Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 13. April 2004

Übungsblatt 1 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

1. Auf wieviele Arten können $2n+1$ Euro auf die drei Personen P_1, P_2 und P_3 verteilt werden, so dass
a) P_1 mehr erhält, als P_2 und P_3 zusammen erhalten;
b) je zwei Personen zusammen stets mehr erhalten als die dritte?
(Es werden nur ganzzahlige Beträge vergeben.)

2. Ein Eisenbahnzug besteht aus 5 Wagen 1. Klasse, 4 Wagen 2. Klasse und 2 Gepäckwagen je von derselben Baureihe. Wieviele unterscheidbare Wagenfolgen sind möglich,
a) wenn die Wagen beliebig eingesetzt werden dürfen,
b) wenn die Wagen der 2. Klasse hintereinander eingesetzt werden müssen?

3. In einer Fußball-Liga spielt jede Mannschaft innerhalb einer Saison zweimal gegen jede der anderen Mannschaften. Insgesamt finden während einer Saison 552 Spiele statt. Wie viele Mannschaften spielen in der Fußball-Liga?

4. Ein Student hat n Euro zur Verfügung. Dieses Geld will er in den nächsten Tagen auf folgende Weise ausgeben. Solange Geld vorhanden, möchte er an jedem Tag genau eines dieser Produkte kaufen: eine Tafel Schokolade (1 Euro), eine Tüte Bonbons (2 Euro), eine Schachtel Pralinen (2 Euro). Auf wie viele Arten kann der Student die n Euro ausgeben?
Hinweis: Leiten Sie eine Rekursionsformel für die gesuchte Anzahl her.

5. Sechs echte Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau drei verschiedene Paare zu erhalten?

Hausübung

6. Eine Gruppe von 11 Wissenschaftlern arbeitet an einem Geheimprojekt, dessen Pläne in einem Safe aufbewahrt werden. Dieser Safe soll genau dann geöffnet werden können, wenn mindestens 6 Wissenschaftler anwesend sind. Zu diesem Zweck soll der Safe mit mehreren verschiedenen Schlössern versehen werden und jeder Wissenschaftler Schlüssel zu gewissen ausgewählten Schlössern erhalten. Wie viele Schlösser sind erforderlich und wie viele Schlüssel muss jeder Wissenschaftler haben?

(4 Punkte)

7. Auf wie viele Arten können Sie eine Treppe mit n Stufen hinaufgehen, wenn Sie bei jedem Schritt eine oder zwei Stufen nehmen dürfen?
Hinweis: Leiten Sie eine Rekursionsformel für die gesuchte Anzahl her.

(4 Punkte)

8. Sie wissen, dass von vier verdeckt auf dem Tisch liegenden Karten zwei rot und zwei schwarz sind. Wenn Sie alle vier Karten durch Zufall zu raten versuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit raten Sie dann

a) 0, b) 2, c) 4

Karten richtig?

(1+1+1 Punkte)

9. Um einen runden Tisch stehen $n > 2$ Stühle, auf denen n Personen, darunter Frau A und Frau B, Platz nehmen sollen. Die Sitzordnung wird ausgelost. Alle möglichen Sitzandordnungen seien gleich wahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau A und Frau B nebeneinander sitzen?

(3 Punkte)

10. n Punkte auf dem Kreisrand werden paarweise durch Strecken verbunden. Dabei sollen sich im Inneren der Kreisscheibe nie mehr als zwei Strecken in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Anzahl a_n der Gebiete, in die die Kreisscheibe zerlegt wird. Setzen Sie $a_1 = 1$, und überzeugen Sie sich durch Abzählen davon, dass $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$ und $a_5 = 16$ ist, beherzigen Sie dann aber nicht die bei gewissen Tests als Zeichen von Intelligenz bewertete „Logik“, sondern leiten Sie eine Rekursionsformel für a_n her.

(5 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 20.04.2004, vor der Vorlesung

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 20. April 2004

Übungsblatt 2 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

11. Das *Geburtstagsproblem*: In einem Raum befinden sich n Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei dieser Personen am gleichen Tag Geburtstag?

12. Es sei Ω eine nicht leere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ eine Folge von Ereignissen, $B_1 := A_1$ und $B_n := B_{n-1} \triangle A_n$ für $n \geq 2$. Welches Ereignis wird durch B_n beschrieben?

13. Sei Ω eine nicht leere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt bekanntermaßen Ring, wenn (1) $\emptyset \in \mathcal{R}$, (2) aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{R}$ und (3) aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \cap B^c \in \mathcal{R}$.
Kann man in dieser Definition die Bedingung (2) durch die Bedingung

$$(2')\quad A, B \in \mathcal{R} \text{ folgt } A \cap B \in \mathcal{R}$$

ersetzen?

14. Sei Ω eine Menge mit einer geraden Anzahl $2n$, $n \in \mathbb{N}$, von Elementen. Sei weiter

$$\mathcal{D} := \{A \subset \Omega : \#A \text{ ist gerade}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, im Falle $n > 1$ aber keine σ-Algebra ist.

Hausübung

15. Beweisen Sie das folgende Lemma der Vorlesung: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semi-Ring, so ist der davon erzeugte Ring

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} E_j : E_1, ..., E_n \in \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt, } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(4 Punkte)

16. Es sei A eine Menge mit $r \in \mathbb{N}$ Elementen. Weiter sei $n \leq r$. Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzrelationen auf A mit genau n Äquivalenzklassen.

(2 Punkte)

17. Sei μ eine endlich additive Mengenfunktion auf einem Ring $\mathcal{R}$. Beweisen Sie die folgende *Siebformel*: Für je endlich viele Menge $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ \#I = k}} \mu\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big).$$

(4 Punkte)

18. Sei Ω eine nicht leere Menge. Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

Beweisen Sie, dass A ein σ-Algebra ist.

(3 Punkte)

Sprechzeiten der Mitarbeiter

Mi	10.00 - 11.00	F 440	Baringhaus
Fr	09.00 - 10.00	F 450	Reich
Di	15.00 - 16.00	B 406	Kötter
Do	10.00 - 11.00	B 407	Mundt
Mi	14.00 - 15.00	F 448	Dennert
Mi	14.15 - 15.00	F 448	Krause
Do	12.00 - 13.00	F 448	Rodenbeck
Do	12.00 - 13.00	F 448	Schöneborn

Abgabetermin: Dienstag, 27.04.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 27. April 2004

Übungsblatt 3 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

19. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ und $F(x) := P\big((-\infty, x]\big)$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F genau dann stetig in $x \in \mathbb{R}$ ist, wenn $P\big(\{x\}\big) = 0$ gilt.

20. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ habe die Dichte

$$f(t) := \begin{cases} 1/\big(\pi\sqrt{1-t^2}\big), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $P\big([1/\sqrt{2}, 1)\big)$.

21. Jede der n Plastiktüten $P_1, ..., P_n$ enthält g grüne und r rote Bonbons. Aus P_1 wird ein Bonbon genommen und in P_2 gelegt. Sodann wird aus P_2 ein Bonbon genommen und in P_3 gelegt, aus P_3 wird ein Bonbon genommen und in P_4 gelegt usw.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise aus P_n einen roten Bonbon zu nehmen?

(b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise aus P_n einen roten Bonbon zu nehmen, wenn der aus P_1 genommene Bonbon rot ist?

22. Krebsdiagnose: Es gebe einen sehr zuverlässigen Test zu Krebsdiagnose. Dieser Test fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 94% negativ aus (Ereignis N), wenn die Testperson kein Krebs hat (Ereignis K^c); er ist positiv (Ereignis N^c) mit einer Wahrscheinlichkeit von 96%, falls tatsächlich Krebs vorhanden ist (Ereignis K). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Testperson Krebs hat, wenn der Test positiv ausgefallen ist, und 1/145 aller gleichaltrigen Personen Krebs haben, ohne es zu wissen?

Hausübung

23. Gibt es zu der Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\exp(-x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}$, so dass $P\big((-\infty, x]\big) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist? Geben sie dieses Wahrscheinlichkeitsmaß gegebenenfalls an.

(3 Punkte)

24. Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ und $F(x) := P\big((-\infty, x]\big)$, $x \in \mathbb{R}$, sowie

$$\begin{aligned} Z_F &:= \big\{x \in \mathbb{R} : F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\big\}, \\ S_F &:= \big\{x \in \mathbb{R} : \lim_{x \downarrow 0} \big(F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)\big) > 0\big\}. \end{aligned}$$

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: $Z_F = S_F$.

(b) Zeigen Sie, dass Z_F abgeschlossen ist. Gilt dies auch für S_F?

(c) Zeigen Sie: $P(S_F) = 1$.

(d) Zeigen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $P(A) = 1$, so ist $Z_F \subset A$.

(1+2+3+1 Punkte)

25. Gegen sind $m+1$ Urnen $U_0, U_1, ..., U_m$. Die Urne U_i enthalte i rote und $m-i$ schwarze Kugeln, $i = 0, 1, ..., m$. Es wird eine der $m+1$ Urnen zufällig ausgewählt. (Genauer: Jede der Urnen wird mit Wahrscheinlichkeit $1/(m+1)$ gewählt.) Aus dieser Urne werden zunächst $n < m$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, bei der $(n+1)$-ten Ziehung aus dieser Urne eine rote Kugel zu ziehen, wenn bereits die ersten n gezogenen Kugeln rot sind?

<u>Hinweis:</u> Es gilt $\sum_{j=n}^{m} \binom{j}{n} = \frac{m+1-n}{n+1}\binom{m+1}{n}$.

(5 Punkte)

26. Gestörter Datenkanal: Bei einer Übertragung der Zeichen '0' und '1' in einem digitalen Datensystem werden durch Störungen im Mittel 5% der gesendeten Nullen als Einsen und 3% der gesendeten Einsen als Nullen empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Nullen zu gesendeten Einsen ist $p = 3/5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls '0' bzw. '1' empfangen wurde?

(3 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 04.05.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 04. Mai 2004

Übungsblatt 4 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

27. (Indikatorfunktionen) Sei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion zu einer Menge A. Wie übertragen sich die mengentheoretischen Operationen $\cap$, $\cup$, ^{c} und $\triangle$ in entsprechende Operationen zwischen den zugehörigen Indikatorfunktionen?

28. Ein fairer sechsseitiger Würfel werde zweimal geworfen, X_1 bzw. X_2 seien die Augenzahlen beim ersten bzw. beim zweiten Wurf. Weiter bezeichnen $Y_1 := \min\{X_1, X_2\}$ und $Y_2 := \max\{X_1, X_2\}$. Stellen Sie die Zähldichten von Y_1 und Y_2 sowie die gemeinsame Zähldichte von Y_1 und Y_2 tabellarisch dar.

29. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f unter jeder der drei folgenden Bedingungen $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$-messbar ist:

(a) f ist monoton wachsend.

(b) f ist von oben halbstetig.

(c) f ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

30. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{C}(f) := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ist stetig in } x\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(f)$ eine Borel-Menge ist, d.h. $\mathcal{C}(f) \in \mathcal{B}$.

Hinweis: Für $\delta > 0$ sei $\omega_\delta(x) := \sup\left\{|f(a) - f(b)| : |a - x| \le \delta, |b - x| \le \delta\right\}$. Versuchen Sie, die Stetigkeit von f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von $\omega_\delta(x)$ auszudrücken.

Hausübung

31. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse und $X := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}$. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{X=k\}} &= \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{v-k} \binom{\nu}{k} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}}, \\
\mathbb{1}_{\{X \ge k\}} &= \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{v-k} \binom{\nu - 1}{k - 1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_\nu \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_\nu}}.
\end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k bzw. mindestens k der Ereignisse $A_1, ..., A_n$ eintreten?

(6 Punkte)

32. Eine Urne enthalte n durchnummerierte Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln entnommen. X_1 sei die Nummer der ersten gezogenen Kugel, X_2 die Nummer der zweiten gezogenen Kugel, $Y_1 := \min\{X_1, X_2\}$ und $Y_2 := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die Zähldichten von Y_1, Y_2, sowie die gemeinsame Zähldichte von Y_1 und Y_2.

(4 Punkte)

33. Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F, U sei gleichverteilt auf dem Intervall $(0, 1)$ und $F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $(0, 1)$ festgelegt durch $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge u\}$ für $u \in (0, 1)$. Zeigen Sie:

(a) $F^{-1}(U)$ und X haben dieselbe Verteilung. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $u \in (0, 1)$ gilt: $F(x) \ge u \Leftrightarrow F^{-1}(u) \le x$.

(b) Es sei F stetig. Dann haben $F(X)$ und U dieselbe Verteilung.

(2+3 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 11.05.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 11. Mai 2004

Übungsblatt 5 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

34. Es sei X eine reelle Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) \leq \mathrm{E}(|X|) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X|>n).$$

(b) Zeigen Sie, dass für eine nicht negative ganzzahlige Zufallsvariable

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)$$

ist.

35. r Kugeln werden auf n unterscheidbare Urnen verteilt. Alle unterscheidbaren Aufteilungen seien gleichwahrscheinlich. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Urnen an, die leer bleiben. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X für den Fall, dass

(a) die Kugeln unterscheidbar sind,

(b) die Kugeln nicht unterscheidbar sind.

36. Es sei $X \sim N(a, \sigma^2)$. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\exp(X)$.

37. Eine Urne enthält 10 mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnumerierte Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die verbleibenden Zahlen werden so in eine, zwei, drei oder vier Gruppen von je aufeinanderfolgenden Zahlen zerlegt. Es sei X die Anzahl dieser Gruppen. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Hausübung

38. (a) Wiederholt wird aus einer Urne, die $n \geq 3$ mit den Zahlen von 1 bis n durchnumerierte Kugeln enthält, je eine Kugel gezogen und wieder in die Urne zurückgelegt. Die Zufallsvariable X_n bezeichne die Nummer des Zuges, bei dem die Zahl der gezogenen Kugel zum ersten Mal mit der Zahl einer bereits zuvor gezogenen Kugel übereinstimmt. Zeigen Sie:

(i) $P(X_n = r) = \frac{n!(r-1)}{n^r(n-r+1)}, \ \ 2 \leq r \leq n+1.$

(ii) $E(X_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{r!}{n^r} = \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^n \exp(-x)dx.$

(iii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}} = 1.$

(b) Beurteilen Sie die folgende Pressemitteilung vom 29.6.1995:

Erstmals im Lotto
dieselbe Zahlenreihe

> **Stuttgart** (dpa/lsw). Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschicht des deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21.Juni diseses Jahres kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15,25,27,30,42,48 heraus. Genau dieselben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstagslotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1988. Welch ein Lottozufall: Unter der 49 Zahlen sind fast 14 Millionen verschiedene Sechserreihen möglich.

Bis zum 21.6.1995 gab es 2071 Ausspielungen im Samstagslotto und (2×472) Ausspielungen im Mittwochslotto (je A und B).

(1+3+4*+1 Punkte)

39. Es seien X, Y reelle Zufallsvariablen mit den λ-Dichten f, g. Es gebe ein $a \in \mathbb{R}$, so daß gilt $f(x) \geq g(x)$ für $x < a$ und $f(x) \leq g(x)$ für $x > a$. Zeigen Sie:

(a) $E(X) \leq E(Y)$, falls $E(|X|) < \infty$ und $E(|Y|) < \infty$.

(b) Ist $a > 0$, $f(x) = g(x) = 0$ für $x < 0$, so gilt $E(X^k) \leq E(Y^k)$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $E(|X^k|) < \infty$ und $E(|Y^k|) < \infty$.

(3+1 Punkte)

40. (Das Postbotenproblem) Ein Postbote soll n verschiedene Brief an n verschiedene Empfänger zustellen. Dabei bekommt jeder Empfänger genau einen Brief. Leider hat der Briefträger an diesem Morgen seine Brille vergessen, und kann deshalb nicht erkennen, welcher der n Briefe in welchen der n Briefkästen gehört. Kurz entschlossen wirft er einfach willkürlich in jeden Birefkasten genau einen Brief.

Sei X die Anzahl der Brief, die im richtigen Briefkasten landen. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(3 Punkte)

41. (a) Es seien $a > 0$ und X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $E \min\{X, a\}$.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X, wenn X absolut-stetig verteilt ist mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1), \\ 2-x, & x \in (1,2), \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

(2+2 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 18.05.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 18. Mai 2004

Übungsblatt 6 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

42. Es sei $K \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq K \leq 1/4$ und Z eine $[0,1]$-wertige Zufallsvariable mit $\operatorname{var}(Z) \geq K$. Zeigen Sie, dass dann $EZ \leq 1/2 + \sqrt{1/4 - K}$ ist und Gleichheit genau dann besteht, wenn $P(Z=0) = 1 - P(Z=1) = 1/2 - \sqrt{1/4-K}$ gilt.

43. Es sei X eine reelle Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Für welche Verteilung wird die Varianz von X maximal?

44. Es seien X, Y Zufallsvariablen mit $EX = EY = 0$ und $E(X^2) = E(Y^2) = 1$. Weiter bezeichne ρ den Korrelationskoeffizienten von X und Y. Zeigen Sie:

$$P\big(\max\{|X|,|Y|\} > \varepsilon\big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\big(1 + \sqrt{1-\rho^2}\big) \quad \text{für alle } \varepsilon \geq 0.$$

45. Bestimmen Sie in der Situation von Aufgabe 37. die Varianz von X.

Hausübung

46. (a) Es sei X eine beschränkte Zufallsvariable und t eine reelle Zahl. Man zeige:

$$P(X \geq t) \leq \inf_{u \geq 0} \exp(-tu) E\big(\exp(uX)\big).$$

(b) Überprüfen Sie diese Ungleichung für $t = 7$, wenn X binomialverteilt ist mit den Parametern $n = 10$ und $p = 1/2$.

(2+2 Punkte)

47. (Weierstraß'scher Approximationssatz) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $X \sim \operatorname{Bin}(n,p)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Chebyshevschen Ungleichung – angewendet auf die Zufallsvariable X/n –, dass die Bernstein-Polynome

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad p \in [0,1],$$

gleichmäßig in $p \in [0,1]$ gegen f konvergieren.

(4 Punkte)

48. (Das Postbotenproblem) Bestimmen Sie in der Situation von Aufgabe 40. die Varianz von X.

(4 Punkte)

49. Zeigen Sie:
(a) (Einseitige Chebyshevsche Ungleichung) Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, so gilt für alle $a > 0$

$$P(X > \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad \text{und} \quad P(X < \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(b) (Jensensche Ungleichung) Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und f eine auf I definierte reelle konvexe Funktion. Wir setzen voraus, dass EX und $Ef(X)$ endlich sind. Zeigen Sie, dass dann

$$EX \in I \text{ und } f(EX) \leq Ef(X)$$

gelten. Hinweis: Liegt c im Innern von I, so gibt es eine reelle Zahl λ mit der Eigenschaft, dass $f(x) \geq \lambda(x-c) + f(c)$ gilt für alle $x \in I$.

(3+3 Punkte)

Klausurtermin: Dienstag, 20.07.2004, 15-17 Uhr.

Abgabetermin: Dienstag, 25.05.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 25. Mai 2004

Übungsblatt 7 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

50. Es seien X, Y unabhängige, je $\mathfrak{R}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte von $X - Y$.

51. Die Zufallsvariable U sei $\mathfrak{R}(0,1)$-verteilt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \mathbb{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n})}(U).$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit je derselben Verteilung ist. Geben Sie diese Verteilung an.

52. Es sei $(X_1, ..., X_s) \sim \mathfrak{M}(n; p_1, ..., p_s)$. Bestimmen Sie $E(X_j)$ und $\operatorname{var}(X_j)$ für $j = 1, ..., n$, sowie $\operatorname{cov}(X_j, X_k)$ für $1 \le j < k \le n$.

53. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die $\boldsymbol{\lambda}^2$-Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\operatorname{cov}(X, Y)$. Sind X, Y unabhängig?

Hausübung

54. Es seien $A_i, i \in I$, Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Ereignisse A_i, $i \in I$, sind unabhängig.

(b)$\forall K \subset I$, K endlich : $P(\bigcap_{k\in K} A_k) = \prod_{k\in K} P(A_k)$.

(c) $\forall J, K \subset I$, J, K endlich, $J \cap K = \emptyset$: $P(\bigcap\limits_{j\in J} A_j \cap \bigcap\limits_{k\in K} A_k^c) = \prod_{j\in J} P(A_j) \prod_{k\in K} P(A_k^c)$.

(4 Punkte)

55. Es seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ unabhängig. Zeigen Sie: $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

(4 Punkte)

56. Es sei X eine Zufallsvariable, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien monoton wachsend. Es existieren $E(|u(X)|)$, $E(|v(X)|)$ und $E(|u(X)||v(X)|)$. Zeigen Sie: $E(u(X)v(X)) \ge Eu(X)Ev(X)$. Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für den Fall, daß u monoton wachsend und v monoton fallend ist.

Hinweis: Führen Sie eine von X unabhängige Zufallsvariable mit derselben Verteilung ein.

(3 Punkte)

57. Es seien $X_j \sim \operatorname{Exp}(\lambda_j)$, $j = 1, ..., n$, unabhängig.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\{X_1, ..., X_n\}$.

(b) Es sei $\lambda_1 = ... = \lambda_n =: \lambda$. Zeigen Sie, dass $X_1 + ... + X_n$ die $\boldsymbol{\lambda}$-Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x), & x \ge 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

hat.

(2+2 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 08.06.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 08. Juni 2004

Übungsblatt 8 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

58. Es seien $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ ebenfalls paarweise verschieden. X und Y seien Zufallsvariablen mit

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = 1 = \sum_{j=1}^{n} P(Y = y_j).$$

Zeigen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn für alle $i = 1, ..., m-1$ und $j = 1, ..., n-1$ gilt

$$\mathrm{cov}(X^i, Y^j) = 0.$$

59. Es seien $X_1, ..., X_n$ reelle, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(|X_1|^3) < \infty$. Weiter seien $a = E(X_1)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$, und für $n \geq 2$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

(a) Zeigen Sie: $E(\bar{X}) = a$, $E(S^2) = \sigma^2$.

(b) Zeigen Sie, dass für symmetrisch verteilte Zufallsvariablen X_i, d.h. $P^{X_i} = P^{-X_i}$, $\mathrm{cov}(\bar{X}, S^2) = 0$ ist.

60. Die beiden Spieler A und B beschließen, ein Spiel unabhängig wiederholt zu spielen. Wer zuerst eine bestimmte Anzahl an Runden gewonnen hat, ist Gesamtsieger und erhält einen vorher festgelegten Geldbetrag ausbezahlt. Es sei p bzw. $1-p$ die Wahrscheinlichkeit für den Spieler A bzw. den Spieler B ein einzelnes Spiel zu gewinnen. Infolge widriger Umstände müssen sie vorzeitig abbrechen, wobei zum Gesamtgewinn Spieler A noch a Runden, Spieler B noch b Runden gewinnen müsste. Wie würden Sie den vorhandenen Geldbetrag auf die beiden Spieler verteilen?

61. (Borel-Cantelli-Lemma für paarweise unabhängige Ereignisse)

(a) Sei X eine reelle, nicht negative Zufallsvariable mit $0 < E(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $P(X > 0) \geq (EX)^2/E(X^2)$ gilt.

(b) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen Ereignissen. Zeigen Sie, dass $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ ist, falls $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie für $n, r \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $X_{nr} = \sum_{k=n}^{n+r} \mathbb{1}_{A_k}$ und wenden Sie Teil (a) an.

Hausübung

62. Es seien $X_1, ..., X_n$ reelle, positive, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie $E\big(X_1/(X_1 + ... + X_n)\big)$.

(2 Punkte)

63. (a) Sei $X = (X_1, ..., X_d) \sim N_d(a, \Sigma)$. Zeigen Sie, dass die Komponenten $X_1, ..., X_d$ genau dann unabhängig sind, wenn Σ eine positive Diagonalmatrix ist.

(b) Seien $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ unabhängig und $Z := (X, XY)$. Zeigen Sie, dass die Komponenten des Zufallsvektors Z unkorreliert und normalverteilt, aber nicht unabhängig sind. Ist Z zweidimensional normalverteilt?

(2+2 Punkte)

64. Beweisen Sie: Ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$, so gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und hierauf eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n die Verteilung P_n besitzt.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Beweisen Sie mit Aufgabe 51, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und hierauf eine Doppelfolge $(Z_{ni})_{n,i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen und identisch $\mathrm{Bin}(1, 1/2)$-verteilten Zufallsvariablen gibt.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \sum_{i=1}^{\infty} Z_{ni} 2^{-i}$. Zeigen Sie, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch $\mathfrak{R}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen ist.

(c) Sei F_n die zu P_n gehörige Verteilungsfunktion und $F_n^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq u\}$ für alle $u \in (0,1)$. Sei weiter $X_n(\omega) = F^{-1}\big(U(\omega)\big)$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $U(\omega) \in (0,1)$ und $X(\omega) = 0$ sonst. Beweisen Sie mit Aufgabe 33 die gewünschte Aussage.

(1+3+1 Punkte)

65*. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen mit $0 \leq a_n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) heißt unter P *unabhängige Folge von Ereignissen*, wenn für jede endliche Teilmenge $K \subset \mathbb{N}$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{n\in K} A_n\Big) = \prod_{n\in K} P(A_n).$$

Zeigen Sie, dass genau dann ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und eine unter P unabhängige Folge von Ereignissen $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, mit $P(A_n) = a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, 1 - a_n) < \infty$ ist.

(6* Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 15.06.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 15. Juni 2004

Übungsblatt 9 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

66. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, reelle und unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie: Es gilt $X_n \to 0$ P-f.s. genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|X_n| > \varepsilon\big) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

67. Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ m-dimensionale Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) < \infty \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Zeigen Sie, dass dann X_n fast sicher gegen X konvergiert.

68. (Teilfolgen-Charakterisierung der stochastischen Konvergenz)
Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ m-dimensionale Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass X_n genau dann mit $n \to \infty$ stochastisch gegen X konvergiert, wenn es zu jeder Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teil-Teilfolge $(X_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ gibt derart, dass $X_{n_{k_j}}$ mit $j \to \infty$ fast sicher gegen X konvergiert.

69. Es seinen $X, X_1, X_2, \ldots$ r-dimensionale Zufallsvektoren und $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ s-dimensionale Zufallsvektoren, alle auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ferner sei $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^k$ eine $(\mathcal{B}^r \otimes \mathcal{B}^s, \mathcal{B}^k)$-messbare Funktion und $P\big((X,Y) \in D(f)\big) = 0$ für $D(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s : f \text{ ist nicht stetig in } (x,y)\}$. Man zeige:

(a) $X_n \to X$ P-f.s. und $Y_n \to Y$ P-f.s. $\Rightarrow f(X_n, Y_n) \to f(X,Y)$ P-f.s.

(b) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y \Rightarrow f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} f(X,Y)$.

Hausübung

70. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige, reelle Zufallsvariablen. Man beweise oder widerlege:

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

(4 Punkte)

71. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, reelle, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Man zeige: Ist Y eine reelle Zufallsvariable, und gilt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to Y$ P-f.s., so ist $E|X_1| < \infty$ und $Y = EX_1$ P-f.ü.

Hinweise: (a) $\frac{1}{n} X_n \to 0$ P-f.s., (b) $E|X_1| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) < \infty$, (c) Borel-Cantelli-Lemma.

(3 Punkte)

72. (a) Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$ reelle, unabhängige Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Gilt $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ P-f.s., so ist $\sum_{n=1}^{\infty} P\big(\frac{1}{n}|X_n| \geq \varepsilon\big) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$.

(b) Es seien X_n, $n = 2, 3, \ldots$, unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $P(X_n = -n) = P(X_n = n) = 1/\big(2n\log(n)\big)$ und $P(X_n = 0) = 1 - 1/\big(n\log(n)\big)$. Man untersuche, ob $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} X_k \to 0$ P-f.s. bzw. $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ gilt.

(1+3 Punkte)

73. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von reellen Zufallsvariablen und X eine weitere reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann

$$X_n \to X \ P\text{-f.s.} \iff X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$$

gilt.

(4 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 22.06.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 22. Juni 2004

Übungsblatt 10 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

74. Ein Lottospieler gibt wöchentlich 20 verschiedene Tippreihen ab. Wie groß ist der Erwartungswert seiner Wartezeit (in Jahren) auf den ersten „Sechser"?

75. Ist es möglich, zwei handelsübliche Würfel (d.h. mit den Augenzahlen 1 bis 6 versehen) so zu manipulieren (d.h. die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen 1 bis 6 zu verändern), dass jede der Augensummen 2 bis 12 beim unabhängigen Werfen der beiden Würfel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt?

76. Es seien $\Omega_n := \{\pi | \pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \text{ bijektiv}\}$, $X_n(\pi) := |\{i \in \{1, ..., n\} : \pi(i) = i\}|$ für alle $\pi \in \Omega_n$ und P_n das diskrete Laplacesche Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω_n.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P_n(X_n = k) = P(X = k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei $X \sim \mathcal{P}(1)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $E\big(X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-r+1)\big) = 1$ für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, und berechnen Sie $E\big(X_n(X_n-1)\cdot\ldots\cdot(X_n-r+1)\big)$.

77. Ein Spieler wirft solange eine Münze, bis „Zahl" erscheint. Benötigt er dazu eine ungerade Anzahl von Versuchen, so erhält er a Euro, andernfalls muss er b Euro bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von „Zahl" sei $p \in (0,1)$. Welche Beziehung muss zwischen a, b und p bestehen, damit der zu erwartende Gewinn des Spielers 0 ist?

Hausübung

78. Es sei $X_\nu \sim \mathcal{H}(a_\nu, r_\nu, n)$, $\nu = 1, 2, ...$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \frac{r_\nu}{a_\nu} = p \in (0,1)$. Ferner sei $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} r_\nu = \infty$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\nu\to\infty} P(X_\nu = x) = P(X = x) \quad \text{für alle } x \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Wie kann man diese Aussage interpretieren?

(4 Punkte)

79. (a) Es sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Zeigen Sie

$$P(X \le n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^\infty x^n \exp(-x)\,dx \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Es sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$, $Y \sim \text{Nb}(r+1, p)$ auf $\{r+1, r+2, ..\}$ mit $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Zeigen Sie

$$P(X \le r) = \binom{n}{r}(n-r)\int_p^1 x^r(1-x)^{n-r-1}dx = P(Y \ge n+1).$$

(2+2 Punkte)

80. Es seien $X_{n\nu}$, $\nu = 1, ..., n$, unabhängige Zufallsvariablen, $X_{n\nu} \sim \text{Bin}(1, p_{n\nu})$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le\nu\le n} p_{n\nu} = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^n p_{n\nu} = \lambda > 0$. Zeigen Sie für $S_n = \sum_{\nu=1}^n X_{n\nu}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Man betrachte den Logarithmus der erzeugenden Funktion von S_n und wende dann eine geeignete, zweiseitige Abschätzung für den Logarithmus an.

(3 Punkte)

81*. (a) Es seien $m, j \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{r=j}^{2z+j+1}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r} \le \delta_{jm} \le \sum_{r=j}^{2z+j}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{m}{r}.$$

(b) Es seien $X, X_1, X_2, ...$ nicht negative ganzzahlige Zufallsvariablen mit $E(|X|^r) < \infty$ und $E(|X_n|^r) < \infty$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Es seien $b_r := E\binom{X}{r}$, $b_r(n) := E\binom{X_n}{r}$, $r \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$, und es gelte (1.) $P(X = k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=k}^n (-1)^{r-k}\binom{r}{k} b_r$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und (2.) $\lim_{n\to\infty} b_r(n) = b_r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Es sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Aussage (1.) aus (b) zutrifft.

(d) n unterscheidbare Kugeln werden auf d_n unterscheidbare Urnen verteilt. Alle unterscheidbaren Aufteilungen seien gleichwahrscheinlich. Es sei X_n die Anzahl der Urnen, die leer bleiben. Es gelte $\lim_{n\to\infty} d_n \exp(-n/d_n) = \lambda > 0$. Es sei $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(3*+2*+1*+2* Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 29.06.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 29. Juni 2004

Übungsblatt 11 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

82. Ein Experiment, bei dem ein Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ eintritt, wird $n = 50$-mal wiederholt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A höchstens 3-mal in diesen 50 Versuchen auftritt
(a) durch exakte Rechnung,
(b) mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes,
(c) mit Hilfe des Grenzwertsatzes von De Moivre-Laplace.

83. Es sei X $\mathrm{Bin}\big(2n, \frac{1}{2}\big)$-verteilt mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $E(|X - n|) \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}}$ für $n \to \infty$.

84. Es sei $X_n \sim \mathrm{Bin}(2n, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = n + h_n)}{P(X_n = n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = n - h_n)}{P(X_n = n)} = \exp\left(-z^2\right),$$

falls $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist mit $0 \le z := \lim_{n\to\infty} h_n/\sqrt{n} < \infty$.

85. Lokale Form des ZGWS für die negative Binomialverteilung: Es sei $X_r \sim \mathrm{Nb}(r, p)$ auf $\mathbb{N}_0$, $p \in (0, 1), r \in \mathbb{N}$. Für $a > 0$ sei $C_r(a) = \big\{k \in \mathbb{N}_0 \;:\; \big|k - r\frac{1-p}{p}\big| \le a\sqrt{r}\big\}$. Man zeige:

$$\sup_{k\in C_r(a)} \left| \frac{P(X_r = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi r(1-p)/p^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(k-r(1-p)/p)^2}{r(1-p)/p^2}\right)} - 1 \right| \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Hausübung

86. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A sei gleich p. Es werden n unabhängige Versuche durchgeführt. X/n sei die relative Häufigkeit von A in dieser Versuchsreihe. Mit der durch den zentralen Grenzwertsatz von *De Moivre-Laplace* gegebenen Approximation der Binomialverteilung beantworte man folgende Fragen:
(a) Sei $p = 0.4$ und $n = 1500$. Wie groß ist $P(0.4 \le X/n \le 0.44)$?
(b) Sei $p = 0.375$. Wie groß muss n sein, damit $P(|X/n - p| \le 0.01) \ge 0.995$ ist?
(c) $p = \frac{2}{3}$, $n = 1200$. Wie groß muss ε werden, damit $P(|X/n - p| < \varepsilon) \ge 0.985$ ist?
(d) Sei $n = 14400$. Für welche Werte von p wird $P(|X/n - p| < 0.01) \ge 0.99$?

(1+1+1+1 Punkte)

87. Zwei Kinos konkurrieren um die Gunst von 1000 Kunden. Man nehme an, dass jeder Kunde unabhängig von den anderen Kunden eines der beiden besucht, wobei es ihm ganz egal ist, welches. Wieviele Sitze sollte es in jedem der beiden Kinos geben, wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Kunden wegen Platzmangel zu verlieren, kleiner als 0.01 sein soll?

(2 Punkte)

88. Es sei Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichte zur Standardnormalverteilung.
(a) Zeigen Sie: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\,\varphi(x)$ für alle $x > 0$.
(b) Zeigen Sie: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \exp(-x^2/2)} \le \Phi(x) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \exp\left(-x^2\right)}$ für alle $x > 0$.

(2+2 Punkte)

89. Lokale Form des ZGWS für die hypergeometrische Verteilung: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \sim \mathrm{HypGeo}(N_n, M_n, n)$. Es seien $\mu_n := (M_n n)/N_n$ und $\sigma_n^2 := n(M_n/N_n)(1 - M_n/N_n)\big((N_n - n)/(N_n - 1)\big)$ der Erwartungswert und die Varianz von X_n. Weiter gelte $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = \infty$. Für $a > 0$ sei: $C_n(a) = \big\{m \in \{0, ..., \min\{M_n, n\}\} \;:\; |m - \mu_n| \le a\sqrt{\sigma_n^2}\big\}$. Man zeige:

$$\sup_{m\in C_n(a)} \left| \frac{P(X_n = m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(m-\mu_n)^2}{\sigma_n^2}\right)} - 1 \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(4* Punkte)

90. m Nullen und n Einsen werden in einer Reihe angeordnet. Alle unterscheidbaren Anordnungen seien gleichwahrscheinlich. Jede Anordnung läßt sich aufteilen in Serien von gleichen Elementen (z.B. besteht 000100110 aus den fünf Serien 000, 1, 00, 11, 0). Es sei $X_{m,n}$ die Anzahl der Serien.
(a) Zeigen Sie für $s \in \{1, ..., \min(m, n)\}$:

$$P(X_{m,n} = 2s) = 2\frac{\binom{m-1}{s-1}\binom{n-1}{s-1}}{\binom{m+n}{m}}, \quad P(X_{m,n} = 2s + 1) = \frac{\binom{m-1}{s}\binom{n-1}{s-1} + \binom{m-1}{s-1}\binom{n-1}{s}}{\binom{m+n}{m}}.$$

(b*) Es sei $\mu_{m,n} = 2\frac{mn}{m+n}$, $\sigma_{m,n}^2 = \frac{m^2n^2}{(m+n)^3}$. Zeigen Sie im Fall $\lim_{m,n\to\infty}\sigma_{m,n}^2 = \infty$:

$$\lim_{m,n\to\infty} P\left(\frac{X_{m,n} - \mu_{m,n}}{2\sigma_{m,n}} \le x\right) = \Phi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(c*) Es sei $X_{m,n}^{(0)}$ die Anzahl der Serien der Sorte „0“, $X_{m,n}^{(1)}$ die Anzahl der Serien der Sorte „1“ . Formulieren und beweisen Sie entsprechende Aussagen wie in Teil (a) und Teil (b) für $X_{m,n}^{(0)}$ und $X_{m,n}^{(1)}$.

(2+2*+2* Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 06.07.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 06. Juli 2004

Übungsblatt 12 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

91. Es sei $X = (X_1, ..., X_n)$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben $\mathrm{Nb}(r,p)$-Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1]$ sind. (Für p=1 sei $\mathrm{Nb}(r,1) := \delta_0$.) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

92. Es sei X die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten X als Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Aus der Beobachtung von X soll die Wahrscheinlichkeit geschätzt werden, dass kein Unfall in drei Wochen geschieht. Man zeige, dass der erwartungstreue Schätzer nur unsinnige Werte liefert.

93. Es sei $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{M}(n; (1-\vartheta)^2, 2\vartheta(1-\vartheta), \vartheta^2)$, wobei $\vartheta \in [0,1]$ unbekannt ist. Man bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $d(X)$ für ϑ. Ist $d(X)$ erwartungstreu für ϑ?

94. (a) Es seien X und Z unabhängige, identisch verteilte, nicht negative, ganzzahlige Zufallsvariablen mit $P(X = k) = P(Z = k) > 0$ für $k = 0, 1, ...$, $Y := X + Z$. Es sei $P^{X|Y=y}(\{x\}) = \frac{1}{1+y}$ für $y \in \mathbb{N}_0$, $x \in \{0, 1, ..., y\}$. Zeigen Sie, dass X eine geometrische Verteilung hat.
(b) Es seien X, Y und Z nicht negative, ganzzahlige Zufallsvariablen, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Für jedes $y \in \mathbb{N}_0$ sei $P^{Z|Y=y} = P^{X+y}$. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

Hausübung

95. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P_{(a,b)}(X_i = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

für alle $k \in \{a, ..., b\}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ unbekannt sind. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für (a, b).

(3 Punkte)

96. Es sei $X = (X_1, ..., X_n)$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben $\mathrm{Bin}(1,p)$-Verteilung mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$ sind. Es sei $f(p)$ ein Polynom vom Grad $r > n$. Man zeige, dass kein erwartungstreuer Schätzer für $f(p)$ existiert.

(3 Punkte)

97. Es seien $X, Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ unabhängig. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$P(X - Y \geq 1) \leq 1 - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda}e^{-2\lambda}.$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie $P^{X|Z=z}$, $z \in \mathbb{N}_0$, für $Z := X + Y$.

(3 Punkte)

98. Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, je identisch $\mathrm{Nb}(1,p)$-verteilt auf $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$e(z) := E\big(|X - Y| \,\big|\, \min(X,Y) = z\big)$$

ist konstant in $z \in \mathbb{N}_0$.

(3 Punkte)

99*. Es sei $X = (X_1, ..., X_s) \sim \mathcal{M}(n; p_1, ..., p_s)$ mit $p_i \in (0,1)$, $i = 1, ..., s$, $\sum_{i=1}^s p_i = 1$, $T = \sum_{i=1}^s \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von T.

(6* Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 13.07.2004, vor der Vorlesung.

Universität Hannover

Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. L. Baringhaus
Dipl.-Math. M. Reich

Hannover, 13. Juli 2004

Übungsblatt 13 zur Vorlesung

Mathematische Stochastik I

SoSe 2004

Stundenübung

100. Es sei $n \geq 2$ und $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte, positive ganzzahlige Zufallsvariablen mit $P_\vartheta(X_i = x) = 1/\vartheta$, $x \in \{1, ..., \vartheta\}$, wobei $\vartheta \in \mathbb{N}$ unbekannt ist. Man beweise oder widerlege:

$$s(x) = \sum_{i=1}^n x_i, \; x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ ist suffizient.}$$

101. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben $\text{Bin}(N, p)$-Verteilung, wobei $p \in (0, 1)$ unbekannt und $N \in \mathbb{N}$ bekannt sind. Man bestimme den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\delta(p) = P_p(X_1 = k)$, $k \in \{0, ..., N\}$ fest.

102. Ist die Familie der $\mathcal{M}(n; (1-\vartheta)^2, 2\vartheta(1-\vartheta), \vartheta^2)$-Verteilungen bei unbekanntem $\vartheta \in (0, 1)$ eine 1-parametrische Potenzreihenfamilie? Bestimmen Sie den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für ϑ.

103. Es sei $X := (X_1, ..., X_n)$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben $\text{Bin}(1, p)$-Verteilung mit unbekanntem Parameter $p \in (0, 1)$ sind. Bestimmen Sie im Fall $n \geq 2$ den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $p(1-p)$.

Hausübung

104. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$P_{(a,b)}(X_i = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

für alle $k \in \{a, ..., b\}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$ unbekannt sind.
(a) Zeigen Sie, dass $t(x_1, ..., x_n) := \big(\min(x_1, ..., x_n), \max(x_1, ..., x_n)\big)$ suffizient ist für (a, b).
(b) Ist auch $s(x_1, ..., x_n) := \big(\sum_{i=1}^n x_i, \max(x_1, ..., x_n) - \min(x_1, ..., x_n)\big)$ suffizient für (a, b)?

(2+2 Punkte)

105. (a) Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, je mit derselben $\mathcal{P}(\lambda)$-Verteilung, wobei $\lambda > 0$ unbekannt, $X := (X_1, ..., X_n)$. Man bestimme den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\delta(\lambda) = P_\lambda(X_1 = x_1)$, $x_1 \in \mathbb{N}_0$ fest.
Hinweis: $\mathbb{1}_{\{x_1\}}(X_1)$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für $\delta(\lambda)$ und $T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist suffizient für λ.
(b) Die Anzahl der pro Sekunde von einem Radium-Präparat emittierten und von einem Zählrohr registrierten α-Teilchen kann als Poisson-verteilt angenommen werden. Bei einer 20 Sekunden dauernden Messung wurden insgesamt 48 Impulse registriert. Geben Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass pro Sekunde genau i α-Teilchen registriert werden, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

(2+2 Punkte)

106*. Es sei X eine Zufallsvariable, die eine der beiden Verteilungen P_ϑ^X, $\vartheta \in \{0, 1\}$ haben kann. Es sei

$$s(x) = \begin{cases} P_1(X = x)/P_0(X = x), & P_0(X = x) > 0, \\ 0, & P_0(X = x) = P_1(X = x) = 0, \\ \infty, & P_0(X = x) = 0, P_1(X = x) > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass s suffizient ist.

(4* Punkte)

107. Es sei $X := (X_1, ..., X_n)$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit je derselben logarithmischen Reihenverteilung mit unbekanntem Parameter $q \in (0, 1)$ (d.h. $P_q(X = k) = -\frac{1}{\ln(1-q)} \frac{q^k}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$) sind. Bestimmen Sie den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\delta(q) := -\frac{1}{\ln(1-q)} \frac{q}{1-q}$.

(4 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 20.07.2004, vor der Vorlesung. Wenn Sie Ihre Lösungen zu dieser Hausübung in der Klausur verwenden möchten, empfiehlt es sich, dass sie eine Kopie anfertigen. Die korrigierten Lösungen können sie ab Dienstag, den 27.07.2004, in meinem Büro (F 450) abholen.

Hinweise zur Klausur: Die Klausur zur Vorlesung findet am Dienstag, den 20.07.2004, von 15.00 Uhr bis 17.00 Uhr statt. Aus Platzgründen werden die Teilnehmer nach dem Anfangsbuchstaben ihres Nachnamens wie folgt auf zwei Hörsäle aufgeteilt:

Buchstaben **A-M**:	Hörsaal E 001, Hauptgebäude,
Buchstaben **N-Z**:	Hörsaal III K1 (Unterer Hörsaal), FB Erziehungswissenschaften, Gebäude 6304, Bismarckstraße.

Zugelassene Hilfsmittel sind: Die persönlichen Aufzeichnungen zur Vorlesung und den Übungen, **eine** Formelsammlung, ein nicht programmierbarer Taschenrechner.