infty)$ gibt mit

$$P_\vartheta(X = x) = g_\vartheta\big(s(x)\big)h(x)$$

für jedes $\vartheta \in \{0,1\}$ und jedes $x \in R$. Wähle hierzu $g_0(y) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$ und $g_1(y) := y\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) + \mathbb{1}_{\{\infty\}}(y)$. Mit

$$h(x) := \begin{cases} P_0(X=x), & P_0(X=x) > 0, \\ P_1(X=x), & \text{sonst}, \end{cases}$$

folgt

$$\begin{aligned} g_0\big(s(x)\big)h(x) &= \mathbb{1}_{[0,\infty)}\big(s(x)\big)h(x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } P_0(X=x)=0,\ P_1(X=x)>0, \\ 0, & \text{falls } P_0(X=x)=0,\ P_1(X=x)=0, \\ h(x), & \text{falls } P_0(X=x)>0 \end{cases} \\ &= P_0(X=x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_1\big(s(x)\big)h(x) &= \Big(s(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}\big(s(x)\big) + \mathbb{1}_{\{\infty\}}\big(s(x)\big)\Big)\, h(x) \\ &= \begin{cases} h(x), & \text{falls } P_0(X=x)=0,\ P_1(X=x)>0, \\ 0, & \text{falls } P_0(X=x)=0,\ P_1(X=x)=0, \\ 0, & \text{falls } P_0(X=x)>0,\ P_1(X=x)=0, \\ \frac{P_1(X=x)}{P_0(X=x)}\cdot h(x), & \text{falls } P_0(X=x)>0,\ P_1(X=x)>0 \end{cases} \\ &= P_1(X=x)\ . \end{aligned}$$

107. Es sei $X := (X_1,...,X_n)$, wobei $X_1,...,X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben logarithmischen Reihenverteilung mit unbekanntem Parameter $q \in (0,1)$ (d.h. $P_q(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-q)}\frac{q^k}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$) sind. Bestimmen Sie den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\delta(q) := -\frac{1}{\ln(1-q)}\frac{q}{1-q}$.

(4 Punkte)

Lösung: Es ist

$$E_qX_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln(1-q)}\frac{q^k}{k}\right)\cdot k = -\frac{1}{\ln(1-q)}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(1-q)}\cdot\frac{q}{1-q}.$$

Also ist $d \circ X := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\delta(q) = -\frac{1}{\ln(1-q)}\cdot\frac{q}{1-q}$. Nun ist die Familie der logarithmischen Reihenverteilungen eine 1-parametrische Potenzreihenfamilie in q und $t(x) = x$ ist, also ist laut Vorlesung $T\big((x_1,...,x_n)\big) := x_1 + ... + x_n$ suffizient und vollständig für die Familie der möglichen Verteilungen von X. Daraus folgt mit dem Satz von Lehmann-Scheffé, dass $d \circ X$ gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für $\delta(q)$ ist.

Abgabetermin: Dienstag, 20.07.2004, vor der Vorlesung.

Hinweis: Bitte beachten Sie: Bei diesen Lösungsskizzen handelt es sich lediglich um die Angabe der richtigen Lösungen zu den Aufgaben mit einigen erläuternden Hinweisen, die den Korrektoren die Arbeit erleichtern sollen. Eine vollständige Lösung erfordert insbesondere eine ausführliche Begründung aller verwendeten Formeln und nichttrivalen Umformungen.