Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

1. Übungsblatt zu Stochastische Prozesse

Aufgabe 1: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum E. Man zeige: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine Markov-Kette, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $i_0, ..., i_n \in E$ mit $P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) > 0$

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)$$

gilt.

Lösung: Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette, so gilt natürlich insbesondere

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $i_0, ..., i_n \in E$.

Nun gelte umgekehrt

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $i_0, ..., i_n \in E$ und wir wollen zeigen, dass dann $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette ist, d.h. dass

$$P(X_{t_n} = i_{t_n} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} = i_{t_n} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0}) \tag{2}$$

für alle $t_0 < t_1 < ... < t_n \in \mathbb{N}$, $i_{t_0}, ..., i_{t_n} \in E$ gilt. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Hilfslemma: *Sind $C_1, C_2, ...$ disjunkte Ereignisse mit $\sum_i C_i =: C$ und ist $P(A|B\cap C_i) =: p$ unabhängig von i, so ist $p = P(A|B \cap C)$.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(A|B \cap C_1) \cdot P(C|B) &= P(A|B \cap C_1) \cdot \sum_i P(C_i|B) \\
&= \sum_i P(A|B \cap C_i) \cdot P(B \cap C_i) \cdot P(B)^{-1} \\
&= \sum_i P(A \cap B \cap C_i) \cdot P(B)^{-1} \\
&= P(A \cap B \cap C) \cdot P(B)^{-1} \\
&= P(A \cap C|B) \;=\; P(A|B \cap C) \cdot P(C|B).
\end{aligned}$$

Kürzen von $P(C|B)$ liefert das gewünschte Ergebnis.

Mit diesen Hilfslemma sind wir in der Lage, in der Bedingung der rechten Seite von Gleichung (1) beliebige „Löcher zu reißen“, indem wir $B := \{X_{n-1} = i_{n-1}\}$ setzen und Ereignisse der Form $C_{(i_0,\ldots,i_{n-2})} := \{X_{t_0} = i_0, \ldots, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}\}$ für $(i_0, \ldots, i_{n-2}) \in E^{n-1}$ durch die disjunkte Vereinigung $C := \{X_{t_k} \in E, 0 \leq k \leq n-2\}$ ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir aus der Gleichung (1) zunächst die Aussage:

$$P(X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) = P(X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0})$$

für alle $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} \in \mathbb{N}$, $i_{t_0}, ..., i_{t_{n-1}}, i_{t_{n-1}+1} \in E$.

Bleibt noch das Problem, wie wir den zeitlichen Abstand zwischen dem bedingten Ereignis $\{X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1}\}$ und dem ersten bedingenden Ereignis $\{X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}\}$ beliebig vergrößern können. Dies geschieht durch vollständige Induktion. Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
& P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0}) \\
= & \sum_{i_{t_{n-1}+1} \in E} P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2}, X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0}) \\
= & \sum_{i_{t_{n-1}+1} \in E} P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2} | X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1}, X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0}) \\
& \cdot P(X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}, ..., X_{t_0} = i_{t_0}) \\
= & \sum_{i_{t_{n-1}+1} \in E} P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2} | X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1}, X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) \\
& \cdot P(X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) \\
= & \sum_{i_{t_{n-1}+1} \in E} P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2}, X_{t_{n-1}+1} = i_{t_{n-1}+1} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) \\
= & \; P(X_{t_{n-1}+2} = i_{t_{n-1}+2} | X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}).
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt läuft dann nach demselben Schema ab. Damit ist Gleichung (2) gezeigt.

Aufgabe 2: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$. Zeigen Sie:

(a) Die Relation „$\rightsquigarrow$“ ist transitiv.

(b) Zwei kommunizierende Zustände haben dieselbe Periode.

(c) Zwei kommunizierende Zustände sind entweder beide transient oder beide rekurrent.

(d) Es gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n) = f_{ji}^{\star} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n).$$

Lösung:

(a) Es gelte $i \rightsquigarrow j$ und $j \rightsquigarrow k$, d.h. es existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}(m) > 0$ und $p_{jk}(n) > 0$. Dann folgt mit Chapman-Kolmogorov
$$p_{ik}(n+m) = \sum_{l\in E} p_{il}(m)p_{lk}(n) = \underbrace{\sum_{l\in E\setminus\{j\}} p_{il}(m)p_{lk}(n)}_{\geq 0} + \underbrace{p_{ij}(m)p_{jk}(n)}_{>0} > 0,$$
also $i \rightsquigarrow k$.

(b) Es seien $i, j \in E$ kommunizierend, d.h. es existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}(m) > 0$ und $p_{ji}(n) > 0$. Seien ferner $d(i) := \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0\}$, $d(j) := \mathrm{ggT}\{n \in \mathbb{N} : p_{jj}(n) > 0\}$ und $A_i := \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0\}$. Dann gilt für alle $k \in A_i$
$$p_{jj}(n+k+m) \geq p_{ji}(n)p_{ii}(k)p_{ij}(m) > 0 \;\Rightarrow\; d(j) \,|\, n+k+m$$
und
$$p_{jj}(n+m) \geq p_{ji}(n)p_{ij}(m) > 0 \;\Rightarrow\; d(j) \,|\, n+m,$$
also $d(j)|k$ für alle $k \in A_i$. $d(i)$ ist der größte Teiler mit dieser Eigenschaft, also gilt $d(j) \leq d(i)$. Analog zeigt man dann $d(i) \leq d(j)$, also insgesamt $d(j) = d(i)$.

(c) Es seien $i, j \in E$ kommunizierend, d.h. es existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}(m) > 0$ und $p_{ji}(n) > 0$. Ist i rekurrent, so gilt nach Satz 1.6 $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(k) = \infty$. Dann folgt mit $p_{jj}(n+k+m) \geq p_{ji}(n)p_{ii}(k)p_{ij}(m)$
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}(k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}(n+k+m) \geq p_{ji}(n) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(k)}_{=\infty} p_{ij}(m) = \infty,$$
also ist auch j rekurrent.

Ist i transient, so gilt $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(k) < \infty$. Dann folgt mit $p_{ij}(m)p_{jj}(k)p_{ji}(n) \leq p_{ii}(n+k+m)$

$$p_{ij}(m)\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}(k)p_{ji}(n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(n+k+m) < \infty,$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}(k) < \infty$ und damit j transient.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{ji}^{\star}\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}(k)p_{ii}(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{ji}(k)p_{ii}(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n+1} f_{ji}(l)p_{ii}(n-l+1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} f_{ji}(l+1)p_{ii}(n-l) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} f_{ji}(l+1)p_{ii}(n-1-l)}_{=p_{ji}(n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a) Auf dem Raum $\mathbb{R}_N$ der N-dimensionalen Zeilenvektoren ($N \in \mathbb{N}$) wird durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \ x = (x_1, ..., x_N),$$

bekanntlich eine Norm definiert. Zeigen Sie: Ist P eine stochastische $N \times N$-Matrix, so gilt

$$\|xP\|_1 \leq \|x\|_1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_N.$$

Was bedeutet dies für die Eigenwerte von P?

(b) Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \{1,...,N\}}$ für $N \in \mathbb{N}$ eine stochastische Matrix mit

$$\kappa := \min_{1 \leq i,j \leq N} p_{ij} > 0 \ \text{ und } \ U := \{x \in \mathbb{R}_N : \sum_{i=1}^{N} x_i = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass P die Menge U wieder in U abbildet, und dass es ein $0 \leq \alpha < 1$ gibt mit

$$\|xP\|_1 \leq \alpha \|x\|_1 \text{ für alle } x \in U.$$

Was bedeutet dies für das Verhalten von $qP^n - rP^n$ mit $n \to \infty$, wenn $q, r \in \mathbb{R}_N$ Wahrscheinlichkeitsvektoren sind, das heißt wenn $q_i, r_i \geq 0$ für $i = 1, ..., N$ und $\sum_{i=1}^{N} q_i = \sum_{i=1}^{N} r_i = 1$ gilt?

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|xP\|_1 &= \sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{N} x_j p_{ji}| \ \leq \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |x_j| p_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{N} |x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_{ji}}_{=1} \ = \ \sum_{j=1}^{N} |x_j| = \|x\|_1. \end{aligned}$$

Als Folgerung ergibt sich, dass alle Eigenwerte von P betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sein müssen. Denn angenommen es existiert ein Eigenwert λ von P mit $|\lambda| > 1$ und zugehörigem Rechtseigenvektor y, so folgt

$$\|yP\|_1 = \|\lambda y\|_1 = |\lambda| \cdot \|y\|_1 > \|y\|_1$$

im Widerspruch zu dem gerade eben Gezeigten.

(b) Sei $x \in U$, d.h. $\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$. Dann gilt für $y = xP$:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_j p_{ji} = \sum_{j=1}^{N} x_j \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_{ji}}_{=1} = \sum_{j=1}^{N} x_j = 0,$$

also liegt auch y wieder in U.

Zur zweiten Aussage: Nach Aufgabenteil (a) gibt es ein α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und der gewünschten Eigenschaft

$$||xP||_1 \leq \alpha ||x||_1 \text{ für alle } x \in U.$$

Wäre nur $\alpha = 1$ möglich, wäre also $1 = \inf\{\alpha : ||xP||_1 \leq \alpha ||x||_1 \text{ für alle } x \in U\}$, dann gäbe es eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit

$$\|x^{(n)}P\|_1 > \big(1 - \frac{1}{n}\big)\|x^{(n)}\|_1 \geq 0.$$

Insbesondere ist $\|x^{(n)}\|_1 \neq 0$ und daher $y^{(n)} := x^{(n)} / \max_i |x_i^{(n)}|$ wohldefiniert und $y^{(n)}$ liegt wieder in U. Da U abgeschlossen und die Folge $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert y in U. Für diesen Grenzwert gilt wegen der Stetigkeit von $\| \cdot \|_1$ die Relation $\|yP\|_1 \geq 1 \cdot \|y\|_1$, wegen Aufgabenteil (a) also $\|yP\|_1 = 1 \cdot \|y\|_1$. Aus dem Beweis für Aufgabenteil (a) folgt daher

$$|\sum_{j=1}^{N} y_j p_{ji}| = \sum_{j=1}^{N} |y_j| p_{ji}$$

für alle $i = 1, ..., N$, und da alle $p_{ji} > 0$ sind, müssen die y_j alle ≥ 0 oder alle ≤ 0 sein, was wiederum wegen $y \in U$ bedeutet, dass $y = 0$ ist. Da aber nach Konstruktion alle Folgeglieder $y^{(n)}$ eine Komponente 1 oder -1 haben, ist $y = 0$ nicht möglich, wir haben also einen Widerspruch.

Sind $q, r \in \mathbb{R}_N$ zwei Wahrscheinlichkeitsvektoren, so folgt aus dem eben Gezeigten wegen $q - r \in U$:

$$\|qP^n - rP^n\|_1 = \|(q-r)P^n\|_1 \leq \alpha \|(q-r)P^{n-1}\|_1 \leq ... \leq \alpha^n \|q-r\|_1 \to 0,$$

d.h. egal mit welcher Startverteilung eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P startet, mit $n \to \infty$ ergibt sich immer dieselbe Grenzverteilung für X_n auf dem Zustandsraum E.

Aufgabe 4: Beweisen Sie Lemma 1.5 der Vorlesung:
Ist der Zustand $i \in E$ aperiodisch, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $p_{ii}(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Lösung: Es sei $H := \{m \in \mathbb{N} : \, p_{ii}(m) > 0\}$. Wegen

$$\mathbb{N} \ni \, d_n \, := \, \mathrm{ggT}\big(H \cap \{1, \ldots, n\}\big) \, \downarrow \, \mathrm{ggT}(H) \, = \, 1 \quad \text{mit } n \to \infty$$

gibt es Zahlen $m_1, ..., m_k \in H$ mit $\mathrm{ggT}\{m_1, ..., m_k\} = 1$. Zu diesen gibt es dann wiederum ganze Zahlen $l_1, ..., l_k$ mit $\sum_{i=1}^{k} l_i m_i = 1$. Diesen Sachverhalt aus der elementaren Zahlentheorie kann man leicht wie folgt einsehen:

$$G \, := \, \Big\{ \sum_{i=1}^{k} l_i m_i : \, l_1, ..., l_k \in \mathbb{Z} \Big\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, also im Falle $1 \notin G$ von der Form $G = d\mathbb{Z}$ mit einem $d > 1$. Dieses d wäre dann Teiler von $m_1, ..., m_k$, die ja bei geeigneter Wahl der l-Koeffizienten als Elemente von G erscheinen, im Widerspruch zu $\mathrm{ggT}\{m_1, ..., m_k\} = 1$.

Nun ist H additiv abgeschlossen: Hat man nämlich $n, m \in H$, so folgt mit

$$p_{ii}(n+m) \, = \, \sum_{j \in I} p_{ij}(n) p_{ji}(m) \, \geq \, p_{ii}(n) p_{ii}(m) \, > \, 0,$$

dass auch $n + m$ in H liegen. Ein Umschreiben von $\sum_{i=1}^{k} l_i m_i = 1$ zu

$$\sum_{\substack{i=1 \\ l_i > 0}}^{k} l_i m_i \, = \, \sum_{\substack{i=1 \\ l_i < 0}}^{k} (-l_i) m_i \, + \, 1$$

zeigt, dass H zwei aufeinanderfolgende Zahlen m und $m + 1$ enthält. Setzt man nun $n_0 := m(m-1)$, so gilt für beliebiges $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} n \; &= \; mk + j \quad \text{mit} \quad 0 \leq j \leq m-1, \; k \geq m-1 \\ &= \; (k-j)m \, + \, j(m+1), \end{aligned}$$

also $n \in H$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

2. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 5: Es sei (S_n) die d-dimensionale symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $p_{0,0}(n) = P(S_n = 0|S_0 = 0)$. Man zeige und folgere:

(a) Im Fall $d = 2$ gilt $p_{0,0}(2n) = \binom{2n}{n}^2 4^{-2n}$. Die zweidimensionale symmetrische Irrfahrt ist rekurrent.

(b) Im Fall $d = 3$ gilt $p_{0,0}(2n) \leq 2^{-2n}3^{-n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{(\Gamma(n/3+1))^3}$, wobei Γ die Gammafunktion sei.

Die dreidimensionale symmetrische Irrfahrt ist transient.

(c) Für $d \geq 3$ ist die d-dimensionale symmetrische Irrfahrt transient.

Lösung: $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid-Folge von Zufallsvektoren im $\mathbb{Z}^d$, $X_i \sim \text{unif}\{\pm e_1, ..., \pm e_d\}$. Interessant: Für $d = 1, 2$ ist die Irrfahrt rekurrent, für $d \geq 3$ ist sie transient.

(a) Im Falle $d = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{00}(2n) &= \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{l}\binom{2n-l}{l}\binom{2n-2l}{n-l}\binom{n-l}{n-l}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= 4^{-2n}\cdot\sum_{l=0}^{n}\frac{(2n)!}{l!l!(n-l)!(n-l)!} = 4^{-2n}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\sum_{l=0}^{n}\frac{n!n!}{l!l!(n-l)!(n-l)!} \\ &= 4^{-2n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{n-l} = 4^{-2n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\binom{2n}{n} \\ &= 4^{-2n}\cdot\binom{2n}{n}^2. \end{aligned}$$

Außerdem gilt natürlich $p_{00}(2n+1) = 0$. Nun ist S_n genau dann rekurrent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$ gilt. Zum Nachweis dieser äquivalenten Eigenschaft verwenden wir das folgende Lemma der Analysis:

Sind $\alpha_n, \beta_n \geq 0$ mit $\alpha_n \sim \beta_n$, so ist $\sum \alpha_n = \infty$ genau dann, wenn $\sum \beta_n = \infty$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{00}(2n) &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n}\binom{2n}{n}^2 = \Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n}\Big(\frac{(2n)!}{n!n!}\Big)^2 \\ &\sim \Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n}\Big(\frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}\Big)^2 \\ &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 2^{2n}\cdot\frac{n^{2n}}{n^{2n}}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Also ist $\sum p_{00}(n) = \infty$ und damit S_n rekurrent in Dimension 2.

(b) Im Falle $d = 3$ ergibt sich ganz ähnlich:

$$\begin{aligned} p_{00}(2n) &= \sum_{l+k\le n}\binom{2n}{l}\binom{2n-l}{l}\binom{2n-2l}{k}\binom{2n-2l-k}{k}\binom{2n-2l-2k}{n-l-k} \\ &\qquad\cdot\binom{n-l-k}{n-l-k}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2n} \\ &= \sum_{l+k\le n}\frac{(2n)!}{(l!)^2(k!)^2((n-l-k)!)^2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n}\sum_{l+k\le n}\binom{n}{l\ \ k\ \ n-l-k}^2\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2n} \\ &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n}\binom{2n}{n}\sum_{l+k\le n}\binom{n}{l\ \ k\ \ n-l-k}^2\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n} \\ &\qquad NR:\binom{n}{l\ \ k\ \ n-l-k} = \frac{n!}{\Gamma(l+1)\Gamma(k+1)\Gamma(n-l-k+1)} \\ &\qquad\qquad \le \frac{n!}{\Gamma(\frac{n}{3}+1)^3} \\ &\le \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{\Gamma(\frac{n}{3}+1)^3}\underbrace{\sum_{l+k\le n}\binom{n}{l\ \ k\ \ n-l-k}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n}}_{=1} \\ &\sim \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n}\frac{\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{(\sqrt{2\pi\frac{n}{3}}(n/3)^{n/3}e^{-\frac{n}{3}})^3} \\ &= C\cdot n^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Also ist wegen $\sum n^{-\frac{3}{2}} < \infty$ die Irrfahrt S_n in 3 Dimensionen transient.

(c) Jetzt zur Dimension $d \geq 3$. Ist $X_k = (X_1^k, X_2^k, ..., X_d^k)$, so sei $\tilde{X}_k := (X_1^k, X_2^k, X_3^k)$. Es sei $\tau_0 := 0$ und $\tau_{n+1} := \inf\{n > \tau_n : \tilde{X}_n \neq 0\}$. Es gilt

$$P(\tilde{X}_k \neq 0 \text{ für unendlich viele } k) = 1,$$

da

$$\sum_k P(\tilde{X}_k \neq 0) = \sum_k \frac{6}{2d} = \infty.$$

(Borel-Cantelli). Also ist $(\tilde{X}_{\tau_n})$ wohldefiniert.

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
& P(\tilde{X}_{\tau_1} = x_1, \tau_1 = l_1, \tilde{X}_{\tau_2} = x_2, \tau_2 - \tau_1 = l_2, ..., \tilde{X}_{\tau_n} = x_n, \tau_n - \tau_{n-1} = l_n) \\
= \; & P(\tilde{X}_{l_1} = x_1, \tau_1 = l_1, \tilde{X}_{l_1+l_2} = x_2, \tau_2 - \tau_1 = l_2, ..., \tilde{X}_{l_1+l_2+...+l_n} = x_n, \tau_n - \tau_{n-1} = l_n) \\
= \; & P(\tilde{X}_m = 0,\, m = 1, ..., l_1 - 1,\, \tilde{X}_{l_1} = x_1,\, \tilde{X}_m = 0,\, m = l_1 + 1, ..., l_1 + l_2 - 1, \\
& \quad \tilde{X}_{l_2} = x_2, ...,\, \tilde{X}_{l_n} = x_n) \\
= \; & \Big(\frac{2d-6}{2d}\Big)^{l_1-1+l_2-1+...+l_n-1} \cdot \Big(\frac{6}{2d}\Big)^n.
\end{aligned}$$

Hieraus folgert man, dass die Folge der $(\tilde{X}_{\tau_i}, \tau_i - \tau_{i-1})$ unabhängig und identisch verteilt ist. Durch geeignetes Summieren erhält man $P(\tilde{X}_{\tau_1} = x_1, ..., \tilde{X}_{\tau_n} = x_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. Damit ist $\tilde{S}_n := \sum_{l=1}^n \tilde{X}_{\tau_l}$ eine 3-dimensionale Irrfahrt. Wäre nun S_n rekurrent, so auch $\tilde{S}_n$ im Widerspruch zu Aufgabenteil (b).

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p_{i,i+1} = p$, $0 < p < 1$, im Fall $p \neq \frac{1}{2}$ transient ist. Berechnen Sie f_{00}^* als Funktion von p. Berechnen Sie den Erwartungswert der Rückkehrzeit nach 0 im Falle $p = \frac{1}{2}$. Hinweis: Es gilt $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \left(\frac{x}{4}\right)^j$.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{4p(1-p)}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2p)^2}} = \frac{1}{|1-2p|}.\end{aligned}$$

Also ist die eindimensionale Irrfahrt genau dann rekurrent, wenn $|1-2p| = 0$ gilt, also $p = 1/2$, und ansonsten transient.

Weiter gilt nach Aufgabe 2.(d):

$$f_{00}^* = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n)} = \frac{\frac{1}{|1-2p|} - 1}{\frac{1}{|1-2p|}} = 1 - |1-2p|.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$ET_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{00}(n) = \lim_{t \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot t^{n-1} f_{00}(n) = \lim_{t \uparrow 1} F'(t).$$

Im Falle $p = 1/2$ führt dies mit

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{t^2}{4}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$F(t) = 1 - \frac{1}{P(t)} = 1 - \sqrt{1-t^2},$$

und

$$F'(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

auf

$$ET_0 = \infty,$$

der Zustand 0 ist also nullrekurrent.

Aufgabe 7: Each morning a student takes one of the three books (labelled $1, 2, 3$) he owns from his shelf. The probability that he chooses the book with label i is α_i (where $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, 3$), and choices on successive days are independent. In the evening he replaces the book at the left-hand end of the shelf. If p_n denotes the probability that on day n the student finds the books in the order $1, 2, 3$, from left to right, show that, irrespective of the initial arrangement of the books, p_n converges as $n \to \infty$, and determine the limit.

Lösung: Obviously there are 6 possible states, named $z_1, ..., z_6$, that are represented by the following sequences:

$$z_1 \to 1, 2, 3, \quad z_2 \to 2, 3, 1, \quad z_3 \to 3, 1, 2,$$
$$z_4 \to 3, 2, 1, \quad z_5 \to 2, 1, 3, \quad z_6 \to 1, 3, 2.$$

After short consideration you find the following transition matrix:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

According to the Main Limit Theorem for Markov Chains, all we have to do now is to find a probability vector π with $\pi P = \pi$. This yields 6 equations for the 6 unknown components of π and by solving this system of linear equations we get

$$\pi_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}, \pi_3 = \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}$$
$$\pi_4 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_5 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_3}, \pi_6 = \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

It is clear, that the Markov chain is irreducible and aperiodic (all diagonal elements different from 0). Now we can conclude, that

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \pi_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

Aufgabe 8: Eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P heisst *umkehrbar*, wenn es einen Wahrscheinlichkeitsvektor π gibt mit

$$\pi_i \, p_{ij} \;=\; \pi_j \, p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \tag{$\star$}$$

(a) Zeigen Sie, dass aus ($\star$) folgt, dass π eine stationäre Verteilung zu P ist.

(b) Eine Urne enthält insgesamt N Kugeln, die rot oder blau sein können. Die Zufallsvariable X_n bezeichne die Anzahl der blauen Kugeln zur Zeit n. Im Zeitintervall $(n, n+1)$ wird eine Kugel der Urne "rein zufällig" entnommen und gegen eine Kugel der anderen Farbe ausgetauscht. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P und finden Sie eine stationäre Verteilung zu P.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$(\pi P)_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_{i \in E} p_{ji} = \pi_j.$$

(b) Die Übergangsmatrix ergibt sich zu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & 1-\frac{1}{N} & & & & \\ & \frac{2}{N} & 0 & 1-\frac{2}{N} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{N-1}{N} & 0 & 1-\frac{N-1}{N} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei leere Einträge durch Nullen zu ersetzen sind. Es gilt also, sofern definiert:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1-\frac{i}{N}, & j = i+1, \\ \frac{i}{N}, & j = i-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

($i, j \in \{0, ..., N\}$.) Sucht man nun eine stationäre Verteilung π, die sogar ($\star$) erfüllt, so kommt man auf die Gleichung

$$\pi_n \cdot \frac{n}{N} = \pi_{n-1} \cdot \Big(1 - \frac{n-1}{N}\Big),$$

also

$$\pi_n = \pi_{n-1} \cdot \frac{N}{n}\Big(1 - \frac{n-1}{N}\Big) = \pi_{n-1} \cdot \frac{N+1-n}{n} = ... = \pi_0 \cdot \binom{N}{n}.$$

Wegen

$$1 = \sum_{n=0}^{N} \pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = \pi_0 \cdot 2^N$$

folgt $\pi_0 = 2^{-N}$ und damit

$$\pi_n = 2^{-N} \cdot \binom{N}{n},$$

$n = 0, ..., N$.

Aufgabe 9: („schwache Markov-Eigenschaft“)
Es sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Startverteilung q, Übergangsmatrix P und Zustandsraum E, desweiteren sei $N \in \mathbb{N}$.

Wir definieren $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $Y_n := X_{N+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und nennen Y den *Post-N-Prozess* zu X. Dies alles spielt sich auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ab, $\mathcal{F}_N := \sigma\{X_0, ..., X_N\}$ sei die von dem “Anfangsstück” bis N erzeugte σ-Algebra, $\mathcal{F}^Y := \sigma\{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ die vom Post-N-Prozess erzeugte σ-Algbra.

Zeigen Sie: $\mathcal{F}_N$ und $\mathcal{F}^Y$ sind unter X_N bedingt unabhängig in dem Sinne, dass für alle $A \in \mathcal{F}_N$, $B \in \mathcal{F}^Y$ und $i \in E$

$$\mathrm{P}(A \cap B | X_N = i) = \mathrm{P}(A|X_N = i) \cdot \mathrm{P}(B|X_N = i)$$

gilt.

Hinweis: Es reicht, die Gleichheit für A, B aus einem geeigneten $\cap$-stabilen Erzeugendensystem nachzuweisen.

Lösung: Es sei

$$A = \{X_0 = i_0, ..., X_N = i_N\},$$
$$B = \{Y_0 = j_0, ..., Y_M = j_M\}.$$

Offensichtlich ist die Gleichheit gegeben, wenn $i_N \neq i$ oder $j_0 \neq i$ gilt; auch klar: Mengen dieses Typs bilden ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_N$ und $\mathcal{F}^Y$. Es bleibt die direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{P}(A \cap B | X_N = i) \\
= \; & \frac{\mathrm{P}(X_0 = i_0, ..., X_{N-1} = i_{N-1}, X_N = i, X_{N+1} = j_1, ..., X_{N+M} = j_M)}{\mathrm{P}(X_N = i)} \\
= \; & \mathrm{P}(X_{N+1} = j_1, ..., X_{N+M} = j_M | X_0 = i_0, ..., X_{N-1} = i_{N-1}, X_N = i) \\
& \cdot \frac{\mathrm{P}(X_0 = i_0, ..., X_{N-1} = i_{N-1}, X_N = i)}{\mathrm{P}(X_N = i)} \\
= \; & \mathrm{P}(X_{N+1} = j_1, ..., X_{N+M} = j_M | X_N = i) \\
& \cdot \mathrm{P}(X_0 = i_0, ..., X_{N-1} = i_{N-1}, X_N = i | X_N = i) \\
= \; & \mathrm{P}(X_N = i, X_{N+1} = j_1, ..., X_{N+M} = j_M | X_N = i) \\
& \cdot \mathrm{P}(X_0 = i_0, ..., X_{N-1} = i_{N-1}, X_N = i | X_N = i) \\
= \; & \mathrm{P}(A|X_N = i) \cdot \mathrm{P}(B|X_N = i).
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

3. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 10: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine irreduzible aperiodische Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum $E := \{0, ..., N\}$ und Übergangsmatrix P.

(a) Zeigen Sie die Rekurrenz von (X_n).

(b) Es sei $T_0 := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$. Es sei x der Zeilenvektor mit Komponenten $x_i = \sum_{n\geq 1} P(X_n = i,\ n \leq T_0 | X_0 = 0)$. Man zeige, dass $xP = x$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass (X_n) positiv rekurrent ist.

Lösung:

(a) Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft. Wegen der Irreduzibilität der Kette gilt also: entweder sind alle Zustände rekurrent oder keiner. Angenommen kein Zustand wäre rekurrent. Dann würde $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$ für alle $i, j \in E$ gelten (folgt aus Satz 1.6 in Verbindung mit Aufgabe 2.(d) und der Beobachtung, dass aus $i \rightsquigarrow j$ die Ungleichung $f_{ij}^* > 0$ folgt). Also insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0j}(n) < \infty \text{ für alle } j = 0, ..., N.$$

Da sämtliche Reihenreste gegen 0 gehen, folgt also, dass es zu $\varepsilon := 1/(2(N+1))$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $p_{0j}(n) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $j = 0, ..., N$ gibt. Also folgt für alle $n \geq n_0$: $\sum_{j=0}^{N} p_{0j}(n) < 1/2$. Andererseits gilt natürlich stets $\sum_{j=0}^{N} p_{0j}(n) = 1$, wir haben also einen Widerspruch.

(b) Es gilt:

$$(xP)_i \ = \ \sum_{j=0}^{N} x_j p_{ji} \ = \ \sum_{j=0}^{N} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = j, n \leq T_0 | X_0 = 0) \Big) P(X_1 = i | X_0 = j)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = j, n \le T_0 | X_0 = 0) P(X_1 = i | X_0 = j)}_{=:(\star)} +$$
$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n = 0, n \le T_0 | X_0 = 0) P(X_1 = i | X_0 = 0)}_{=:(\star\star)}$$

Weiter:

$$\begin{aligned}
(\star) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{N} P(X_n = j, n+1 \le T_0 | X_0 = 0) \cdot \\
&\qquad P(X_{n+1} = i | X_n = j, X_0 = 0, X_1 \neq 0, ..., X_{n-1} \neq 0) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{N} P(X_n = j, n+1 \le T_0 | X_0 = 0) \cdot \\
&\qquad P(X_{n+1} = i | X_n = j, X_0 = 0, n+1 \le T_0) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{N} P(X_{n+1} = i, X_n = j, n+1 \le T_0 | X_0 = 0) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_{n+1} = i, n+1 \le T_0 | X_0 = 0) \\
&= x_i - P(X_1 = i, 1 \le T_0 | X_0 = 0) \;=\; x_i - P(X_1 = i | X_0 = 0)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\star\star) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{P(X_n = 0, n \le T_0 | X_0 = 0)}_{=f_{00}(n)} P(X_1 = i | X_0 = 0) \\
&= \underbrace{f_{00}^*}_{=1} \cdot P(X_1 = i | X_0 = 0) \\
&= P(X_1 = i | X_0 = 0),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt wäre.

(c) Wegen $\sum_{j=0}^{N} p_{0j}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss es ein $j \in \{0, ..., N\}$ mit $\limsup p_{0j}(n) > 0$ geben. Außerdem existiert wegen der Irreduzibilität von (X_n) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p_{j0}(m) > 0$. Wegen $p_{00}(n+m) \ge p_{0j}(n) p_{j0}(m)$ ist dann $\limsup p_{00}(n) > 0$. Nach dem Erneuerungssatz gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}(n) = \frac{1}{E[T_0 | X_0 = 0]},$$

folglich muss $E[T_0 | X_0 = 0] < \infty$ sein.

Aufgabe 11: (X_n) sei eine irreduzible rekurrente Markov-Kette mit Zustandsraum E, und $h : E \to \mathbb{R}$ eine beschränkte harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass h konstant ist.

Lösung: Es handelt sich um eine Art „Satz von Liouville“ für Markov-Ketten. Wir betrachten den Prozess $Y_n := h(X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Da h harmonisch ist, ist (Y_n) ein Martingal, dass nach Voraussetzung beschränkt ist. Nach dem Vorwärtskonvergenzsatz von Doob existiert dann ein Y_∞ mit $h(X_n) \xrightarrow{\text{f.s.}} Y_\infty$.

Nun angenommen, h wäre nicht konstant, d.h. es existieren Zustände $i, j \in E$ mit $h(i) > h(j)$. Da (X_n) nach Voraussetzung rekurrent und irreduzibel ist, gilt $f_{ij}^* \cdot f_{ji}^* = 1$. Daraus kann man schließen (Stetigkeit von oben), dass es mit Wahrscheinlichkeit 1, also fast sicher, eine Folge $n_1 < n_2 < ...$ von natürlichen Zahlen gibt, so dass $X_{n_{2k}} = j$ und $X_{n_{2k-1}} = i$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. (X_n) springt also mit Wahrscheinlichkeit 1 beliebig oft zwischen den Zuständen i und j hin und her. Dann gilt aber fast sicher

$$\limsup h(X_n) \geq h(i) > h(j) \geq \liminf h(X_n)$$

im Widerspruch zu $h(X_n) \xrightarrow{\text{f.s.}} Y_\infty$.

Aufgabe 12: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Wir nennen $h : E \to \mathbb{R}$ harmonisch auf $A \subseteq E$, wenn $(Ph)(i) = h(i)$, $i \in A$, gilt. Es sei $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \ X_n \in A^{\mathrm{c}}\}$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\text{finde } h : E \to \mathbb{R} \text{ mit } h \text{ harmonisch auf } A,\ h \equiv 1 \text{ auf } A^C$$

durch $h(i) := P(\tau < \infty | X_0 = i)$ gelöst wird.

Lösung: Für $i \in A^{\mathrm{c}}$ gilt offensichtlich

$$h(i) = P(\tau < \infty | X_0 = i) = P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}} | X_0 = i (\in A^{\mathrm{c}})) = 1.$$

Für $i \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
h(i) &= P(\tau < \infty | X_0 = i) \ = \ P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}} | X_0 = i) \\
&= \sum_{j\in E} P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}}, X_1 = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{j\in A} P(\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}}, X_1 = j | X_0 = i) + \\
&\quad \sum_{j\in A^{\mathrm{c}}} P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}}, X_1 = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{j\in A} P(\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}} | X_1 = j, X_0 = i) \cdot p_{ij} + \\
&\quad P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}}, X_1 \in A^{\mathrm{c}} | X_0 = i) \\
&= \sum_{j\in A} P(\exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}} | X_1 = j) \cdot p_{ij} + P(X_1 \in A^{\mathrm{c}} | X_0 = i) \\
&= \sum_{j\in A} P(\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, X_n \in A^{\mathrm{c}} | X_0 = j) \cdot p_{ij} + \sum_{j\in A^{\mathrm{c}}} 1 \cdot p_{ij} \\
&= \sum_{j\in A} p_{ij} h(j) + \sum_{j\in A^{\mathrm{c}}} p_{ij} h(j) \ = \ \sum_{j\in E} p_{ij} h(j) \ = \ (Ph)(i).
\end{aligned}$$

Aufgabe 13: Zeigen Sie mit der in Abschnitt 1.5 der Vorlesung besprochenen Methode, dass die einfache unsymmetrische Irrfahrt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = 1 - P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = p, \quad X_0 = 0,$$

mit $p \neq \frac{1}{2}$, transient ist.

Lösung: Gehen wir analog zum im Abschnitt 1.5 der Vorlesung besprochenen Fall der symmetrischen Irrfahrt vor, so haben wir zunächst eine harmonische Funktion h zu finden. Es muss gelten:

$$h_{n+1} = p \cdot h_{n+2} + (1-p) \cdot h_n \quad \text{sowie} \quad h_{n+1} = p \cdot h_{n+1} + (1-p) \cdot h_{n+1},$$

woraus sich

$$h_{n+2} - h_{n+1} = \underbrace{\left(\frac{1-p}{p}\right)}_{=:\alpha} \cdot (h_{n+1} - h_n)$$

ergibt. Damit ist also:

$$h(i) := \alpha^i, \;\; i \in \mathbb{Z},$$

die gesuchte harmonische Funktion. Folglich ist $Y_n := \alpha^{X_n}$ ein Martingal. Definieren wir

$$\tau_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = a\}, \;\; \tau_b := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = b\}, \;\; \tau := \tau_a \wedge \tau_b,$$

so ist für $a < i_0 < b$ und $X_0 = i_0$ der Prozess $(Y_{n\wedge\tau})$ ein beschränktes Martingal. Nach dem Vorwärtskonvergenzsatz von Doob und den Erweiterungen im Zusammenhang mit gleichgradig integrierbaren Martingalen existiert dann eine ZV Y_∞ mit $Y_{n\wedge\tau} \to Y_\infty$ P-f.s. und in L^1.

Auf der Menge $\{\tau = \infty\}$ gilt

$$|X_{n+1\wedge\tau} - X_{n\wedge\tau}| = |X_{n+1} - X_n| = 1,$$

und deshalb

$$|h(X_{n+1}) - h(X_n)| = \underbrace{\alpha^{X_n}}_{\geq \alpha^a \wedge \alpha^b} \underbrace{|1 - \alpha^{X_{n+1} - X_n}|}_{\geq |1-\alpha^{-1}| \wedge |1-\alpha|} \geq K > 0,$$

d.h. hier kann keine Konvergenz vorliegen. Also ist

$$P(\tau = \infty | X_0 = i_0) = 0.$$

Dies bewirkt wiederum, dass Y_∞ und Y_τ P-f.s. gleich sind. Hieraus schließen wir

$$\begin{aligned}
EY_\tau &= EY_\infty, \;\; \text{weil } Y_\tau = Y_\infty \text{ f.s.}, \\
&= \lim_{n\to\infty} EY_{n\wedge\tau}, \;\; \text{wegen der } L^1\text{-Konvergenz}, \\
&= \lim_{n\to\infty} EY_0, \;\; \text{wegen der Martingaleigenschaft}, \\
&= \alpha^{i_0}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$EY_\tau = \alpha^a \cdot P(\tau_a < \tau_b | X_0 = i_0) + \alpha^b \cdot P(\tau_b < \tau_a | X_0 = i_0),$$

so dass sich hieraus

$$P(\tau_a < \tau_b | X_0 = i_0) = \frac{\alpha^{i_0} - \alpha^b}{\alpha^a - \alpha^b} \text{ und } P(\tau_b < \tau_a | X_0 = i_0) = \frac{\alpha^a - \alpha^{i_0}}{\alpha^a - \alpha^b}$$

ergibt.

Nun schlagen wir endlich den Bogen zur Transienz. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\tau_0 = \infty | X_0 = 0) &= P(\tau_0 = \infty | X_0 = 1) \cdot p + P(\tau_0 = \infty | X_0 = -1) \cdot (1-p) \\
&= P(\tau_b < \tau_0 \, \forall \, b > 1 | X_0 = 1) \cdot p + \\
&\quad P(\tau_a < \tau_0 \, \forall \, a < -1 | X_0 = -1) \cdot (1-p) \\
&= \lim_{b \to \infty} P(\tau_b < \tau_0 | X_0 = 1) \cdot p + \lim_{a \to -\infty} P(\tau_a < \tau_0 | X_0 = -1) \cdot (1-p) \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{1-\alpha}{1-\alpha^b} \cdot p + \lim_{a \to -\infty} \frac{\alpha^{-1} - 1}{\alpha^a - 1} \cdot (1-p) \\
&= |1 - 2p|.
\end{aligned}$$

Man sieht also, dass man im Fall $p \neq 1/2$ keine Rekurrenz hat und bestätigt auch gleich nochmal die Rekurrenz im symmetrischen Fall.

Aufgabe 14: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum E. Es sei τ eine endliche Stoppzeit. Ist h eine beschränkte Funktion, so gilt $E[h(X_{\tau+1})|\mathcal{F}_\tau] = (Ph)(X_\tau)$.

Lösung: Offenbar ist X_τ $\mathcal{F}_\tau$-messbar und daher auch $(Ph)(X_\tau)$. Außerdem gilt für jedes $A \in \mathcal{F}_\tau$:

$$\begin{aligned}
\int_A (Ph)(X_\tau)\,dP &= \int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{\{\tau=n\}}(Ph)(X_n)\,dP \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A\cap\{\tau=n\}} (Ph)(X_n)\,dP, \quad \text{maj. Konv.}, \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A\cap\{\tau=n\}} h(X_{n+1})\,dP, \quad \text{Lemma 1.18}, \\
&= \int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{\{\tau=n\}} h(X_{n+1})\,dP \\
&= \int_A h(X_{\tau+1})\,dP.
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

4. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 15: Bei der einfachen symmetrischen Irrfahrt $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Start in 0 sei

$$\tau_r := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = r\} \quad (r \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsgrössen $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 - \tau_3, ...$ unabhängig und identisch verteilt sind.

(b) Zeigen Sie, dass zu τ_1 die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g,

$$g(z) = \frac{1}{z}\,(1 - \sqrt{1 - z^2}), \quad 0 \neq |z| \leq 1,$$

gehört. (Hinweis: Zerlegen Sie nach dem Wert von X_1.)

Lösung: Wir setzen

$$\rho_k := \tau_k - \tau_{k-1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

(a) Angenommen, man hat bereits gezeigt, dass $\tau_1, \rho_2, ..., \rho_k$ voneinander unabhängig sind. Mit $\tau := \tau_k$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \tau_1, \rho_2, ..., \rho_k & \text{sind} & \mathcal{F}_\tau\text{-messbar}, \\ \rho_{k+1} & \text{ist} & \sigma(Y)\text{-messbar}, \end{array}$$

wobei Y den Post-τ-Prozess bezeichnet. Nach Satz 1.24 (Starke Markov-Eigenschaft) sind also $(\tau_1, \rho_2, ..., \rho_k)$ und ρ_{k+1} unter X_τ bedingt unabhängig. Wegen $X_\tau \equiv k$ hat man $P(A|X_\tau) = P(A)$, also hat man sogar die 'richtige' Unabhängigkeit.

(Anmerkung: Warum reicht dieser Induktionsbeweis? Allgemein ist eine Familie $\{X_i : i \in I\}$ von Zufallsgrößen genau dann unabhängig, wenn dies für jede Teilfamilie $\{X_i : i \in J\}$ mit endlichem J gilt. Für endliche J bedeutet dies

$$P^{(X_{i_1},...,X_{i_k})} = P^{X_{i_1}} \otimes ... \otimes P^{X_{i_k}}.$$

Da sich die Unabhängigkeit auf Teilfamilien überträgt, reicht im Falle $I = \mathbb{N}$ sogar der Nachweis von

$$P^{(X_1,...,X_k)} = P^{X_1} \otimes ... \otimes P^{X_k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

Der obige Beweis liefert nun gerade diese Eigenschaft induktiv vermöge

$$P^{((\tau_1,\rho_2,...,\rho_k),\rho_{k+1})} = P^{(\tau_1,\rho_2,...,\rho_k)} \otimes P^{\rho_{k+1}}.)$$

Die Eigenschaft, dass $\mathcal{L}(\rho_k) = \mathcal{L}(\tau_1)$ für alle $k \geq 2$ gilt, folgt aus der räumlichen Homogenität der symmetrischen Irrfahrt, denn $(Y_n - k)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist wieder eine einfache symmetrische Irrfahrt mit Start in 0, und ρ_{k+1} entspricht dann τ_1.

(b) Eine Zerlegung nach dem Wert von X_1 liefert

$$\begin{aligned} P(\tau_1 = k) &= P(\tau_1 = k, X_1 = 1) + P(\tau_1 = k, X_1 = -1) \\ &= \frac{1}{2}\,\delta_{1k} + \frac{1}{2}\,P(\tau_1 = k-1 | X_0 = -1). \end{aligned}$$

Entscheidend ist nun die räumliche Homogenität der Irrfahrt, die einem die Gleichheit

$$P(\tau_1 = k-1 | X_0 = -1) = P(\tau_2 = k-1 | X_0 = 0)$$

liefert. Teil (a) impliziert nun, dass $\tau_2 = \tau_1 + \rho_2$ gilt, wobei τ_1 und ρ_2 unabhängig sind und dieselbe Verteilung haben. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 = n) z^n &= \frac{1}{2}\,z + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} P(\tau_1 + \rho_2 = n-1) z^n \\ &= \frac{1}{2}\,z + \frac{1}{2}\,z \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1 + \rho_2 = n) z^n, \end{aligned}$$

also

$$g(z) = \frac{1}{2}\,z(1 + g(z)^2).$$

Auflösen ergibt

$$g(z) = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}.$$

Wegen $|g(z)| \leq 1$ für $|z| \leq 1$ ist hierbei offenbar '$-$' die richtige Wahl des Vorzeichens.

Aufgabe 16: Es sei X wie in der vorangegangenen Aufgabe.

(a) Finden Sie eine Funktion ϕ mit der Eigenschaft, dass

$$(Z_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad Z_n^\theta := \phi(\theta)^{-n}\exp(\theta X_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist.

(b) Verwenden Sie Teil (a) und das OST, um einen alternativen Beweis zu der Aussage von Teil (b) der vorangegangenen Aufgabe zu finden.

Lösung:

(a) Klar: $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$, mit Y_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und $P(Y_{n+1} = 1) = P(Y_{n+1} = -1) = \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$E[\exp(\theta X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \exp(\theta X_n) E\exp(\theta Y_{n+1}) = \phi(\theta)\exp(\theta X_n)$$

mit

$$\phi(\theta) = E\exp(\theta Y_1) = \frac{1}{2}\,e^\theta + \frac{1}{2}\,e^{-\theta} = \cosh(\theta).$$

Diese Rechnung zeigt, dass $Z_n^\theta := \phi(\theta)^{-n} X_n$ auf ein Martingal führt.

(b) Nach Satz 8.10 der Vorlesung Stochastik II ist $(Z^\theta_{n\wedge\tau_1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal, wegen $\phi(\theta) \geq 1$ und $\exp(\theta X_{n\wedge\tau_1}) \leq e^\theta$ ist es beschränkt. Also gilt:

$$EZ^\theta_{\tau_1} = \lim_{n\to\infty} EZ^\theta_{n\wedge\tau_1} = EZ^\theta_0 = 1$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$. ($Z^\theta_{\tau_1}$ ist der f.s.- und L^1-Limes.)

Wegen $X_{\tau_1} \equiv 1$ wird man somit auf

$$E\phi(\theta)^{-\tau_1} = e^{-\theta}$$

geführt. Wähle nun zu $0 < z < 1$ ein θ so, dass

$$\phi(\theta)\Big(= \frac{1}{2}\,(e^\theta + e^{-\theta})\Big) = \frac{1}{z}$$

gilt. Man erhält eine quadratische Gleichung in $y := e^\theta$ und wird schließlich auf

$$e^{-\theta}\Big(= \frac{1}{y}\Big) = \frac{1}{z}\,(1 \pm \sqrt{1-z^2})$$

geführt.

Aufgabe 17: Wie in der Vorlesung sei

$$D_0 := \{f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{Z} : \ f(0) = 0, \ f \ \uparrow, \ f \text{ stetig von rechts}\},$$

versehen mit der durch die Projektionen $\pi_t : D_0 \to \mathbb{Z}$, $\pi_t(f) = f(t)$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{B}(D_0) := \sigma(\pi_t : t \geq 0)$. Es sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto (D_0, \mathcal{B}(D_0))$ eine Zufallsgröße und τ eine endliche Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\sigma(\pi_s(X) : 0 \leq s \leq t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $S_\tau(X) := (\pi_{\tau\wedge t}(X))_{t\geq 0}$ und $Z_\tau(X) = (\pi_{\tau+t}(X) - \pi_\tau(X))_{t\geq 0}$ ebenfalls Zufallsgrößen mit Werten in $(D_0, \mathcal{B}(D_0))$, also $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-messbar sind.

Lösung:

(a) Zunächst zum Prozess $S_\tau(X) := (\pi_{\tau\wedge t}(X))_{t\geq 0}$. Zu zeigen ist erstens, dass es sich hierbei tatsächlich um einen Prozess mit Bildbereich in D_0 handelt, und zweitens, dass dieser Prozess $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-messbar ist. Ersteres ist allerdings trivial, so dass wir uns hier nur mit der Messbarkeit beschäftigen. Nun ist aber klar, dass eine Abbildung $Y : \Omega \to D_0$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-messbar ist, wenn für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\pi_t \circ Y \text{ ist } (\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))\text{-messbar.}$$

Zu zeigen ist also: $S_\tau(X_t) = X_{\tau\wedge t}$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-messbar für jedes $t \geq 0$. Bei abzählbarem Wertebereich $\tau(\Omega)$ von τ ist dies kein Problem, wir zerlegen dann einfach nach den Werten von τ:

$$X_{\tau\wedge t} = \sum_{s\in\tau(\Omega)} X_{s\wedge t} 1_{\{\tau=s\}}.$$

Dabei ist dann $X_{s\wedge t}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-messbar, weil X $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-messbar ist, und $1_{\{\tau=s\}}$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-messbar, weil es sich um eine Stoppzeit handelt. Also ist dann auch $X_{\tau\wedge t}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-messbar. Hat nun aber τ einen überabzählbaren Wertebereich $\tau(\Omega)$, so definiert man zunächst

$$\tau_n := \frac{\lceil n\tau \rceil}{n}$$

und hat dann auf Grund des bisher Gezeigten die Messbarkeit von $X_{\tau_n\wedge t}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade von X gilt dann aber

$$X_{\tau\wedge t} = \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n\wedge t},$$

Also ist $X_{\tau\wedge t}$ als Grenzwert messbarer Funktionen messbar.

(b) Nun zum Prozess $Z_\tau(X) = (\pi_{\tau+t}(X) - \pi_\tau(X))_{t\geq 0}$. Auch hier ist die Bedingung, dass dieser Prozess seinen Bildbereich in D_0 hat, trivialerweise erfüllt, so dass wir uns wieder nur mit der Messbarkeit auseinander setzen. Zu zeigen ist: $Z_\tau(X) =$

$(\pi_{\tau+t}(X) - \pi_\tau(X))$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$-messbar für jedes $t \geq 0$. Bei abzählbarem Wertebereich $\tau(\Omega)$ von τ ist dies auch hier kein Problem, wir zerlegen wieder nach den Werten von τ:

$$(\pi_{\tau+t}(X) - \pi_\tau(X)) = X_{\tau+t} - X_\tau = \sum_{s \in \tau(\Omega)} (X_{s+t} - X_s) 1_{\{\tau = s\}}.$$

Aus der $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-Messbarkeit von X folgt dann die von $Z_\tau(X)$. Das weitere Vorgehen ist nun dasselbe wie in Teil (a).

Aufgabe 18: Kunden treffen in einer Bank gemäß eines Poisson-Prozesses mit Rate $\lambda > 0$ ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei Kunden im Zeitintervall $(1, 3]$ ankommen, unter der Bedingung, dass im Intervall $(2, 4]$ ein Kunde ankommt.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& P(3 \text{ Kunden in } (1,3] \,|\, 1 \text{ Kunde in } (2,4]) \\
= \;& P(N_3 - N_1 = 3 | N_4 - N_2 = 1) \;=\; \frac{P(N_3 - N_1 = 3, N_4 - N_2 = 1)}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^1}{1!}} \\
= \;& \frac{P(N_3 - N_1 = 3, N_4 - N_2 = 1, N_3 - N_2 = 0)}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \\
& + \frac{P(N_3 - N_1 = 3, N_4 - N_2 = 1, N_3 - N_2 = 1)}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \\
= \;& \frac{P(N_2 - N_1 = 3, N_4 - N_3 = 1, N_3 - N_2 = 0)}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \\
& + \frac{P(N_2 - N_1 = 2, N_4 - N_3 = 0, N_3 - N_2 = 1)}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \\
= \;& \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} + \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \;=\; \frac{e^{-3\lambda} \cdot (\frac{\lambda^4}{3!} + \frac{\lambda^3}{2!})}{2\lambda \cdot e^{-2\lambda}} \\
= \;& e^{-\lambda} \cdot \Big(\frac{\lambda^3}{12} + \frac{\lambda^2}{4}\Big).
\end{aligned}
$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

5. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 19:

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache symmetrische Irrfahrt mit Start in i_0, $a \in \mathbb{N}$ mit $|a| > |i_0|$ und

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : |X_n| \geq a\}.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert zu τ. (Hinweis: $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.)

(b) Können Sie auch die nichtsymmetrische Irrfahrt im Stil von Teil (a) behandeln?

Lösung:

(a) Es gilt $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$, mit Y_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und $P(Y_{n+1} = 1) = P(Y_{n+1} = -1) = \frac{1}{2}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] &= E[(X_n + Y_{n+1})^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= E[X_n^2 + 2X_nY_{n+1} + Y_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n^2 + 2X_nEY_{n+1} + EY_{n+1}^2 - (n+1) \\ &= X_n^2 + 1 - (n+1) \;=\; X_n^2 - n. \end{aligned}$$

Also ist $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tatsächlich ein Martingal. Dann ist auch $(X_{n\wedge\tau}^2 - (n \wedge \tau))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(X_{n\wedge\tau}^2 - (n \wedge \tau)) = E(X_0^2 - (0)) = i_0^2.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} E\tau &= \lim_{n\to\infty} E(n \wedge \tau) \text{ (mon. Konvergenz)} \\ &= \lim_{n\to\infty} EX_{n\wedge\tau}^2 - i_0^2 \\ &= EX_\tau^2 - i_0^2 \text{ (maj. Konvergenz)} \\ &= a^2 - i_0^2. \end{aligned}$$

(b) Sieht schlecht aus.

Aufgabe 20:

(a) Es seien $(N_t^i)_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, voneinander unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. Man zeige, dass $(N_t)_{t\geq 0}$ mit $N_t := N_t^1 + N_t^2$ ein Poisson-Prozess ist und ermittele seine Rate.

(b) Es seien $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine davon unabhängige iid-Folge mit $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$. Man zeige, dass die Prozesse $(N^i)_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, mit $N_t^1 := \sum_{l=1}^{N_t} X_l$ und $N_t^2 := N_t - N_t^1$ voneinander unabhängige Poisson-Prozesse sind und ermittle ihre Raten.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind die Eigenschaften (A1) bis (A4) aus der Vorlesung für den Prozess (N_t).

(A1) Ist klar.

(A2) Seien $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_n$. Dann sind

$$\begin{array}{rcccc} N_{t_n} - N_{t_{n-1}} & = & (N^1_{t_n} - N^1_{t_{n-1}}) & + & (N^2_{t_n} - N^2_{t_{n-1}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ N_{t_1} - N_{t_0} & = & (N^1_{t_1} - N^1_{t_0}) & + & (N^2_{t_1} - N^2_{t_0}) \\ N_{t_0} & = & N^1_{t_0} & + & N^2_{t_0} \end{array}$$

unabhängig, da jeder einzelne rechts stehende (eingeklammerte) Summand unabhängig von allen unter ihm stehenden ist, entweder wegen der Eigenschaft (A2) für N^1 und N^2, oder weil N^1 und N^2 unabhängig sind.

(A3) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(N_{t+s} - N_s = n) &= P\big((N^1_{t+s} - N^1_s) + (N^2_{t+s} - N^2_s) = n\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(N^1_{t+s} - N^1_s = i) \cdot P(N^2_{t+s} - N^2_s = n - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(N^1_t - N^1_0 = i) \cdot P(N^2_t - N^2_0 = n - i) \\ &= ... = P(N_t - N_0 = n). \end{aligned}$$

(A4) Es gilt:

$$\begin{aligned} P(N_h \geq 2) &= P(N_h^1 + N_h^2 \geq 2) \\ &= P(N_h^1 \geq 2 \text{ oder } N_h^2 \geq 2) + P(N_h^1 = N_h^2 = 1) \\ &\leq \underbrace{P(N_h^1 \geq 2)}_{=\mathcal{O}(h)} + \underbrace{P(N_h^2 \geq 2)}_{=\mathcal{O}(h)} + \underbrace{P(N_h^1 = 1)P(N_h^2 = 1)}_{e^{-2\lambda h}(\lambda h)^2} = \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Außerdem gilt natürlich

$$N_t = N_t^1 + N_t^2 \sim \mathrm{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t),$$

also $\lambda_{\text{ges}} = \lambda_1 + \lambda_2$.

(b) Es reicht, die Eigenschaften (A1) bis (A4) für (N_t^1) zu zeigen, denn wegen

$$N_t^2 = N_t - N_t^1 = \sum_{l=1}^{N_t}(1 - X_l) \text{ und } P(1 - X_l = 1) = 1 - P(1 - X_l = 0) = 1 - p$$

folgen diese für den Prozess (N_t^2) analog.

(A1) Ist klar.

(A2) Die Unabhängigkeit der Zuwächse zeigt man durch eine Zerlegung nach den Werten der N_{t_i} und anschließende Ausnutzung der Unabhängigkeit der X_i.

(A3) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $s, t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} P(N_{t+s}^1 - N_s^1 = n) &= P(\sum_{l=N_s+1}^{N_{t+s}} X_l = n) \\ &= \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ j \geq i}} P(\sum_{l=i+1}^{j} X_l = n, N_s = i, N_{s+t} = j) \\ &= \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ j \geq i}} P(\sum_{l=i+1}^{j} X_l = n) \cdot P(N_s = i, N_{s+t} = j) \\ &= \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ j \geq i}} P(\sum_{l=1}^{j-i} X_l = n) \cdot P(N_s = i, N_{s+t} - N_s = j - i), \end{aligned}$$

$$k := j - i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k\in\mathbb{N}_0} P(\sum_{l=1}^{k} X_l = n)\cdot P(N_s = i)\cdot P(N_{s+t}-N_s = k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(\sum_{l=1}^{k} X_l = n)\cdot P(N_t - N_0 = k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(\sum_{l=1}^{k} X_l = n, N_t - N_0 = k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(\sum_{l=N_0+1}^{N_t} X_l = n, N_t - N_0 = k)\\
&= P(\sum_{l=N_0+1}^{N_t} X_l = n) \;=\; P(N_t^1 = n).
\end{aligned}
$$

(A4) Aus $N_t \geq N_t^1$ folgt $P(N_t^1 \geq 2) \leq P(N_t \geq 2) = o(h)$.

Zu den Raten der Prozesse (N^1) und (N^2). Wie eben gesehen gilt

$$
\begin{aligned}
P(N_{t+s}^1 - N_s^1 = n) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(\sum_{l=1}^{k} X_l = n)\cdot P(N_t - N_0 = k)\\
&= \sum_{k\geq n} P(\sum_{l=1}^{k} X_l = n)\cdot P(N_t - N_0 = k)\\
&= \sum_{k\geq n} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\\
&= e^{-\lambda t}\frac{p^n}{n!}\sum_{k\geq n}\frac{1}{(k-n)!}(1-p)^{k-n}(\lambda t)^k\\
&= e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Also hat (N^1) die Rate λp. Und wegen $N_t^2 = \sum_{l=1}^{N_t}(1-X_l)$ ist dann auch klar, dass (N^2) die Rate $\lambda(1-p)$ hat.

Nun zur Unabhängigkeit der Prozesse (N^1) und (N^2): Es seien zunächst $0 \leq t_0 \leq$

$t_1 \leq ... \leq t_n$ und $e_0^i, ..., e_n^i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(N_{t_n}^i - N_{t_{n-1}}^i = e_n^i, ..., N_{t_1}^i - N_{t_0}^i = e_1^i, N_{t_0}^i = e_0^i, i = 1, 2) \\
= \; & P\Big(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = e_n^1 + e_n^2, ..., N_{t_1} - N_{t_0} = e_1^1 + e_1^2, N_{t_0} = e_0^1 + e_0^2, \\
& \qquad \sum_{l=e_0^1+e_0^2+...+e_{n-1}^1+e_{n-1}^2+1}^{e_0^1+e_0^2+...+e_n^1+e_n^2} X_l = e_n^1, ..., \sum_{l=1}^{e_0^1+e_0^2} X_l = e_0^1\Big) \\
= \; & e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \frac{\big(\lambda(t_n - t_{n-1})\big)^{e_n^1+e_n^2}}{(e_n^1+e_n^2)!} \cdot ... \cdot e^{-\lambda(t_1-t_0)} \frac{\big(\lambda(t_1-t_0)\big)^{e_1^1+e_1^2}}{(e_1^1+e_1^2)!} \cdot e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^{e_0^1+e_0^2}}{e_0^1!} \\
& \cdot \binom{e_n^1+e_n^2}{e_n^1} p^{e_n^1}(1-p)^{e_n^2} \cdot ... \cdot \binom{e_0^1+e_0^2}{e_0^1} p^{e_0^1}(1-p)^{e_0^2} \\
= \; & e^{-\lambda p t_n} \Big(\frac{\big(\lambda p(t_n - t_{n-1})\big)^{e_n^1}}{e_n^1!} \cdot ... \cdot \frac{(\lambda p t_0)^{e_0^1}}{e_0^1!} \Big) \\
& \cdot e^{-\lambda(1-p)t_n} \Big(\frac{\big(\lambda(1-p)(t_n - t_{n-1})\big)^{e_n^2}}{e_n^2!} \cdot ... \cdot \frac{\big(\lambda(1-p)t_0\big)^{e_0^2}}{e_0^2!} \Big) \\
= \; & \prod_{i=1}^{2} P(N_{t_n}^i - N_{t_{n-1}}^i = e_n^i, ..., N_{t_1}^i - N_{t_0}^i = e_1^i, N_{t_0}^i = e_0^i).
\end{aligned}
$$

Hat man zwei Folgen $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq ... \leq s_n$ und $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$, so kann man zu einer gemeinsamen Verfeinerung übergehen, und durch Zerlegung über die Zustände die Gleichung

$$
\begin{aligned}
& P(N_{t_m}^1 - N_{t_{m-1}}^1 = e_m^1, ..., N_{t_1}^1 - N_{t_0}^1 = e_1^1, N_{t_0}^1 = e_0^1, \\
& \qquad N_{s_n}^2 - N_{s_{n-1}}^2 = e_n^2, ..., N_{s_1}^2 - n_{s_0}^2 = e_1^2, N_{s_0}^2 = e_0^2) \\
= \; & P(N_{t_m}^1 - N_{t_{m-1}}^1 = e_m^1, ..., N_{t_1}^1 - N_{t_0}^1 = e_1^1, N_{t_0}^1 = e_0^1) \cdot \\
& P(N_{s_n}^2 - N_{s_{n-1}}^2 = e_n^2, ..., N_{s_1}^2 - n_{s_0}^2 = e_1^2, N_{s_0}^2 = e_0^2)
\end{aligned}
$$

nachrechnen. Dies zeigt $P(N^1 \in A, N^2 \in B) = P(N^1 \in A)P(N^2 \in B)$, wobei A, B $\cap$-stabile Erzeuger von $\mathcal{B}(D_0)$ durchlaufen und ist äquivalent zur Unabhängigkeit der Prozesse N^1 und N^2.

Aufgabe 21: Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ durch

$$(M_t^\theta)_{t\geq 0}, \quad M_t^\theta := \exp\big(\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)\big) \text{ für alle } t \geq 0,$$

ein Martingal definiert wird.

(b) Skizzieren Sie, wie man mit der Aussage von Teil (a) im Stil von Aufgabe 16 die momenterzeugende Funktion zur Eintrittszeit $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : N_t = r\}$ $(r \in \mathbb{N})$ bestimmen kann.

(c) Finden Sie ein direktes Argument zur Bestimmung der Verteilung von τ_r.

Lösung:

(a) Ist X Poisson-verteilt mit Parameter λ, so ergibt sich als zugehörige momenterzeugende Funktion

$$\varphi(\theta) = Ee^{\theta X} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{\theta k} = \exp\big(\lambda(e^\theta - 1)\big).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} E[M_{t+s}^\theta | \mathcal{F}_t] &= E[\exp\big(\theta(N_{t+s} - N_t) + \theta N_t - \lambda(t+s)(e^\theta - 1)\big)|\mathcal{F}_t] \\ &= \Big(E\exp\big(\theta(N_{t+s} - N_t)\big)\Big) \exp\big(\theta N_t - \lambda(t+s)(e^\theta - 1)\big) \\ &\qquad \text{(da } N_{t+s} - N_t \text{ unabhängig von } \mathcal{F}_t \text{ ist)} \\ &= \exp\big(\lambda s(e^\theta - 1)\big) \exp\big(\theta N_t - \lambda(t+s)(e^\theta - 1)\big) \\ &\qquad \text{(da } N_{t+s} - N_t \text{ Poisson-verteilt mit Parameter } \lambda s \text{ ist)} \\ &= M_t^\theta \end{aligned}$$

für $s, t \geq 0$.

(b) Wir nehmen einfach mal an, dass sich Satz 8.10 der Vorlesung Stochastik II auf Martingale mit Zeitbereich $[0, \infty)$ verallgemeinern lässt (unter bestimmten Annahmen an die Pfade, die hier erfüllt sind, ist dies der Fall). Dann wäre $(M_{\tau_r \wedge t}^\theta)_{t\geq 0}$ ein (für $\theta > 0$ beschränktes) Martingal, also

$$1 = EM_{\tau_r \wedge 0}^\theta = EM_{\tau_r}^\theta = E\exp\big(\theta r - \lambda\tau_r(e^\theta - 1)\big)$$

und damit

$$E\exp\big(-\lambda\tau_r(e^\theta - 1)\big) = e^{-\theta r}.$$

Wähle nun $\theta > 0$ so, dass $\lambda(e^\theta - 1) = -\eta$ gilt. Dann folgt:

$$Ee^{\eta\tau_r} = \Big(\frac{1}{1-\frac{\eta}{\lambda}}\Big)^r = \frac{\lambda^r}{(\lambda-\eta)^r}$$

für $-\infty < \eta < 0$.

(c) Zur Verteilung $\Gamma(r,\lambda)$ gehört die in Teil (b) auf etwas "großzügige" Art zu τ_r erhaltene momenterzeugende Funktion. Direkter:

$$\begin{aligned} P(\tau_r > t) &= P(N_t < r) \text{ (Pfade isoton)} \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \int_t^\infty \frac{(\lambda t)^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda t x}\,dx \text{ (Induktion).} \end{aligned}$$

Oder man argumentiert einfach mit der Tatsache, dass sich

$$\tau_r = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + ... + (\tau_r - \tau_{r-1})$$

als Summe von unabhängigen und identisch $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen darstellen lässt.

Aufgabe 22: Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ, $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werde definiert durch $X_n := N_{nh}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ($h > 0$ fest).

(a) Zeigen Sie, dass X eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten.

(b) Finden Sie ein heuristisches Argument dafür, dass

$$\Big(f(N_t) - \int_0^t (Af)(N_s)\,ds\Big)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist. Hierbei bezeichne A den Operator, der einer Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$Af : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto \lambda\big(f(i+1) - f(i)\big),$$

zuordnet.

(c) Verifizieren Sie die Aussage von Teil (b) für die Funktionen $f(i) = i$ und $f(i) = i^2$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) \\
= \; & \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, ..., X_0 = i_0)}{P(X_n = i_n, ..., X_0 = i_0)} \\
= \; & \frac{P(N_{(n+1)h} = i_{n+1}, N_{nh} = i_n, ..., N_{0h} = i_0)}{P(N_{nh} = i_n, ..., N_{0h} = i_0)} \\
= \; & \frac{P(N_{(k+1)h} - N_{kh} = i_{k+1} - i_k,\ k = 1, ..., n)}{P(N_{(k+1)h} - N_{kh} = i_{k+1} - i_k,\ k = 1, ..., n-1)} \\
= \; & \frac{\prod_{k=1}^{n} P(N_{(k+1)h} - N_{kh} = i_{k+1} - i_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} P(N_{(k+1)h} - N_{kh} = i_{k+1} - i_k)} \\
= \; & P(N_{(n+1)h} - N_{nh} = i_{n+1} - i_n) \\
= \; & e^{-\lambda h}\,\frac{(\lambda h)^{i_{n+1}-i_n}}{(i_{n+1} - i_n)!}, \quad \text{für } i_{n+1} \geq i_n\,(\geq ... \geq i_0 = 0), \\
= \; & P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n),
\end{aligned}$$

also ist X eine homogene Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \begin{cases} e^{-\lambda h}\,\dfrac{(\lambda h)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Übrigens sind bei dieser Kette alle Zustände unwesentlich.)

(b) Aus Teil (a) und Abschnitt 1.5 der Vorlesung folgt, dass mit $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$

$$\Big(f(X_n) - \sum_{k=1}^{n}(P-I)(f)(X_{k-1})\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ein Martingal ist. Was passiert, wenn man zu gegebenem $t > 0$, $h = h_n = \frac{t}{n}$ wählt und $n \to \infty$ gehen lässt? Dann gilt natürlich $f(X_n) = f(N_t)$. Weiter erkennt man bei dem vorhersehbaren Teil des obigen Martingals als Hauptterm eine Riemann-Summe:

$$\begin{aligned} (P-I)(f)(i) &= (e^{-\lambda h}-1)f(i) + e^{-\lambda h}\,\frac{\lambda h}{1!}\,f(i+1) + e^{-\lambda h}\,\frac{\lambda^2 h^2}{2!}f(i+2) + \ldots \\ &\approx \lambda h\big(f(i+1) - f(i)\big), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(P-I)(f)(N_{(k-1)h}) &\approx \lambda h \sum_{k=1}^{n}(\Delta f)(N_{(k-1)h}) \\ &\overset{h\to 0}{\to} \int_0^t (\lambda\Delta)(f)(N_s)\,ds. \end{aligned}$$

(c) Im Falle $f(i) = i$ ist $\Delta f \equiv 1$, also ist zu zeigen, dass $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist:

$$\begin{aligned} E[N_{t+s} - \lambda(t+s)|\mathcal{F}_t] &= E[(N_{t+s} - N_t) + N_t - \lambda(t+s)|\mathcal{F}_t] \\ &= E(N_{t+s} - N_t) + N_t - \lambda(t+s) \\ &= N_t - \lambda t. \end{aligned}$$

(Siehe auch die Lösung zu Aufgabe 21.(a).) Analog wird man im Falle $f(i) = i^2$ unter Verwendung von

$$(\Delta f)(i) = (i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

auf folgende Rechnung geführt:

$$\begin{aligned}
& E[N_{t+h}^2 - \lambda \int_0^{t+h} (2N_s + 1)\, ds | \mathcal{F}_t] \\
= \;& E[(N_{t+h} - N_t + N_t)^2 - 2\lambda \int_0^{t+h} N_s\, ds - \lambda(t+h) | \mathcal{F}_t] \\
= \;& E(N_{t+h} - N_t)^2 + 2N_t E(N_{t+h} - N_t) + N_t^2 \\
& -2\lambda \int_0^t N_s\, ds - 2\lambda E[\int_t^{t+h} N_s\, ds | \mathcal{F}_t] - \lambda(t+h).
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
E[\int_t^{t+h} N_s\, ds | \mathcal{F}_t] &= \int_t^{t+h} E[N_s | \mathcal{F}_t]\, ds \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_t^{t+h} E(N_s - N_t)\, ds + hN_t \\
&= \int_t^{t+h} \lambda(s-t)\, ds + hN_t \\
&= \frac{\lambda h^2}{2} + hN_t
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
& E[N_{t+h}^2 - \lambda \int_0^{t+h} (2N_s + 1)\, ds | \mathcal{F}_t] \\
= \;& h\lambda + h^2\lambda^2 + 2h\lambda N_t + N_t^2 - 2\lambda \int_0^t N_s\, ds - h^2\lambda^2 - 2h\lambda N_t - \lambda(t+h) \\
= \;& N_t^2 - \lambda \int_0^t (2N_s + 1)\, ds.
\end{aligned}$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

6. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 23: Eine Halbgruppe $\{P(t) : t \geq 0\}$ von stochastischen Matrizen $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in E}$ über E heisst *standard*, wenn

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i,j \in E$$

gilt, sie heisst *irreduzibel*, wenn für alle $i,j \in E$ ein $t > 0$ existiert mit $p_{ij}(t) > 0$. Im folgenden sei $\{P(t) : t \geq 0\}$ eine irreduzible Standardhalbgruppe.

(a) Zeigen Sie, dass alle Übergangsfunktionen $t \mapsto p_{ij}(t)$, $i,j \in E$, auf $0 \leq t < \infty$ gleichmäßig stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $h > 0$ die Übergangsmatrix $P(h)$ im Sinne von Abschnitt 1 der Vorlesung irreduzibel und aperiodisch ist.

(c) Der Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$ sei stationär zu $\{P(t) : t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad \text{für alle } i,j \in E$$

gilt.

Lösung:

(a) Für alle $i,j \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= |\sum_{k\in E} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - p_{ij}(t)| \\ &\leq \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) + p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)) \\ &\leq \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) + (1-p_{ii}(h)) \overset{h\to 0}{\to} 0 \end{aligned}$$

mit einer von $t \geq 0$ unabhängigen Konvergenzrate.

(b) (i) Zur Aperiodizität: Zu zeigen ist $d(i) := \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} : \big(P(h)\big)^n|_{ii} > 0\} = 1$. Wegen $\lim_{t\to 0} p_{ii}(t) = 1$ existiert ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \leq t_0$ gilt $p_{ii}(t) > \frac{1}{2}$. Für alle $s \geq 0$ existieren nun ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $t \leq t_0$ mit $s = nt_0 + t$, also

gilt $p_{ii}(s) \geq p_{ii}(t_0)^n p_{ii}(t) > 0$ für alle $s \geq 0$. Insbesondere ist dann natürlich für jedes feste $h > 0$

$$\big(P(h)\big)^n|_{ii} \geq p_{ii}(h)^n > 0.$$

(ii) Zur Irreduzibilität: Seien $h > 0$ und $i, j \in E$. Da $\{P(t) : t \geq 0\}$ irreduzibel ist, gibt es ein $t \geq 0$ mit $p_{ij}(t) > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $nh > t$ und $s := nh - t$. Nach Teil (i) gilt $p_{ii}(s) > 0$, also

$$\big(P(h)\big)^n|_{ij} = P(nh)|_{ij} = P(s+t)|_{ij} \geq p_{ii}(s)p_{ij}(t) > 0.$$

(c) Seien $i, j \in E$, $\varepsilon > 0$. Nach Teil (a) ist die Abbildung $t \mapsto p_{ij}(t)$ gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta > 0 \; \forall h \in [0, \delta) \; \forall t \in [0, \infty) \; : \; |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Teil (b) ist die diskrete Markovkette mit Übergangsmatrix $P(\delta)$ aperiodisch und irreduzibel, so dass auf sie der Hauptgrenzwertsatz für Markovketten angewendet werden kann. Es gilt also:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \big(P(\delta)\big)^n|_{ij} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n\delta).$$

Also:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; |p_{ij}(n\delta) - \pi_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $t \geq n_0\delta$, $t = n\delta + h$ mit $0 \leq h < \delta$. Dann folgt

$$|p_{ij}(t) - \pi_j| \leq |p_{ij}(t) - p_{ij}(n\delta)| + |p_{ij}(n\delta) - \pi_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j.$$

Aufgabe 24: Es sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Zeigen Sie, dass genau dann eine Markov-Kette $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ existiert, in die X im Sinne von

$$X_n = Y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

einbettbar ist, wenn $\alpha > 1/2$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall den Generator zu Y.

Lösung: Nach Beispiel 3.2 der Vorlesung gehören zu einer Markov-Kette $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und Generator

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu > 0.$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

$$p_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Im Falle $\lambda \leq \mu$ gilt $p_{00}(t) > \frac{1}{2}$ für alle $t > 0$, bei $\lambda > \mu$ gilt $p_{11}(t) > \frac{1}{2}$ für alle $t > 0$. Aus

$$p_{00}(1) = \alpha = p_{11}(1)$$

folgt also $\alpha > \frac{1}{2}$.

Hat man umgekehrt $\alpha > \frac{1}{2}$, so erhält man mit $\lambda := \mu := -\frac{1}{2}\log(2\alpha - 1)$, dass $p_{00}(1) = p_{11}(1) = \alpha$ (und damit die Gleichheit der Übergangsmatrizen) gilt. Besser:

Aus

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \alpha,$$

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \alpha$$

folgt (durch Addition)

$$e^{-(\lambda+\mu)} + 1 = 2\alpha,$$

also $\lambda + \mu = -\log(2\alpha - 1)$. Einsetzen, subtrahieren und verwenden von $2\alpha - 1 < 1$ liefert dasselbe Ergebnis (und zusätzlich sogar die Eindeutigkeit von λ und μ).

Aufgabe 25: Wie in Beispiel 3.2 der Vorlesung sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und Generator

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Verwenden Sie die Formel $P(t) = \exp(tG)$ für eine alternative Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeiten.
(Hinweis: Finden Sie zunächst eine Darstellung $G = ADA^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D.)

Lösung: Mit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt die Darstellung aus dem Hinweis, und man erhält

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n \\ &= A\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n\Big) A^{-1} \\ &= A \begin{pmatrix} \exp\big(-t(\lambda+\mu)\big) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{pmatrix} \lambda \exp\big(-t(\lambda+\mu)\big) + \mu & -\lambda \exp\big(-t(\lambda+\mu)\big) + \lambda \\ -\mu \exp\big(-t(\lambda+\mu)\big) + \mu & \mu \exp\big(-t(\lambda+\mu)\big) + \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem in der Vorlesung über die Vorwärtsgleichungen erhaltenen Resultat.

Aufgabe 26: Es seien $T = [0,1]$ oder $T = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}(T)$ die Menge der stetigen Funktionen auf T und $\mathcal{B}^T$ die von den Projektionen erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^T$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{C}(T) \notin \mathcal{B}^T \ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß zu jedem $A \in \mathcal{B}^T$ eine abzählbare Menge $S(A) \subset T$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in A$ gilt:

$$x(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \in S(A) \Rightarrow x \in A \ .$$

Lösung: Wir zeigen zunächst den Hinweis. Es seien $\Omega := \mathbb{R}^T$, $\mathcal{B}^T := \sigma(\pi_t \,|\, t \in T)$, $\pi_t(\omega) := \omega(t)$. Weiter sei

$$\mathcal{B}_*^T := \big\{ A \subset \mathbb{R}^T \,|\, \exists \,\text{abz. } S(A) \subset T \, \forall x \in \mathbb{R}^T \, \forall y \in A \,:\, (x(t) = y(t) \, \forall t \in S(A) \Rightarrow x \in A) \big\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}_*^T$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{B}^T$ umfasst.

(i) $\mathbb{R}^T \in \mathcal{B}_*^T$ trivialerweise (klappt mit allen abzählbaren Mengen $S(A) \subset T$).

(ii) Sei $A \in \mathcal{B}_*^T$, d.h. es existiert eine abzählbare Menge $S(A) \subset T$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in A$ aus $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S(A)$ folgt $x \in A$. Wähle nun $S(A^c) = S(A)$. Ist dann $x \in \mathbb{R}^T$, so folgt für jedes $y \in A^c$ aus $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S(A) = S(A^c)$ die Aussage $x \in A^c$. Denn sonst wäre $x \in A$, was sofort auf $y \in A$ führen würde (Widerspruch).

(iii) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{B}_*^T$. Dazu existiert eine Folge von abzählbaren Mengen $S(A_i) \subset T$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in A_i$ aus $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S(A_i)$ die Aussage $x \in A_i$ folgt. Setze nun $T := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S(A_i)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$: ist $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S(A)$, so existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_i$, also $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Weiter ist offenbar $\mathcal{E} := \{\pi_t^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}, t \in T\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^T$. Wählt man nun $S(\pi_t^{-1}(B)) = \{t\}$, so erhält man $\pi_t^{-1}(B) \in \mathcal{B}_*^T$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Denn sind $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in \pi_t^{-1}(B)$ und gilt $x(t) = y(t)$, so ist offenbar auch $x \in \pi_t^{-1}(B)$. Damit folgt dann $\mathcal{B}^T = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}_*^T$.

Wir wollen nun natürlich zeigen, dass $\mathcal{C}(T) \notin \mathcal{B}_*^T$ ist, denn dann folgt sofort auch $\mathcal{C}(T) \notin \mathcal{B}^T$. Angenommen $\mathcal{C}(T) \in \mathcal{B}_*^T$. Dann existiert eine abzählbare Menge $S(\mathcal{C}(T)) \subset T$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in \mathcal{C}(T)$ aus $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S(\mathcal{C}(T))$ folgt $x \in \mathcal{C}(T)$. Eine solche Menge $S(\mathcal{C}(T))$ kann aber nicht existieren, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Wir betrachten die Funktion $y \equiv 0 \in \mathcal{C}(T)$. Sei $t_0 \in T \setminus S(\mathcal{C}(T))$ (existiert, da $S(\mathcal{C}(T))$ abzählbar). Setze

$$x(t) := \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ 1, & t = t_0. \end{cases}$$

x ist natürlich nicht stetig, also $x \notin \mathcal{C}(T)$, aber für alle $t \in S(\mathcal{C}(T))$ gilt $x(t) = y(t)$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

7. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 27: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine zugehörige Filtration. Es sei $\mathcal{N}$ das System der P-Nullmengen von $\mathcal{A}$ und $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\tilde{\mathcal{F}}_t \;:=\; \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t)$$

die um $\mathcal{N}$ erweiterte Filtration.

(a) Zeigen Sie, dass mit $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auch $(B_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Zeigen Sie, dass mit $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auch $(X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass zu jedem $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ ein $F \in \mathcal{F}_t$ existiert mit $\tilde{F} \triangle F \in \mathcal{N}$.

Lösung: Auch hier zeigen wir zunächst den Hinweis, also, dass zu jedem $\tilde{F} \in \tilde{F}_t$ ein $F \in \mathcal{F}_t$ existiert mit $\tilde{F} \triangle F \in \mathcal{N}$. Dies sieht man wie folgt: Definiere

$$\tilde{\mathcal{G}}_t := \{G \in \tilde{\mathcal{F}}_t \,|\, \exists F \in \mathcal{F}_t \,:\, F \triangle G \in \mathcal{N}\}.$$

Dies ist eine σ-Algebra, die $\tilde{\mathcal{F}}_t$ umfasst.

(i) $\Omega \in \tilde{\mathcal{F}}_t$, $\Omega \in \mathcal{F}_t$ und $\Omega \triangle \Omega = \emptyset \in \mathcal{N}$, also $\Omega \in \tilde{\mathcal{G}}_t$.

(ii) Sei $G \in \tilde{\mathcal{G}}_t$, d.h. $G \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ und es existiert ein $F \in \mathcal{F}_t$ mit $F \triangle G \in \mathcal{N}$. Dann ist auch $F^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_t$ und es gilt $G^{\mathrm{c}} \triangle F^{\mathrm{c}} = (G^{\mathrm{c}} \cap F) \cup (G \cap F^{\mathrm{c}}) = G \triangle F \in \mathcal{N}$; also $G^{\mathrm{c}} \in \tilde{\mathcal{G}}_t$.

(iii) Sei $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\tilde{\mathcal{G}}_t$, d.h. $G_i \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und es existiert eine Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in$\mathcal{F}_t$ mit $F_i \triangle G_i \in \mathcal{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann sind auch $\bigcup_i G_i \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ und $\bigcup_j F_j \in \mathcal{F}_t$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\bigcup_i G_i \triangle \bigcup_j F_j \;&=\; \Big(\bigcup_i G_i \cap \bigcap_j F_j^{\mathrm{c}}\Big) \cup \Big(\bigcap_i G_i^{\mathrm{c}} \cap \bigcup_j F_j\Big) \\
&\subset\; \Big(\bigcup_i G_i \cap F_i^{\mathrm{c}}\Big) \cup \Big(\bigcup_i F_i \cap G_i^{\mathrm{c}}\Big) \\
&=\; \bigcup_i G_i \triangle F_i \in \mathcal{N}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

(1) $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$, denn für jedes $N \in \mathcal{N}$ gilt per Definition $N \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ und außerdem ist $\emptyset \in \mathcal{F}_t$ und $N \triangle \emptyset = N \in \mathcal{N}$, also $N \in \tilde{\mathcal{G}}_t$.

(2) $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$, denn wiederum gilt für jedes $F \in \mathcal{F}_t$ per Definition $F \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ und außerdem $F \triangle F = \emptyset \in \mathcal{N}$, also $F \in \tilde{\mathcal{G}}_t$.

Damit sind also $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ und $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ und somit auch $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t) \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$.

Mit dieser Hilfsaussage können wir uns nun an den Beweis der Aufgabe machen.

(a) Sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein Brownsche Bewegung. Zu zeigen: Auch $(B_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ist ein Brownsche Bewegung. Dazu ist zu zeigen, dass $(B_t)_{t\geq 0}$ zu $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert ist, was aber trivial ist, da wir ja die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ beim Übergang zu $\tilde{\mathcal{F}}_t$ vergrößert haben. An den ersten beiden Eigenschaften einer Brownschen Bewegung ändert sich nichts, ebenso an der Verteilung von $B_{t+s} - B_t$ für alle $s, t \geq 0$. Bleibt als letztes zu zeigen: Für alle $s, t \geq 0$ ist $B_{t+s} - B_t$ unabhängig von $\tilde{\mathcal{F}}_t$. Seien dazu $A \in \mathcal{B}$, $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ und $F \in \mathcal{F}_t$ mit $\tilde{F} \triangle F \in \mathcal{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P\big((B_{t+s} - B_t) \in A, \tilde{F}\big) &= P\big((B_{t+s} - B_t) \in A, \tilde{F} \cup (\tilde{F} \triangle F)\big) \\ &= P\big((B_{t+s} - B_t) \in A, F \cup (\tilde{F} \triangle F)\big) \\ &= P\big((B_{t+s} - B_t) \in A, F\big) \\ &= P\big((B_{t+s} - B_t) \in A\big) \cdot P\big(F\big) \\ &= \ldots = P\big((B_{t+s} - B_t) \in A\big) \cdot P\big(\tilde{F}\big). \end{aligned}$$

(b) Sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal. Zu zeigen: Auch $(X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal. Die Adaptiertheit ist wieder klar. Bleibt noch zu zeigen:

$$E[X_{t+s} \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t] = X_t \;\text{ für alle } t, s \geq 0.$$

Für jedes $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ existiert ein $F \in \mathcal{F}_t$ mit $\tilde{F} \triangle F \in \mathcal{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} X_{t+s}\, dP &= \int_{\tilde{F}\cup(\tilde{F}\triangle F)} X_{t+s}\, dP = \int_{F\cup(\tilde{F}\triangle F)} X_{t+s}\, dP \\ &= \int_F X_{t+s}\, dP = \int_F X_t\, dP = \ldots = \int_{\tilde{F}} X_t\, dP. \end{aligned}$$

Es gibt die Möglichkeit, diese Aufgabe sogar noch allgemeiner zu stellen, indem man nicht die Menge $\mathcal{N}$ aller P-Nullmengen von $\mathcal{A}$ betrachtet, sondern die Menge $\tilde{\mathcal{N}}$ aller Teilmengen von P-Nullmengen von $\mathcal{A}$,

$$\tilde{\mathcal{N}} := \{\tilde{N} \subset \Omega \,|\, \exists N \in \mathcal{A} : \tilde{N} \subset N, P(N) = 0\}.$$

Man definiert dann eine neue σ-Algebra $\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\tilde{\mathcal{N}} \cup \mathcal{A})$. Dann ist wieder $\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\tilde{\mathcal{N}} \cup \mathcal{F}_t)$ eine Filtration, und sowohl für $\tilde{\mathcal{A}}$ als auch für jedes $\tilde{\mathcal{F}}_t$ gilt die Eigenschaft: Ist $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}}$ (bzw. $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$), so existiert ein $A \in \mathcal{A}$ (bzw. ein $F \in \mathcal{F}_t$) mit $\tilde{A} \triangle A \in \tilde{\mathcal{N}}$ (bzw. $\tilde{F} \triangle F \in \tilde{\mathcal{N}}$). Der Beweis ist analog zu oben. Nun setzt man P auf $\tilde{\mathcal{A}}$ fort durch $\tilde{P}(\tilde{A}) := P(A)$, falls $A \in \mathcal{A}$ mit $\tilde{A} \triangle A \in \tilde{\mathcal{N}}$, und beweist dann alle weiteren Aussagen ganz analog in diesem neuen Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 28: Es seien $X = (X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $Y = (Y_t)_{t\in T}$ ein Prozess auf $(\Omega', \mathcal{A}', P')$. Die Prozesse X und Y heißen *äquivalent*, wenn sie dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen haben. Im Falle $(\Omega', \mathcal{A}', P') = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Y eine *Modifikation* von X, wenn $P(X_t = Y_t) = 1$ gilt für alle $t \in T$; X und Y heißen *ununterscheidbar*, wenn es eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \in T$ und für alle $\omega \in \Omega\backslash N$. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten zwischen diesen Begriffen. Geben Sie insbesondere ein Beispiel für äquivalente, auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definierte Prozesse an, die nicht Modifikationen voneinander sind.

Lösung: Wir zeigen folgende Implikationen ($\rightarrow$), Implikationen unter Zusatzvoraussetzungen ($(\rightarrow)$) bzw. Gegenbeispiele ($\not\rightarrow$)

$$\text{äquivalent} \underset{(v)}{\overset{(iv)}{\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}}} \text{Modifikation} \underset{(iii)}{\overset{(i)}{\underset{(\longrightarrow)}{\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}}}} \text{ununterscheidbar}$$

(i) Seien X, Y ununterscheidbar, d.h. es existiert eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \in T$, $\omega \in \Omega \setminus N$. Dann gilt für alle $t \in T$:

$$P(X_t = Y_t) \geq P(\Omega \setminus N) = 1,$$

also sind X und Y Modifikationen voneinander.

(ii) Gegenbeispiel: Seien $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}_{[0,1]}$, $P := \ell_{[0,1]}$, $T := [0,1]$, $X_t(\omega) := \omega$, $t, \omega \in [0,1]$ und

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} X_t(\omega), & \omega \neq t, \\ 0, & \omega = t. \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in T$, aber

$$\{\omega \in [0,1] \,|\, \exists t \in T \,:\, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = (0,1]$$

ist keine Nullmenge, also sind die Prozesse nicht ununterscheidbar.

(iii) Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass T abzählbar ist. Es seien X und Y Modifikationen voneinander, d.h. es gilt $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in T$. Setzt man nun $N := \bigcup_{t\in T}\{X_t \neq Y_t\}$, so ist N eine Nullmenge mit $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \in T$, $\omega \in \Omega \setminus N$, also sind X und Y ununterscheidbar.

(iv) Es seien X und Y Modifikationen voneinander, d.h. es gilt $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in T$. Sei $\vec{t} := (t_1, ..., t_n) \in T^n$ und $\vec{X}_{\vec{t}} := (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$, sowie $\vec{Y}_{\vec{t}} := (Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$. Dann gilt für alle Mengen $A \in \mathcal{B}^n$:

$$P(\vec{X}_{\vec{t}} \in A) = P(\vec{X}_{\vec{t}} \in A, \vec{X}_{\vec{t}} = \vec{Y}_{\vec{t}}) = P(\vec{Y}_{\vec{t}} \in A, \vec{X}_{\vec{t}} = \vec{Y}_{\vec{t}}) = P(\vec{Y}_{\vec{t}} \in A),$$

da $P(\vec{X}_{\vec{t}} = \vec{Y}_{\vec{t}}) = 1$. Also haben X und Y dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen, sind also äquivalent.

(v) Gegenbeispiel: Seien $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) := \#A/2$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $T = \{0\}$, $X_0(\omega) := \omega$, $Y_0(\omega) := 1 - \omega$. Dann sind X_0 und Y_0 beide gleichverteilt auf $\{0, 1\}$, mithin X und Y äquivalent. Aber:

$$P(X_0 = Y_0) = P(\{\omega \in \Omega : \omega = 1 - \omega\}) = P(\emptyset) = 0 \neq 1,$$

also sind X und Y nicht Modifikationen voneinander.

Ähnliches Beispiel mit überabzählbarer Zeitmenge: $X_t = B_t$, $Y_t = -B_t$, dann sind X_t und Y_t äquivalent, aber

$$P(X_t = Y_t) = P(B_t = 0) = 0$$

für alle $t > 0$.

Aufgabe 29:

(a) Es sei $(B_t)_{0\le t\le 1}$ eine Brownsche Bewegung mit Zeitbereich $[0,1]$. Zeigen Sie: Der durch

$$X_t := (1+t)B_{t/(1+t)} - tB_1$$

definierte Prozess $(X_t)_{t\ge 0}$ ist eine Brownsche Bewegung mit Zeitmenge $[0,\infty)$.

(b) Es seien $a \ge 0$, $c \neq 0$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass mit $(B_t)_{t\ge 0}$ auch die wie folgt definierten Prozesse $(\tilde{B}_t)_{t\ge 0}$ Brownsche Bewegungen sind:

(i) $\tilde{B}_t := -B_t,\ \forall t \ge 0$, (ii) $\tilde{B}_t := B_{a+t} - B_a,\ \forall t \ge 0$, (iii) $\tilde{B}_t := cB_{t/c^2},\ \forall t \ge 0$.

Lösung:

(a) Offensichtlich ist $(X_t)_{t\ge 0}$ ein Gauß-Prozess mit stetigen Pfaden und Start in 0. Es genügt also, die Kovarianzfunktion nachzurechnen. Sei $0 \le s < t$, damit auch $s/(1+s) < t/(1+t)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_s, X_t) &= (1+t)(1+s)\operatorname{cov}\big(B(\tfrac{t}{1+t}), B(\tfrac{s}{1+s})\big) + st\operatorname{cov}\big(B(1),B(1)\big)\\ &\quad - s(1+t)\operatorname{cov}\big(B(\tfrac{t}{1+t}),B(1)\big) - t(1+s)\operatorname{cov}\big(B(\tfrac{s}{1+s}),B(1)\big)\\ &= (1+t)s + st - st - st\\ &= s = s\wedge t.\end{aligned}$$

(b) Wir überprüfen jeweils die Eigenschaften einer Brownschen Bewegung

(i) $\tilde{B}_t := -B_t$, $t \ge 0$. Messbarkeit ist trivial. $P(\tilde{B}_0 = 0) = P(B_0 = 0) = 1$. Natürlich hat mit $(B_t)_{t\ge 0}$ auch $(\tilde{B}_t)_{t\ge 0}$ f.s. stetig Pfade. Schließlich gilt für $t > s \ge 0$: $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = -(B_t - B_s)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und $\mathrm{N}(0, t-s)$-verteilt.

(ii) $\tilde{B}_t := B_{a+t} - B_a$, $t, a \ge 0$. Dieser Prozess ist trivialerweise messbar bzgl. der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\ge 0}$ mit $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t+a}$. Es gilt $P(\tilde{B}_0 = 0) = P(B_a = B_a) = 1$. Natürlich hat mit $(B_t)_{t\ge 0}$ auch $(B_{a+t} - B_a)_{t\ge 0}$ f.s. stetige Pfade. Schließlich gilt für $t > s \ge 0$: $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = B_{a+t} - B_{a+s}$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{a+s} = \tilde{\mathcal{F}}_s$ und $\mathrm{N}(0, (a+t) - (a+s)) = \mathrm{N}(0, t-s)$-verteilt.

(iii) $\tilde{B}_t := cB_{t/c^2}$, $t \ge 0$, $c \neq 0$. Dieser Prozess ist trivialerweise messbar bzgl. der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\ge 0}$ mit $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{t/c^2}$. Es gilt $P(\tilde{B}_0 = 0) = P(cB_0 = 0) = 1$. Natürlich hat mit $(B_t) - t \ge 0$ auch $(cB_{t/c^2})_{t\ge 0}$ f.s. stetige Pfade. Schließlich gilt für $t > s \ge 0$: $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = c(B_{t/c^2} - B_{s/c^2})$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{s/c^2} = \tilde{\mathcal{F}}_s$ und $\mathrm{N}(0, c^2(t-s)/c^2) = N(0, t-s)$-verteilt.

Aufgabe 30: Es sei $(g_{nk})_{(n,k)\in S}$ die im Beweis zu Satz 4.5 verwendete Haar-Basis von $L^2([0,1])$.

(a) Die Funktion $f \in L^2([0,1])$ habe die Eigenschaft

$$\langle f, g_{nk}\rangle = 0 \text{ für alle } (n,k) \in S.$$

Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall gilt.

(b) In welcher Beziehung steht Teil (a) zu der in Gleichung (1) des Beweises verwendeten Formel

$$f = \sum_{(n,k)\in S} \langle f, g_{nk}\rangle g_{nk} \text{ für alle } f \in L^2([0,1])?$$

Hinweis zu Teil (a): Betrachten Sie die Werte der Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^t f(s)\,ds$, in den Punkten $k2^{-n}$, $(n,k) \in S$.

Lösung:

(a) Betrachte die stetige Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^t f(s)\,ds$. Da $f \perp g_{01} \equiv 1$, folgt $F(0) = F(1) = 0$. Da $f \perp g_{11}$, folgt $\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$, also mit dem zuvor Gezeigten $F(1/2) = 0$. Aus $f \perp g_{12}, g_{32}$ folgt dann $F(1/4) = F(3/4) = 0$ und induktiv $F(t) = 0$ in den Punkten $t = k2^{-n}$, $(n,k) \in S$. Nun ist F aber stetig, also $F \equiv 0$ und damit $f = F' = 0$ fast überall.

(b) Es gilt für alle $(i,j) \in S$:

$$\begin{aligned} & \Big\langle f - \sum_{(n,k)\in S} \langle f, g_{nk}\rangle g_{nk}, g_{ij} \Big\rangle \\ = \; & \langle f, g_{ij}\rangle - \sum_{(n,k)\in S} \langle f, g_{nk}\rangle \underbrace{\langle g_{nk}, g_{ij}\rangle}_{\delta_{(n,k)(i,j)}} \\ = \; & \langle f, g_{ij}\rangle - \langle f, g_{ij}\rangle \;=\; 0, \end{aligned}$$

also mit Teil (a) die gewünschte Gleichheit.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

8. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 31: (Wiener/Paley-Zugang zur Brownschen Bewegung)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine iid-Folge standardnormalverteilter Zufallsvariablen. Man betrachte die Fourier-Reihe

$$B_t := \frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0 + \sum_{n\geq 1}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kt}{k}X_k\ .$$

Man kann zeigen (hier nicht!), dass diese Reihe mit Wahrscheinlichkeit 1 gleichmäßig auf $[0,\pi]$ konvergiert. Man zeige, dass $(B_t)_{t\in[0,\pi]}$ bzgl. der natürlichen Filtration eine Brownsche Bewegung ist.
Hinweis: Man zeige, dass B_t ein Gauss-Prozess ist und berechne Erwartungswert- und Kovarianzfunktion.

Lösung: Es sei

$$B_t^N := \frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0 + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kt}{k}X_k.$$

B_t^N hat für jedes $N\in\mathbb{N}$ stetige Pfade (sin ist stetige Funktion). Die Folge der B_t^N, $N\in\mathbb{N}$, konvergiert gleichmäßig gegen B_t f.s. auf $[0,\pi]$ (siehe auch unten), also hat die Limesfunktion f.s. stetige Pfade.

Es seien nun $\vec{t} := (t_1,...,t_n)$, $\vec{s}_k := (\sin kt_1,...,\sin kt_n)$, $t_1,...,t_n\in[0,\pi]$, $n\in\mathbb{N}$. Offenbar ist B_t^N als Linearkombination von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt für alle $t\in[0,\pi]$. Dann ist

$$B_{\vec{t}}^N := \frac{X_0}{\sqrt{\pi}}\vec{t} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{X_k}{k}\vec{s}_k$$

ein n-dimensional normalverteilter Zufallsvektor. Welchen Wert haben Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix?

$$E(B_{\vec{t}}^N) = \vec{0},$$

weil $EX_k = 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt. Sei $\Sigma^N := (\Sigma_{ij}^N)_{i,j=1,...,N}$ mit $\Sigma_{ij}^N := \operatorname{cov}(B_{t_i}^N, B_{t_j}^N)$, $i,j = 1,...,n$. Dann gilt

$$\Sigma_{ij}^N = E(B_{t_i}^N B_{t_j}^N) = \frac{t_i t_j}{\pi}\underbrace{EX_0^2}_{=1} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{2}{\pi k^2}\sin(kt_i)\sin(kt_j)\underbrace{EX_k^2}_{=1}.$$

Offenbar gilt $EB_{\tilde{t}}^N \to 0$ mit $N \to \infty$. Können wir nun noch zeigen, dass $\Sigma^N \to \Sigma$, mit $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{ij=1,...,n}$, $\Sigma_{ij} = t_i \wedge t_j$, $i, j = 1, ..., n$, gilt, so folgt aus der Konvergenz der ersten beiden (mehrdimensionalen) Momente, dass auch $B_{\tilde{t}}$ mehrdimensional normalverteilt ist und den „richtigen“ Erwartungswertvektor und die „richtige“ Kovarianzmatrix besitzt.

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \Sigma_{ij}^N &= \frac{t_i t_j}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} \sin(kt_i) \sin(kt_j) \\ &= \frac{t_i t_j}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \big[\cos(k(\underbrace{t_i - t_j}_{\in[-\pi,\pi]})) - \cos(k(\underbrace{t_i + t_j}_{\in[0,2\pi]})) \big].\end{aligned}$$

Lt. Bronstein, 22. Auflage, 1985, Kap. 4.4.1.2, Tabelle 4.3, Formel 26 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \Sigma_{ij}^N &= \frac{t_i t_j}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\frac{3(t_i - t_j)^2 - 6\pi|t_i - t_j| + 2\pi^2}{12} - \frac{3(t_i + t_j)^2 - 6\pi(t_i + t_j) + 2\pi^2}{12} \Big] \\ &= \frac{t_i t_j}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \Big[\frac{-12 t_i t_j + 6\pi\big((t_i + t_j) - |t_i - t_j|\big)}{12} \Big] \\ &= \frac{1}{2}\big((t_i + t_j) - |t_i - t_j|\big) \;=\; t_i \wedge t_j.\end{aligned}$$

Oder alternativ:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \Sigma_{ij}^N &= \frac{t_i t_j}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} \sin(kt_i) \sin(kt_j) \\ &= \int_0^{\pi} 1_{[0,t_i]}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, dx \int_0^{\pi} 1_{[0,t_j]}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} 1_{[0,t_i]}(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx\, dx \int_0^{\pi} 1_{[0,t_j]}(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx\, dx.\end{aligned}$$

Nun ist $\sqrt{1/\pi}$, $\sqrt{2/\pi}\cos(k\,\cdot)$, $k = 1, 2, ...$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $\mathrm{L}^2([0,\pi])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} fg\, dx$. Man kann also die Parsevalsche Gleichung (vgl. Beweis zu Satz 3.5) verwenden und erhält:

$$\lim_{N\to\infty} \Sigma_{ij}^N = \int_0^{\pi} 1_{[0,t_i]}(x) 1_{[0,t_j]}(x)\, dx = t_i \wedge t_j.$$

Parsevalsche Gleichung: Sind $f, g \in \mathrm{L}^2([0,\pi])$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx), \\ g(x) &= b_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx), \end{aligned}$$

so gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k.$$

Zusätzlich sei hier auch noch auf die gleichmäßige Konvergenz eingegangen (Quelle: Ito/McKean: Diffusion processes and their sample paths, p.21): Man definiere

$$S_{m,n}(t) := \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\sin kt}{k} X_k, \;\; T_{m,n} := \max_{0 \le t \le \pi} |S_{m,n}(t)|.$$

Es gilt mit $|\operatorname{Im}(z)|^2 \le |z|^2$

$$T_{m,n}^2 \le \max_{0 \le t \le \pi} \left| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{e^{ikt}}{k} X_k \right|^2 \le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{X_k^2}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{X_j X_{j+l}}{j(j+l)} \right|,$$

also

$$\begin{aligned} (ET_{m,n})^2 &\le E(T_{m,n})^2 \le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(E \left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{X_j X_{j+l}}{j(j+l)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ da } \sqrt{E|X|^2} \ge E|X|, \\ &\le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(\sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{1}{j^2 (j+l)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m) \left(\frac{n-m}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

insbesondere $E(T_{m,2m}) \le \sqrt{3} m^{-1/4}$ und damit

$$E\left(\sum_{n \ge 1} T_{2^{n-1}, 2^n} \right) \le \sum_{n \ge 1} E T_{2^{n-1}, 2^n} < \infty, \;\; \text{monotone Konvergenz,}$$

also

$$P\left(\sum_{n \ge 1} T_{2^{n-1}, 2^n} < \infty \right) = 1.$$

Dies zeigt die fast sichere gleichmäßige Konvergenz der Reihe B_t auf $[0, \pi]$.

Aufgabe 32: Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, daß für alle $\gamma > 1/2$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\gamma} B_t = 0 \quad \text{fast sicher}$$

gilt, und daß diese Aussage mit $\gamma = 1/2$ nicht gilt. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß fast alle Pfade der Brownschen Bewegung in $t = 0$ nicht Lipschitz-stetig sind.

Lösung: Es sei $\gamma > 1/2$: setzen wir $s = 1/t$, so entspricht die Grenzwertbetrachtung $t^{-\gamma} B_t$ für $t \to \infty$ einer Betrachtung von $s^{1-\gamma} B_s$ für $s \downarrow 0$, da mit B_t auch $1/tB_t$ eine Brownsche Bewegung ist. Aus der Stetigkeit von oben folgt

$$P(\lim_{s\downarrow 0} |s^{1-\gamma} B_s| = 0) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{m\in\mathbb{N}} \sup_{0<s\leq 1/m} |s^{1-\gamma} B_s| \leq 1/n).$$

Wir zeigen

$$P(\cap_{m\in\mathbb{N}} \sup_{0<s\leq 1/m} |s^{1-\gamma} B_s| > 1/n) = 0.$$

Aus der Stetigkeit von oben (zweimal angewendet, beim zweiten Mal unter Ausnutzung der Stetigkeit der Pfade) folgt

$$\begin{aligned}
P(\cap_{m\in\mathbb{N}} \sup_{0<s\leq 1/m} |s^{1-\gamma} B_s| > 1/n) &= \lim_{m\to\infty} P(\sup_{0<s\leq 1/m} |s^{1-\gamma} B_s| > 1/n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{j\to\infty} P(\max_{0<k\leq 2^j} (k/(2^j m))^{\gamma-1} |B_{k/(2^j m)}| > 1/n) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{2^j} P((k/(2^j m))^{\gamma-1} |B_{k/(2^j m)}| > 1/n) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \lim_{j\to\infty} 2 \sum_{k=1}^{2^j} (1 - \Phi\left(1/n \left(\frac{m2^j}{k}\right)^{\gamma-1/2}\right)) \\
&\overset{(*)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \lim_{j\to\infty} 2n \sum_{k=1}^{2^j} \phi\left(1/n \left(\frac{m2^j}{k}\right)^{\gamma-1/2}\right) \left(\frac{k}{m2^j}\right)^{\gamma-1/2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(1/m)^{\gamma-1/2}} \exp\Big(-\frac{s^2}{2n^2}\Big) ds \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

$(*)$ ist die Ungleichung $1 - \Phi(x) \leq \phi(x)/x$ für $x > 0$, die durch partielle Integration bewiesen werden kann. Dies zeigt die Behauptung für $\gamma > 1/2$.

Für $\gamma = 1/2$ gilt $t^{-\gamma} B_t \sim N(0,1)$, also konvergiert $t^{-\gamma} B_t$ trivialerweise gegen eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable in Verteilung.

Angenommen, (B_t) ist eine in 0 Lipschitz-stetige Modifikation, also

$$\forall\omega \in \Omega \exists K > 0, \delta > 0 \forall 0 \leq t < \delta \qquad |B_t(\omega)| \leq Kt \,.$$

Bekanntlich ist auch $\tilde{B}_t = tB_{1/t}$ eine Brownsche Bewegung. Es folgt

$$\forall \omega \in \Omega \exists K > 0, \delta > 0 \forall t > \delta \qquad |\tilde{B}_t(\omega)| \leq K \ .$$

Und damit die Beschränktheit der Pfade. Dies hätte zur Folge, daß

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1/2} \tilde{B}_t = 0 \qquad P\text{-fs} \ ,$$

ein Widerspruch.

Aufgabe 33: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ der Pfad von ω auf keinem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ mit $a < b$ monoton ist.

Lösung: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ mit $a < b$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$A^+ := \{\omega \in \Omega \,:\, t \mapsto B_t(\omega) \text{ ist monoton wachsend auf } [a, b]\} \subset A_n^+$$

mit

$$A_n^+ := \Big\{\omega \in \Omega \,:\, B\Big(a + \frac{i(b-a)}{n}, \omega\Big) - B\Big(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}, \omega\Big) \geq 0,\ i = 1, ..., n\Big\}.$$

Die Zuwächse sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0, also folgt $P(A_n^+) = 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $P(A^+) = 0$. Analog ergibt sich $P(A^-) = 0$ für $A^- := \{\omega \in \Omega \,:\, t \mapsto B_t(\omega)$ ist monoton fallend auf $[a, b]\}$. Für jedes feste Intervall $[a, b]$ ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B auf diesem Intervall monoton wächst oder monoton fällt gleich 0. Ist nun B monoton wachsend oder monoton fallend auf irgendeinem solchen Intervall $[a, b]$, dann auch auf einem mit rationalen Endpunkten (jedes $[q, r]$, $q, r \in \mathbb{Q}$, mit $a \leq q < r \leq b$ tut's). Von diesen gibt es nur abzählbar viele, als Vereinigung der zugehörigen Ausnahmenullmengen erhält man die gesuchte Nullmenge.

Aufgabe 34: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die quadratische Totalvariation der Brownschen Bewegung auf $[0,t]$ entlang einer deterministischen Folge $(\{t_{n,0},...,t_{n,k_n}\})_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen von $[0,t]$ mit gegen 0 konvergierender Weite mit $n\to\infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen t strebt. Zeigen Sie, dass man bei der Partition

$$t_{n,j} := \frac{j}{2^n}\,t,\quad n\in\mathbb{N},\, j=0,...,k_n := 2^n,$$

sogar fast sichere Konvergenz hat.
Hinweis: Aus Aufgabe 37 zur Stochastik II ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

als hinreichende Bedingung für $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ bekannt.

Lösung: Wie im Beweis zu Satz 3.8 der Vorlesung sei Z_n die Summe der quadrierten Zuwächse der n-ten Partition:

$$Z_n := \sum_{j=1}^{k_n} \left(B_{t_{n,j}} - B_{t_{n,j-1}}\right)^2.$$

Man erhält

$$E(Z_n - t) = 0$$

und wie im oben genannten Beweis

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Z_n - t) &= E(Z_n - t)^2 = \sum_{j=1}^{k_n} E\Big(\left(B_{t_{n,j}} - B_{t_{n,j-1}}\right)^2 - \left(t_{n,j} - t_{n,j-1}\right)\Big)^2 \\ &= 2\sum_{j=1}^{k_n}\left(t_{n,j} - t_{n,j-1}\right)^2 = 2\sum_{j=1}^{2^n}(2^{-n}t)^2 = t^2 2^{1-n}.\end{aligned}$$

Die Chebyshevsche Ungleichung liefert nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Z_n - t| > \varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\, t^2 2^{1-n} < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

9. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 35: Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Start in 0.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit

$$X_t \;:=\; \exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 t/2\right)$$

ein Martingal mit stetigen Pfaden ist.

(b) Für alle $t \geq 0$ sei $M_t := \sup_{0\leq s\leq t}\; B_s$. Zeigen Sie:

$$P(M_t \geq z) \;\leq\; \exp\left(-z^2/(2t)\right) \qquad \text{für alle } z, t \geq 0.$$

(c) Es sei $T_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$; aus der Vorlesung ist $P(T_a < \infty) = 1$ bekannt. Zeigen Sie, dass für alle $a \neq 0$

$$\liminf_{t\to\infty}\; t\,P(T_a > t) \;>\; 0$$

und damit $ET_a = \infty$ gilt.

Lösung:

(a) Die Stetigkeit der Pfade (f.s.) ist klar. Bleibt die Martingaleigenschaft zu überprüfen. Seien $t > s \geq 0$, $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
E[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= E\big[\exp\big(\alpha B_t - \alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \,|\, \mathcal{F}_s\big] \\
&= \exp\big(-\alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \cdot E\big[\exp\big(\alpha(B_t - B_s)\big)\exp\big(\alpha B_s\big) \,|\, \mathcal{F}_s\big] \\
&= \exp\big(-\alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \cdot E\exp\big(\alpha(B_t - B_s)\big) \cdot \exp\big(\alpha B_s\big) \\
&= \exp\big(-\alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \cdot \varphi_{\mathrm{N}(0,t-s)}(-i\alpha) \cdot \exp\big(\alpha B_s\big) \\
&= \exp\big(-\alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \cdot \exp\big(-\frac{1}{2}\,(t-s)(-i\alpha)^2\big) \cdot \exp\big(\alpha B_s\big) \\
&= \exp\big(\alpha B_s + \frac{1}{2}\,\alpha^2(t-s) - \alpha^2\,\frac{t}{2}\big) \\
&= \exp\big(\alpha B_s - \alpha^2\,\frac{s}{2}\big) \;=\; X_s.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(M_t \geq z) &= P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq z) = P\big(\sup_{0\leq s\leq t} \exp\big(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2} + \frac{\alpha^2 s}{2}\big) \geq \exp(\alpha z)\big) \\
&\leq P\big(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \cdot \exp\big(\frac{\alpha^2 t}{2}\big) \geq \exp(\alpha z)\big) \\
&= P\big(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq \exp\big(\alpha z - \frac{\alpha^2 t}{2}\big)\big) \\
&\leq \exp\big(\frac{\alpha^2 t}{2} - \alpha z\big) \cdot E\exp\big(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\big)\big), \text{ Aufgabe 41, } p = 1 \\
&= \exp\big(\frac{\alpha^2 t}{2} - \alpha z\big) \cdot E\exp\big(\alpha B_0 - \frac{\alpha^2 0}{2}\big)\big), \text{ Martingal,} \\
&= \exp\big(\frac{\alpha^2 t}{2} - \alpha z\big), \text{ wird minimal bei } \alpha = z/t(>0),
\end{aligned}$$

also insbesondere

$$P(M_t \geq z) \leq \exp\big(-\frac{z^2}{2t}\big).$$

(c) Es sei $T_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$. Dann gilt:

$$tP(T_a > t) = tP(M_t < a) = t(1 - P(M_t \geq a)) \geq t \cdot \Big(1 - \exp\big(-\frac{a^2}{2t}\big)\Big).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} tP(T_a > t) &\geq \lim_{t\to\infty} t \cdot \Big(1 - \exp\big(-\frac{a^2}{2t}\big)\Big) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1 - \exp(-a^2 s/2)}{s} = \frac{a^2}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere gibt es also ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \geq t_0$ gilt

$$P(T_a > t) \geq \frac{a^2}{4t}.$$

Also

$$ET_a = \int_0^\infty P(T_a > t)\, dt \geq \underbrace{\int_0^{t_0} P(T_a > t)\, dt}_{\geq 0} + \frac{a^2}{4} \underbrace{\int_{t_0}^\infty \frac{1}{t}\, dt}_{=\infty} = \infty.$$

Also $P(T_a < \infty) = 1$, aber $ET_a = \infty$.

Aufgabe 36: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; wir nehmen einfachheitshalber an, dass alle Pfade stetig sind.

(a) Zeigen Sie, dass B als Abbildung von $[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$, $(t,\omega) \mapsto B_t(\omega)$, $(\mathcal{B}_{[0,\infty)}\otimes\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die zufällige Menge $L_a := \{t \geq 0 : B_t(\omega) = a\}$ mit P-Wahrscheinlichkeit 1 eine Lebesgue-Nullmenge für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung:

(a) Für jede $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbare Funktion Y und alle $0 \leq t_1 < t_2$ sind Abbildungen der Form

$$X : (t,\omega) \mapsto Y(\omega) \cdot 1_{[t_1,t_2)}(t)$$

$(\mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar. Es gilt nämlich

$$\{X \geq a\} = \begin{cases} [t_1,t_2) \times \{y \geq a\}, & a > 0, \\ [t_1,t_2) \times \{y \geq a\} \cup [t_1,t_2)^{\mathrm{c}} \times \Omega, & a \leq 0, \end{cases}$$

und somit $\{X \geq a\} \in \mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Nun gilt

$$B_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n2^n} 1_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(t) B_{\frac{k}{2^n}}(\omega)$$

wegen der Stetigkeit der Pfade, also ist B als Grenzwert messbarer Funktionen wieder messbar.

(b) Nach Teil (a) gilt $L'_a := \{(\omega,t) \mid B_t(\omega) = a\} \in \mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{A}$. Insbesondere ist dann L_a ℓ-messbar und es gilt mit Fubini II:

$$E\ell(L_a(\omega)) = E\int_0^\infty 1_{\{B_t=a\}}(\omega)\, dt = \int_0^\infty E1_{\{B_t=a\}}\, dt = \int_0^\infty P(B_t = a)\, dt = 0,$$

also, da $\ell(L_a)$ nichtnegativ ist, $\ell(L_a) = 0$.

Aufgabe 37: (Spiegelungsprinzip für die einfache symmetrische Irrfahrt)
Es sei (X_n) die einfache eindimensionale symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, $M_n := \max_{1\le k\le n} X_k$.
Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $0 \le j \le i$ gilt

$$P(M_n \ge i,\ X_n = j | X_0 = 0) = P(X_n = 2i - j | X_0 = 0)\ .$$

Lösung: Wir betrachten die Pfadmengen

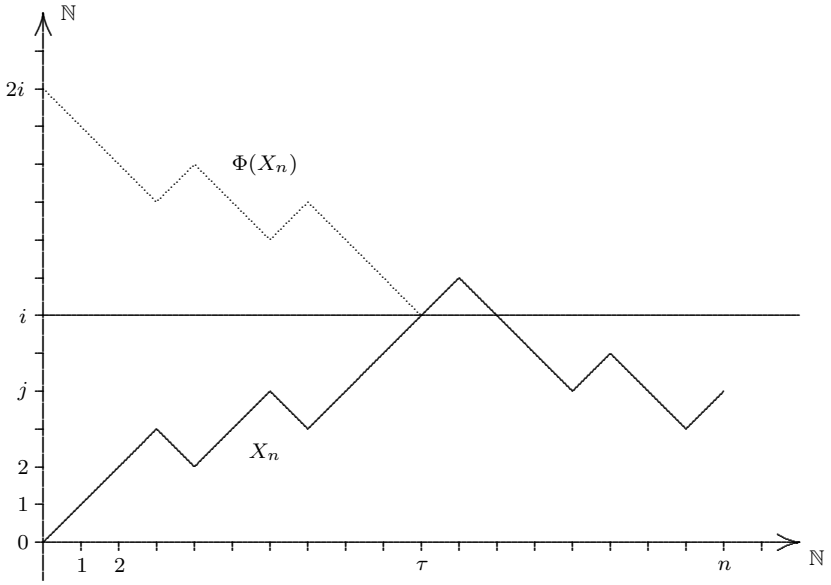
$$\begin{aligned} M &:= \big\{ f : \{0, ..., n\} \to \mathbb{Z} \,\big|\, f(0) = 0,\ \exists k \in \{1, \dots, n\} \,:\, f(k) = i,\ f(n) = j, \\ &\qquad\qquad |f(m) - f(m+1)| = 1, m = 0, ..., n-1 \big\}, \\ N &:= \big\{ f : \{0, ..., n\} \to \mathbb{Z} \,\big|\, f(0) = 2i,\ f(n) = j, \\ &\qquad\qquad |f(m) - f(m+1)| = 1, m = 0, ..., n-1 \big\}. \end{aligned}$$

Wir konstruieren eine Bijektion Φ zwischen M und N. Für $f \in M$ sei

$$\tau(f) := \min\{1 \le m \le n \,:\, f(m) = i\}$$

und

$$\Phi(f)(m) := \begin{cases} i + (i - f(m)) & \text{für } m \le \tau(f), \\ f(m) & \text{für } m > \tau(f). \end{cases}$$



Offenbar ist Φ eine Bijektion. Damit erhält man

$$\begin{aligned} P(M_n \geq i, X_n = j | X_0 = 0) &= \sum_{f \in M} P(X_l = f(l), l = 1, ..., n | X_0 = 0) \\ &= \sum_{f \in N} P(X_l = f(l), l = 1, ..., n | X_0 = 2i) \\ &= P(X_n = j) | X_0 = 2i) \\ &= P(X_n = -(2i - j) | X_0 = 0) \\ &= P(X_n = 2i - j | X_0 = 0), \end{aligned}$$

wobei wir den Startpunkt der Irrfahrten wieder in den Ursprung verlegen und dann die Pfade an der t-Achse spiegeln. Es gilt übrigens

$$P(X_n = k | X_0 = 0) = \binom{n}{(n+k)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

für $2|(n + k)$ und $P(X_n = k|X_0 = 0) = 0$ sonst.

Aufgabe 38: Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein zu $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess. Für alle beschränkten Stoppzeiten τ gelte $E|X_\tau| < \infty$ und $EX_\tau = EX_0$. Zeigen Sie, dass dann $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Stoppzeiten

$$\tau \;:=\; s\cdot 1_A \,+\, t\cdot 1_{A^C}, \qquad A\in\mathcal{F}_s,\; s\leq t.$$

Lösung: Es seien $0 \leq s \leq t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Man sieht leicht, daß τ wie im Hinweis gewählt eine Stoppzeit ist, denn wegen $A, A^C \in \mathcal{F}_s$ gilt für $u \geq 0$

$$\{\tau \leq u\} = \left\{ \begin{array}{lll} \emptyset, & \text{falls} & u < s\ , \\ A, & \text{falls} & s \leq u < t\ , \\ A^C, & \text{falls} & u \geq t \end{array} \right\} \in \mathcal{F}_u\ .$$

Nach Voraussetzung gilt

$$EX_0 = EX_\tau = EX_s 1_A + EX_t 1_{A^C}\ .$$

Offenbar ist auch $\sigma \equiv t$ eine beschränkte Stoppzeit, und somit gilt

$$EX_0 = EX_t\ ,$$

insgesamt also

$$\int_A X_t dP = EX_t 1_A = EX_t(1_\Omega - 1_{A^C}) = EX_0 - EX_t 1_{A^C} = EX_s 1_A = \int_A X_s dP\ .$$

Dies zeigt $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, was zu zeigen war.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

10. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 39: Zeigen Sie, dass jede gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen L^1-beschränkt ist, dass aber nicht jede L^1-beschränkte Familie gleichgradig integrierbar ist.

Lösung: Sei $\mathcal{M}$ eine Familie gleichgradig integrierbarer Zufallsvariablen. Dann existiert ein $c > 0$ mit

$$\sup_{X \in \mathcal{M}} \int_{|X| \geq c} |X| \, dP < 1.$$

Dies zieht die L^1-Beschränktheit nach sich, denn:

$$\sup_{X \in \mathcal{M}} \int |X| \, dP \leq \sup_{X \in \mathcal{M}} \int_{|X| \geq c} |X| \, dP + \sup_{X \in \mathcal{M}} \int_{|X| < c} |X| \, dP < 1 + c.$$

Wir suchen nun ein Beispiel dafür, dass aus L^1-Beschränktheit nicht gleichgradige Integrierbarkeit folgt: Dazu sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \ell_{[0,1]})$. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $X_n(\omega) := n 1_{[0, \frac{1}{n}]}$ definiert. Offenbar gilt $\int |X_n| \, dP = 1$, und die Familie $\{X_n : \, n \in \mathbb{N}\}$ ist daher L^1-beschränkt. Auf der anderen Seite gilt für beliebiges $c > 0$

$$\int_{|X_n| > c} |X_n| \, dP = 1 \; \forall n > c$$

und daher

$$\liminf_{c \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|X_n| \geq c} |X_n| \, dP = 1 \neq 0 \, .$$

Also ist $\{X_n : \, n \in \mathbb{N}\}$ nicht gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 40: Es sei $T = [0, t_0]$ und $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ ein Martingal mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass dann für alle $p \geq 1$ und alle $c > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$P\Big(\sup_{t\in T} |X_t| \geq c\Big) \;\leq\; \frac{1}{c^p}\, E|X_{t_0}|^p.$$

Lösung: Wir beweisen zunächst die Aussage für Martingale in diskreter Zeit. Diese ist in ihrem Gehalt wie auch in ihrem Beweis sehr ähnlich zur Submartingalungleichung von Doob (Stochastik II, Satz 8.4): Ist $(Y_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal, so gilt für alle $c > 0$, $p \geq 1$:

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq c\Big) \leq \frac{1}{c^p} E|X_n|^p.$$

Beweis dieser Aussage: Es seien $A := \{\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq c\}$ und $A_i := \{|X_1| < c, ..., |X_{i-1}| < c, |X_i| \geq c\}$, $i = 1, ..., n$. Dann gilt $A = A_1 + A_2 + ... + A_N$ ('+' meint disjunkte Vereinigung), außerdem ist $A_i \in \mathcal{G}_i$ sowie $|X_i| \geq c$ auf A_i für alle $1 \leq i \leq n$. Damit und mit der Submartingaleigenschaft von $|X_n|^p$ (konvexe Funktion) folgt:

$$\int_{A_i} |X_n|^p \, dP = \int_{A_i} E\big[|X_n|^p \big| \mathcal{G}_i\big] \, dP \geq \int_{A_i} |X_i|^p \, dP \geq c^p P(A_i).$$

Summation über $i = 1, ..., n$ liefert

$$\int_A |X_n|^p \, dP \geq c^p P(A),$$

also

$$P(A) = P(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq c) \leq \frac{1}{c^p} \int_A |X_n|^p \, dP \leq \frac{1}{c^p} \int |X_n|^p \, dP = \frac{1}{c^p} E|X_n|^p.$$

Diese Aussage verwenden wir nun zum Beweis der obigen Aussage. Sei $T = [0, t_0]$. Zu zeigen ist für alle $p \geq 1$, $c > 0$:

$$P\Big(\sup_{t\in T} |X_t| \geq c\Big) \;\leq\; \frac{1}{c^p}\, E|X_{t_0}|^p.$$

Betrachte die aufsteigende Mengenfolge $\{t_0(k/2^n) \,|\, k = 1, ..., 2^n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzwert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t_0(k/2^n) \,|\, k = 1, ..., 2^n\}$ liegt dicht in T. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
P\Big(\sup_{t\in T} |X_t| \geq c\Big) &= P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{ \max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{t_0(k/2^n)}| \geq c\big\}\Big), \text{ Stetigkeit der Pfade,} \\
&= \lim_{n\to\infty} P\Big(\max_{1\leq k\leq 2^n} |X_{t_0(k/2^n)}| \geq c\Big), \text{ Stetigkeit von unten,} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^p} E|X_{t_0}|^p, \;\; (X_{t_0(k/2^n)}, \mathcal{F}_{t_0(k/2^n)})_{k=1,...,2^n} \text{ ist Martingal,} \\
&= \frac{1}{c^p} E|X_{t_0}|^p.
\end{aligned}$$

Aufgabe 41:

(a) Es sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge zu M ist und dass $(X_{\tau_n \wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Martingal ist.

(b) Es sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und X_0 eine von $(B_t)_{t\geq 0}$ unabhängige und Cauchy-verteilte Zufallsvariable; für alle $t \geq 0$ sei $\mathcal{G}_t$ die von $\mathcal{F}_t$ und X_0 erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $(M_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ mit $M_t := X_0 B_t$ ein lokales Martingal, aber kein Martingal ist.

(c) Wir nennen einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *integrierbar*, wenn $E|X_t| < \infty$ gilt für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass ein stetiges lokales Martingal, das nicht-negativ und integrierbar ist, ein Supermartingal ist.

Lösung:

(a) Sei $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge zu M und sei ρ eine beschränkte Stoppzeit. Wenn wir

$$E|M_{\tau_n\wedge\rho}| < \infty, \qquad EM_{\tau_n\wedge\rho} = EM_0$$

zeigen können, so folgt mit Aufgabe 38 die Behauptung.

Es gilt $EM_{\tau_n\wedge\rho\wedge\nu_m} = EM^{(\nu_m)}_{\tau_n\wedge\rho} = EM_0$ nach Korollar **???**; denn $M^{(\nu_m)}$ ist ein Martingal und $\tau_n \wedge \rho$ eine beschränkte Stoppzeit. Außerdem gilt $M_{\tau_n\wedge\rho\wedge\nu_m} \to M_{\tau_n\wedge\rho}$ mit $m \to \infty$ P-f.s., da $\nu_m \uparrow \infty$ nach Voraussetzung.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann sind alle $M_{\tau_n\wedge\rho\wedge\nu_m}$, $m \in \mathbb{N}$ betragsmäßig durch n beschränkt, also folgt die Behauptung mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Zusatzbemerkung: Ohne die Stetigkeit ist dies im Allgemeinen falsch: kurz vor dem Erreichen von n könnte ein in Abhängigkeit von ω grosser Sprung erfolgen, der dann die Beschränktheit verletzt.

(b) Wäre $E|M_t| < \infty$, so folgte mit dem Multiplikationssatz für Erwartungswerte und $E|B_t| > 0$, dass $E|X_0| < \infty$. Widerspruch; also ist $(M_t)_{t\geq 0}$ sicher kein Martingal.

Sei nun $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert wie in (a); für alle $x > 0$ sei

$$\nu_x := \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq x\}.$$

Klar ist: auf $\{X_0 \neq 0\}$ gilt

$$M^{(\tau_n)}_t = X_0 \cdot B^{(\nu_{n/|X_0|})}_t.$$

Ebenfalls klar: $(B_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal. Sei also $n \in \mathbb{N}$ und seien $0 \leq s \leq t$, dann gilt

$$\begin{aligned} E\big[M_t^{(\tau_n)}\big|\mathcal{G}_s\big] &= E\big[X_0 B_t^{(\nu_{n/|X_0|})}\big|\mathcal{G}_s\big] \\ &= X_0 \cdot E\big[B_t^{(\nu_{n/|X_0|})}\big|\mathcal{G}_s\big] \\ &= X_0 \cdot B_s^{(\nu_{n/|X_0|})} = M_s^{(\tau_n)}, \end{aligned}$$

also ist $(M_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal.

(c) Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge zu $(M_t)_{t\geq 0}$, dann folgt mit dem Lemma von Fatou für bedingte Erwartungswerte ($\rightsquigarrow$ Stochastik II) für alle $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} M_s &= \liminf_{n\to\infty} M_s^{(\tau_n)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} E\big[M_t^{(\tau_n)}\big|\mathcal{F}_s\big] \\ &\geq E\Big[\liminf_{n\to\infty} M_t^{(\tau_n)}\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\ &= E[M_t|\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

Aufgabe 42: Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und, für $a > 0$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : \, B_t \geq a\}.$$

In der Vorlesung wurde die Verteilung von τ_a mit Hilfe des Spiegelungsprinzips ermittelt. Bestimmen Sie mit Martingalmethoden die Laplace-Transformierte

$$\phi_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto E \exp(-\theta \tau_a),$$

zur Verteilung von τ_a.

Lösung: Aus Aufgabe 35 ist bekannt, dass $X_t = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\,\alpha^2 t)$ für alle $\alpha > 0$ ein Martingal mit stetigen Pfaden ist. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ aufgrund der Beschränktheit von $\tau \wedge n$, dass $EX_{\tau_a \wedge n} = EX_0 = 1$, und damit

$$E \exp\Big(\alpha B_{\tau_a \wedge n} - \frac{1}{2}\,\alpha^2 (\tau_a \wedge n)\Big) = 1.$$

Mit $n \to \infty$ geht der Integrand f.s. gegen

$$\exp\Big(\alpha a - \frac{1}{2}\,\alpha^2 \tau_a\Big),$$

denn $P(\tau_a < \infty) = 1$. Hier lässt sich nun der Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden, denn

$$\exp\Big(\alpha B_{\tau_a \wedge n} - \frac{1}{2}\,\alpha^2 (\tau_a \wedge n)\Big) \leq \exp(\alpha a),$$

und man erhält

$$E \exp\Big(\alpha a - \frac{1}{2}\,\alpha^2 \tau_a\Big) = 1,$$

mit $\alpha := \sqrt{2\theta}$ also

$$\phi_a(\theta) = E e^{-\theta \tau_a} = e^{-\sqrt{2\theta} a}.$$

Die direkte Berechnung dieses Resultats mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Dichte zu τ_a erweist sich als wesentlich schwieriger.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

11. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 43:

(a) Als *inverse Gauss-Verteilung* $\mathrm{IG}(a)$ mit Parameter $a > 0$ bezeichnet man das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)})$ mit der Lebesgue-Dichte

$$f_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\Big(-\frac{a^2}{2x}\Big).$$

Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängig, mit $X \sim \mathrm{IG}(a)$ und $Y \sim \mathrm{IG}(b)$, so gilt $X + Y \sim \mathrm{IG}(a+b)$.

(b) Es seien X und Y unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $a, b \geq 0$

$$\frac{a^2}{X^2} + \frac{b^2}{Y^2} =_{\mathrm{d}} \frac{(a+b)^2}{Z^2}$$

mit einer ebenfalls $\mathrm{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen Z gilt.

Lösung:

(a) Der Weg über die Faltungsformel ist steinig, daher machen wir einen Umweg über die Brownsche Bewegung. Sei also $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und ist τ_a, $a > 0$, die in Aufgabe 42 definierte Stoppzeit, so ist aus der Vorlesung bekannt, dass $\tau_a \sim \mathrm{IG}(a)$ gilt. Der Post-τ_a-Prozess ist wieder eine Brownsche Bewegung, deren Eintrittszeit $\tilde{\tau}_b$ in $[b,\infty)$ unabhängig von τ_a ist und der Verteilung $\mathrm{IG}(b)$ genügt. Klar: $\tau_a + \tilde{\tau}_b = \tau_{a+b}$ im Originalprozess, also folgt:

$$\mathrm{IG}(a) \star \mathrm{IG}(b) = \mathrm{IG}(a+b).$$

Im Übrigen kann man dies auch an der in Aufgabe 42 ausgerechneten Laplace-Transformierten sehen.

(b) Aus Abschnitt 3.3 der Vorlesung ist

$$P(\tau_a \leq t) = P(|B_t| \geq a) = P(|B_1| \geq at^{-1/2})$$

bekannt. Hieraus folgt unmittelbar

$$P(\tau_a \leq t) = P\Big(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\Big)$$

mit $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, d.h.

$$\tau_a =_d \frac{a^2}{Z^2}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Teil (a).

Aufgabe 44: Für $0 < s < t < \infty$ sei $\rho(s,t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ im Intervall (s,t) eine Nullstelle hat. Zeigen Sie:

$$\rho(s,t) \;=\; \frac{2}{\pi}\,\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}\,.$$

Hinweis: Zerlegen Sie nach dem Wert von B_s.

Lösung: Wir verwenden die folgende Idee: Ist $B_s = x > 0$, so bedeutet ein Vorzeichenwechsel im Zeitintervall (s,t), dass das Maximum des mit -1 multiplizierten Post-s-Prozesses vor den Zeitpunkt $t-s$ den Wert x überschreitet. Aus Symmetriegründen gilt also

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= 2E\Big(1_{(0,\infty)}(B_s)1_{(-\infty,0)}(\min_{s\leq u\leq t} B_u)\Big)\\ &= 2E\Big(1_{(0,\infty)}(B_s)E[1_{(-\infty,-B_s)}(\min_{s\leq u\leq t}(B_u - B_s))|\mathcal{F}_s]\Big).\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 72a der Vorlesung Stochastik II im WS03/04 kann der bedingte Erwartungswert in der Form $\Psi(B_s)$ mit

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= E1_{(-\infty,-x)}\Big(\min_{0\leq u\leq t-s}\tilde{B}_u\Big)\\ &= P\Big(\max_{0\leq u\leq t-s}\tilde{B}_u > x\Big)\end{aligned}$$

geschrieben werden, $(\tilde{B}_u)_{u\geq 0}$ mit $\tilde{B}_u := B_{s+u} - B_s$ ist der Post-s-Prozess. Bezeichnet φ die Dichte zur Standardnormalverteilung, so ist aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$P\Big(\max_{0\leq u\leq t-s}\tilde{B}_u > x\Big) = \int_x^\infty \frac{2}{\sqrt{t-s}}\,\varphi\Big(\frac{v}{\sqrt{t-s}}\Big)\,dv = 2\int_{x/\sqrt{t-s}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}\,dy$$

gilt, man erhält also

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= 2\int_{(0,\infty)}\Psi(x)P^{B_s}(dx)\\ &= 2\int_0^\infty 2\int_{x/\sqrt{t-s}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}\,dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,e^{-x^2/(2s)}\,dx\\ &= 2\int_0^\infty 2\int_{x\sqrt{s}/\sqrt{t-s}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^2/2}\,dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\,dx,\ \text{Subst.: } z := x/\sqrt{s},\\ &= 4P\Big(Y > \sqrt{\frac{s}{t-s}}\,Z > 0\Big),\ \text{mit } Y,\,Z \text{ unabh. und } \mathrm{N}(0,1)\text{-verteilt},\\ &= 2P\Big(\frac{Y}{Z} > \sqrt{\frac{s}{t-s}}\Big),\ \text{Symmetrie},\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{s}{t-s}}\Big), \quad \text{denn } Y/Z \text{ ist Cauchy-verteilt,}$$

$$= \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}, \quad \text{trigonometrische Rechenregel: } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Alternativ nach Bilingsley, *Probability and Measure*, 1979, Exercise 37.12.: Nach Vorlesung gilt

$$\Psi(x) = P\Big(\max_{0\le u\le t-s} \tilde{B}_u > x\Big) = P(\tau_x \le t-s) = \int_0^{t-s} \frac{x}{\sqrt{2\pi y^3}}\,\exp\Big(-\frac{x^2}{2y}\Big)\,dy.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\rho(s,t) &= 2\int_{(0,\infty)} \Psi(x) P^{B_s}(dx) \\
&= 2\int_0^\infty \int_0^{t-s} \frac{x}{\sqrt{2\pi y^3}}\,\exp\Big(-\frac{x^2}{2y}\Big)\,dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,\exp\Big(-\frac{x^2}{2s}\Big)\,dx \\
&= 2\int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^\infty x\exp\Big(-\frac{x^2(y+s)}{2ys}\Big)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{y^3 s}}\,\frac{ys}{y+s}\,dy, \quad \text{denn } \int_0^\infty x\exp\Big(-\frac{x^2 r}{2}\Big)\,dx = \frac{1}{r}, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{t-s} \frac{1}{y+s}\,\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{y}}\,dy \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{s/t}}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \text{Subst.: } v := \sqrt{\frac{s}{s+y}}, \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\underbrace{\arccos(1)}_{=0} + \arccos\sqrt{\frac{s}{t}}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 45:

(a) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine (rechts)stetige Funktion von lokal beschränkter Totalvariation. Zeigen Sie, dass dann die Funktionen

$$x \mapsto V_0^x f, \quad x \mapsto V_0^x f - f(x)$$

(rechts)stetig und isoton sind.

(b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ genau dann von lokal beschränkter Totalvariation ist, wenn es zwei isotone Funktionen $g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = g - h$.

Lösung: Zwei Zerlegungen von $[0, x]$ und $[x, x+y]$ können zu einer Zerlegung von $[0, x+y]$ zusammengefasst werden, also gilt

$$V_0^{x+y} f \geq V_0^x f + V_x^{x+y} f.$$

Andererseits kann jede Zerlegung von $[0, x+y]$ (gegebenenfalls durch Hinzunahme von x) in zwei Zerlegungen von $[0, x]$ und $[x, x+y]$ zerlegt werden. Damit folgt

$$V_0^{x+y} f \leq V_0^x f + V_x^{x+y} f.$$

Zusammengenommen ergibt dies

$$V_0^{x+y} f - V_0^x f = V_x^{x+y} f \geq 0,$$

also die Isotonie von $x \mapsto V_0^x f$, und mit $V_a^b f \geq |f(b) - f(a)|$ folgt auch die Isotonie von $x \mapsto V_0^x f - f(x)$; denn es gilt:

$$\begin{aligned} V_0^{x+y} f - f(x+y) - \big(V_0^x f - f(x)\big) &= V_x^{x+y} - \big(f(x) - f(x+y)\big) \\ &\geq V_x^{x+y} - \big|f(x+y) - f(x)\big| \geq 0. \end{aligned}$$

Bevor wir uns der Stetigkeitsaussage zuwenden, beweisen wir die Äquivalenz aus (b). „⇒“ folgt sofort aus dem bereits Gezeigten. „⇐“: Sei $f = g - h$ mit $g, h \uparrow$. Dann gilt für beliebige $x \geq y$:

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq g(x) - g(y) + h(x) - h(y),$$

also gilt für eine beliebige Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| \leq \quad & \sum_{i=1}^n \big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big) \\ & + \sum_{i=1}^n \big(h(x_i) - h(x_{i-1})\big) \\ & = g(x_n) - g(x_0) + h(x_n) - h(x_0) \end{aligned}$$

und somit

$$V_0^x f \leq g(x) - g(0) + h(x) - h(0) < \infty.$$

Nun zurück zu Teil (a). Ist f in x stetig (von rechts), so kann man die nach Teil (b) existierende Zerlegung $f = g - h$ mit $g, h \uparrow$ so wählen, dass g und h in x stetig (von rechts) sind; denn: Angenommen, g ist *nicht* stetig (von rechts) in x, dann ist wegen $g \uparrow$ $g(x+) > g(x) (> g(x-))$. Setze $\Delta_g := g(x+) - g(x)$ bzw. $\Delta_g := g(x+) - g(x-)$ und

$$\tilde{g} : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto \begin{cases} g(y), & y < x \\ g(y) - \Delta_g, & y > x \\ g(y-), & y = x \end{cases}.$$

Analog definieren wir $\tilde{h}$ für h und Δ_h. Entscheidend ist nun, dass aus der Stetigkeit (von rechts) von f in x folgt, dass $\Delta_g = \Delta_h$ gelten muss. Damit ist also $f = \tilde{g} - \tilde{h}$ mit $\tilde{g}, \tilde{h} \uparrow$ und stetig (von rechts) in x.

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} 0 \leq V_x^{x+\varepsilon} f &= V_0^{x+\varepsilon} f - V_0^x f \\ &\leq g(x+\varepsilon) - g(x) + h(x+\varepsilon) - h(x) \\ &\to 0 \quad \text{mit } \varepsilon \to (\downarrow) 0, \end{aligned}$$

also ist $x \mapsto V_0^x f$ stetig (von rechts) in x.

Aufgabe 46: Es seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein progressiv messbarer Prozess und τ eine Stoppzeit; beides bezieht sich auf eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass dann auch der bei τ gestoppte Prozess

$$X^\tau = (X_t^\tau)_{t\geq 0}, \quad X_t^\tau := X_{\tau\wedge t} \text{ für alle } t \geq 0,$$

progressiv messbar ist.

Lösung: Sei $t > 0$. Die Zerlegung

$$\begin{array}{ccc} [0,t]\times\Omega & \xrightarrow{(s,\omega)\mapsto(s\wedge\tau(\omega),\omega)} & [0,t]\times\Omega \\ X^\tau\big|_{[0,t]\times\Omega}\downarrow & & \downarrow X\big|_{[0,t]\times\Omega} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

zeigt, dass es genügt, die $(\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t, \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t)$-Messbarkeit von

$$(s,\omega)\mapsto(s\wedge\tau(\omega),\omega)$$

nachzuweisen, welche aus der $(\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t, \mathcal{B}_{[0,t]})$-Messbarkeit von $(s,\omega)\mapsto s\wedge\tau(\omega)$ folgte. Es gilt für alle $u\in[0,t]$:

$$\big\{(s,\omega) : s\wedge\tau(\omega)\leq u\big\} = [0,u]\times\Omega \cup (u,t]\times\{\tau\leq u\} \in \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t,$$

dies belegt die geforderte Messbarkeit.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

12. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 47: Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{H}$ ein Untervektorraum des Vektorraums $B(\Omega, \mathcal{A})$ der beschränkten, $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $H : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) $H \equiv 1$ ist ein Element von $\mathcal{H}$,

(b) $1_E \in \mathcal{H}$ für alle $E \in \mathcal{E}$,

(c) ist $H \in B(\Omega, \mathcal{A})$ punktweiser Limes einer isotonen Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $H_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $H \in \mathcal{H}$.

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{H} = B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A} : 1_D \in \mathcal{H}\}$ ein Dynkin-System ist, und verwenden Sie die aus der Maßtheorie bekannte Approximation nicht-negativer Funktionen durch isotone Folgen von primitiven Funktionen.

Lösung: Wir zeigen den Hinweis: Offenbar ist $\Omega \in \mathcal{D}$, da $1 \equiv 1_\Omega \in \mathcal{H}$. Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $1_{A^C} = 1_\Omega - 1_A \in \mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ ein Vektorraum ist, und somit $A^C \in \mathcal{D}$. Ist $(A_i) \in \mathcal{D}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen, so ist zunächst $0 \leq 1_{\sum A_i} \leq 1$ und somit $1_{\sum A_i} \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Weiter gilt $1_{\sum A_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$. Jedes $\sum_{i=1}^n 1_{A_i}$, $n \in \mathbb{N}$, ist aus $\mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ ein Vektorraum ist. Da $1_{\sum A_i}$ der punktweise Limes einer monotonen Folge aus Elementen von $\mathcal{H}$ ist, ist dann auch $1_{\sum A_i}$ ein Element aus $\mathcal{H}$, somit $\sum A_i \in \mathcal{D}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

Da $\mathcal{D}$ das $\cap$-stabile Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ enthält, ist $\mathcal{D} = \mathcal{A}$. Damit gilt $1_A \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{A}$.

Jede primitive Funktion ist ein Element aus $\mathcal{H}$, da $\mathcal{H}$ ein Vektorraum ist. Ist $0 \leq f \in B(\Omega, \mathcal{A})$, so existiert eine Folge primitiver Funktionen (f_n) mit $f_n \uparrow f$. Da $f_n \in \mathcal{H}$, folgt aus (iii) $f \in \mathcal{H}$. Da alle $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$ die Darstellung $f = f^+ - f^-$ mit $f^-, f^+ \in \mathcal{H}$ zulassen, folgt $f \in \mathcal{H}$.

Insgesamt gilt also $\mathcal{H} = B(\Omega, \mathcal{A})$.

Aufgabe 48:

(a) Es seien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, X eine Zufallsvariable und τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass X genau dann bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ der τ-Vergangenheit messbar ist, wenn für alle $t \geq 0$ die Zufallsvariable $X1_{\{\tau\leq t\}}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

(b) Es sei H ein vorhersehbarer Prozess, τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass dann auch $H1_{(0,\tau]}$ vorhersehbar ist.

Lösung:

(a) Es sei $\mathcal{H}_\tau$ die Menge aller $\mathcal{F}_\tau$-messbaren Zufallsvariablen und $\mathcal{H}^*$ die Menge der Funktionen X, so dass $1_{\tau\leq t}X$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist für alle $t \geq 0$.

$\underline{\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{H}^* :}$ Es sei $1_A \in \mathcal{H}_\tau$. Es 1_A ist genau dann eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable, wenn $\{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$. Dies bedeutet aber gerade, dass $1_A 1_{\tau\leq t}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist für alle $t \geq 0$. Damit ist 1_A in $\mathcal{H}^*$. Weiter argumentiert man mit der üblichen Maschinerie.

$\underline{\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{H}_\tau :}$ Es sei $1_A \in \mathcal{H}^*$. Also gilt $1_{\{\tau\leq t\}\cap A} = 1_A 1_{\tau\leq t}$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \geq 0$. Dann ist offenbar A nach Definition in $\mathcal{F}_\tau$. Damit ist 1_A in $\mathcal{H}_\tau$. Weiter argumentiert man mit der üblichen Maschinerie.

Alternative Lösung: Sei X $\mathcal{F}_\tau$-messbar und $t \geq 0$. Sei weiter $B \in \mathcal{B}$. Zu zeigen ist: $(X1_{\tau\leq t})^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$. Dazu leitet man die folgende Gleichung her:

$$\begin{aligned}
(X1_{\tau\leq t})^{-1}(B) &= (X1_{\tau\leq t}^{-1})(\underbrace{B\backslash\{0\}}_{=:\tilde{B}}) \cup (X1_{\tau\leq t})^{-1}(\{0\}) \\
&= \Big(\{\tau \leq t\} \cap X^{-1}(\tilde{B})\Big) \cup \big(\{\tau > t\} \cup X^{-1}(\{0\})\big) \\
&= \Big(\{\tau \leq t\} \cap X^{-1}(\tilde{B})\Big) \cup \big(\{\tau \leq t\} \cap (X^{-1}(\{0\}))^C\big)^C \ .
\end{aligned}$$

Da X $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist, sind die Mengen $X^{-1}(\tilde{B})$ und $(X^{-1}(\{0\}))^C$ aus $\mathcal{F}_\tau$. Nach Definition sind dann $\{\tau \leq t\} \cap X^{-1}(\tilde{B})$ und $\{\tau \leq t\} \cap (X^{-1}(\{0\})$ aus $\mathcal{F}_t$. Da $\mathcal{F}_t$ eine σ-Algebra ist, ist damit die gesamte „rechte Seite“ eine Menge aus $\mathcal{F}_t$ und damit $(X1_{\tau\leq t})^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$. Da $B \in \mathcal{B}$ beliebig gewählt war, folgt die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von $X1_{\tau\leq t}$.

Es treffe die Eigenschaft zu, dass $X1_{\tau\leq t}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist für alle $t \geq 0$. Dann gilt für beliebiges $t \geq 0$ und $B \in \mathcal{B}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\{\tau \leq t\} \cap X^{-1}(B) &= \{\tau \leq t\} \cap (1_{\tau\leq t}X^{-1} + 1_{\tau>t}X^{-1})(B) \\
&= \{\tau \leq t\} \cap (1_{\tau\leq t}X^{-1})(B) \ .
\end{aligned}$$

Da τ eine Stoppzeit ist, ist $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Nach Voraussetzung ist $(1_{\tau \leq t} X)^{-1}(B)$ aus $\mathcal{F}_t$. Insgesamt gilt also $\{\tau \leq t\} \cap X^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$. Da $t \geq 0$ beliebig gewählt war, folgt $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\tau$. Da $B \in \mathcal{B}$ beliebig gewählt war, folgt die $\mathcal{F}_\tau$-Messbarkeit von X.

(b) Aus der Stochastik I ist bekannt, dass mit zwei Zufallsvariablen auch deren Produkt messbar ist. Nach Definition und Satz 4.15 reicht es also zu zeigen, dass $1_{(0,\tau]}$ adaptiert zu $\mathcal{F}_t$ ist für alle $t > 0$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\big(1_{(0,\tau]}(t)\big)^{-1}(\{1\}) &= \{\omega \in \Omega : t \leq \tau(\omega)\} \\ &= \{\tau < t\}^C \in \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Aufgabe 49: Im folgenden seien $X, Y \in \mathcal{M}_0^2$, τ sei eine Stoppzeit.

(a) Zeigen Sie, dass im Falle $\|X - Y\|_{\mathcal{M}} = 0$ die Prozesse X und Y ununterscheidbar sind.

(b) Es gelte $\langle X, Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$ für alle $Z \in \mathcal{M}_0^2$. Zeigen Sie, dass dann X und Y ununterscheidbar sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle X^\tau, Y\rangle = \langle X, Y^\tau\rangle = \langle X, Y\rangle^\tau$ gilt, also insbesondere $\langle X\rangle^\tau = \langle X^\tau\rangle$.

Lösung:

(a) Es reicht zu zeigen, dass aus $\|X\|_{\mathcal{M}} = 0$ die Gleichung $P(X = 0\ \forall t \geq 0) = 1$ folgt. Aus der Jensenschen Ungleichung folgt

$$E(X_t)^2 = E(E[X_\infty|\mathcal{F}_t])^2 \leq E(E[X_\infty^2|\mathcal{F}_t]) = EX_\infty^2 = \|X\|_{\mathcal{M}} .$$

Gilt also $\|X\|_{\mathcal{M}} = 0$, so folgt $EX_t^2 = 0$ und damit $P(X_t = 0) = 1$. Abzählbare Durchschnitte von Einsmengen sind wieder Einsmengen, daher folgt $P(X_t = 0\ \forall t \in \mathbb{Q}_+) = 1$. Da X fast sicher stetige Pfade besitzt, folgt $P(X_t = 0\ \forall t \geq 0) = 1$ und damit die Ununterscheidbarkeit von 0.

(b) Auch hier reicht es zu zeigen, dass aus $\langle X, Z\rangle = 0$ für alle $Z \in \mathcal{M}_0^2$ die Ununterscheidbarkeit von X und 0 folgt. Wir betrachten den Fall $Z = X$. Wir haben also $\langle X\rangle = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} E\langle X\rangle_t \\ &= \lim_{t\to\infty} E\int_0^\infty 1_{(0,t]} d\langle X\rangle \\ &\overset{\text{Itô}}{=} \lim_{t\to\infty} E(1_{(0,t]} \bullet X)_\infty^2 \\ &= \lim_{t\to\infty} E(X_\infty^t)^2 \\ &= \lim_{t\to\infty} E(X_t)^2 . \end{aligned}$$

Aus der linken Seite der Dreiecksungleichung ($|\sqrt{EX^2} - \sqrt{EY^2}| \leq \sqrt{E(X-Y)^2}$) und der L^2-Konvergenz von X_t gegen X_∞ folgt sofort:

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t)^2 = EX_\infty^2$$

und daher

$$0 = EX_\infty^2 = \|X\|_{\mathcal{M}}^2 .$$

Aus (a) folgt unmittelbar die Ununterscheidbarkeit von X und 0.

(c) Wir zeigen, dass $(X_t^\tau Y_t - \langle X, Y\rangle_t^\tau$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist. Dann folgt aus der Eindeutigkeit (bis auf Ununterscheidbarkeit) des Klammerprozesses die Gleichung $\langle X^\tau, Y\rangle = \langle X, Y\rangle^\tau$. Wir wissen, dass $X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist. Damit ist der abgestoppte Prozess $(X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t)^\tau = X_t^\tau Y_t^\tau - \langle X, Y\rangle_t^\tau$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

Es sei $s \le t$. Man überlegt sich, dass $s \vee (\tau \wedge t)$ als Maximum zweier Stoppzeiten, auch wieder eine Stoppzeit ist. Es gilt $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{s\vee(t\wedge\tau)}$ und $\mathcal{F}_{t\wedge\tau} \subseteq \mathcal{F}_{s\vee(t\wedge\tau)}$, da für die Stoppzeiten folgende Ungleichungen erfüllt sind: $t \wedge \tau \le s \vee (t \wedge \tau) \le t$ und $s \le s \vee (t \wedge \tau) \le t$. Somit können wir folgende Manipulationen ausführen (vgl. Korollar 7.7):

$$\begin{aligned}
E[X_t^\tau Y_t - \langle X, Y\rangle_t^\tau|\mathcal{F}_s] &= E[X_t^\tau Y_t - X_t^\tau Y_t^\tau + X_t^\tau Y_t^\tau - \langle X, Y\rangle_t^\tau|\mathcal{F}_s] \\
&= E[X_{\tau\wedge t}(Y_t - Y_{\tau\wedge t})|\mathcal{F}_s] + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
&= E[E[X_{\tau\wedge t}(Y_t - Y_{\tau\wedge t})|\mathcal{F}_{s\vee(t\wedge\tau)}]|\mathcal{F}_s] + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
&= E[X_{\tau\wedge t}E[Y_t|\mathcal{F}_{s\vee(t\wedge\tau)}] - X_{\tau\wedge t}Y_{\tau\wedge t})|\mathcal{F}_s] + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
&= E[X_{\tau\wedge t}(Y_{s\vee(\tau\wedge t)} - Y_{t\wedge\tau})|\mathcal{F}_s] + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau
\end{aligned}$$

Ist $\tau > s$, so ist $t \wedge \tau > s$ und daher

$$1_{\tau>s}(Y_{s\vee(\tau\wedge t)} - Y_{t\wedge\tau}) = 1_{\tau>s}(Y_{\tau\wedge t} - Y_{t\wedge\tau}) = 0\ .$$

Weiter gilt offenbar

$$1_{\tau\le s}X_{t\wedge\tau}(Y_{s\vee(\tau\wedge t)} - Y_{t\wedge\tau}) = 1_{\tau\le s}X_{s\wedge\tau}(Y_{s\vee(\tau\wedge t)} - Y_{s\wedge\tau})\ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E[X_t^\tau Y_t - \langle X, Y\rangle_t^\tau|\mathcal{F}_s] \\
= \ & E[1_{\tau\le s}X_{s\wedge\tau}(Y_{s\vee(\tau\wedge t)} - Y_{s\wedge\tau})|\mathcal{F}_s] + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
= \ & 1_{\tau\le s}X_{\tau\wedge s}E[Y_{s\vee(\tau\wedge t)}|\mathcal{F}_s] - 1_{\tau\le s}X_{\tau\wedge s}Y_{\tau\wedge s} + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
= \ & 1_{\tau\le s}X_{\tau\wedge s}(Y_s - Y_{\tau\wedge s}) + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
= \ & X_{\tau\wedge s}(Y_s - Y_{\tau\wedge s}) + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
= \ & X_s^\tau(Y_s - Y_s^\tau) + X_s^\tau Y_s^\tau - \langle X, Y\rangle_s^\tau \\
= \ & X_s^\tau Y_s - \langle X, Y\rangle_s^\tau \qquad P\text{-f.s.;},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 50: (Partielle Integration) Es seien $(A_t)_{t\geq 0}$ und $(B_t)_{t\geq 0}$ FV-Prozesse mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A_t B_t \;=\; A_0 B_0 \;+\; \int_0^t A_s \, dB_s \;+\; \int_0^t B_s \, dA_s \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Lösung: Wir betrachten die Zerlegungsfolgen $(kt/n)_{\substack{k=0\ldots,n \\ n\in\mathbb{N}_0}}$ und wählen die Aufpunktvektoren $(0,\ldots(n-1)t/n)$ und $(t/n,\ldots,t)$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{kt/n}(\omega)(B_{kt/n}(\omega) - B_{(k-1)t/n}(\omega))}_{=:S_1(\omega)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} B_{(k-1)t/n}(\omega)(A_{kt/n}(\omega) - A_{(k-1)t/n}(\omega))}_{=:S_2(\omega)} \\
=\;& \sum_{k=1}^{n} (A_{kt/n}(\omega)B_{kt/n}(\omega) - A_{(k-1)t/n}(\omega)B_{(k-1)t/n}(\omega)) \\
=\;& A_t(\omega)B_t(\omega) - A_0(\omega)B_0(\omega)\ .
\end{aligned}$$

Da (B_t) ein FV-Prozess ist und (A_t) stetig ist, konvergiert $S_1(\omega)$ für n gegen ∞ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gegen $\int_0^t A_s(\omega) dB_s(\omega)$. Analog konvergiert S_2 P-f.s. gegen $\int_0^t B_s(\omega) dA_s(\omega)$. Dies zeigt die Behauptung.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

13. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 51: Es sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, und es sei $t > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ sei $t_{ni} := it/n$; Y_n $(n \in \mathbb{N})$ werde definiert durch

$$Y_n^\alpha \;:=\; \sum_{i=1}^{n} (\alpha B(t_{n,i-1}) + (1-\alpha)B(t_{n,i})) \cdot \big(B(t_{n,i}) - B(t_{n,i-1})\big).$$

Zeigen Sie, dass ein $\beta(\alpha) \in \mathbb{R}$ existiert, so dass Y_n^α, $\alpha \in [0,1]$, im quadratischen Mittel (also im L^2-Sinn) gegen $\frac{1}{2}B_t^2 - \beta(\alpha)t$ konvergiert.

Hinweis: Man betrachte zunächst Y_n^0 und Y_n^1.

Lösung: Wir betrachten zunächst Y_n^1. Den Index n unterdrücken wir. Es gilt offenbar $B_t^2 = \sum_{i=1}^n B(t)(B(t_i) - B(t_{i-1}))$. Damit erhalten wir ($\beta := \beta(1)$)

$$\begin{aligned}
E\big(\tfrac{1}{2}B^2(t) - \beta t - Y_n^1\big)^2 &= E\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(\tfrac{1}{2}B(t) - B(t_{i-1})\big)\big(B(t_i) - B(t_{i-1})\big) - \beta t\Big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\big(\tfrac{1}{2}B_t - B(t_{i-1})\big)^2\big(B(t_i) - B(t_{i-1})\big)^2 \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} E\big(\tfrac{1}{2}B(t) - B(t_{i-1})\big)\big(\tfrac{1}{2}B(t) - B(t_{j-1})\big) \\
&\qquad\qquad \cdot \big(B(t_i) - B(t_{i-1})\big)\big(B(t_j) - B(t_{j-1})\big) \\
&\quad - 2\beta t\sum_{i=1}^{n} E\big(\tfrac{1}{2}B(t) - B(t_{i-1})\big)\big(B(t_i) - B(t_{i-1})\big) + \beta^2 t^2.
\end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelnen Summanden, wobei wir die spezielle Unabhängigkeitsstruktur

der Brownschen Bewegung ausnutzen:

$$
\begin{aligned}
&E\big(\tfrac12 B(t)-B(t_{i-1})\big)^2\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^2\\
&=E\Big(\tfrac12\big(B(t)-B(t_i)\big)+\tfrac12\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)-\tfrac12 B(t_{i-1})\Big)^2\Big(B(t_i)-B(t_{i-1})\Big)^2\\
&=\frac14\Big[E\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^2E\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^2+\underbrace{E\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^4}_{=EB(t_1)^4=t_1^2EB_1^4}\\
&\quad+E\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^2E\big(B(t_{i-1})\big)^2+2E\big(B(t)-B(t_i)\big)\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^3\\
&\quad-2E\big(B(t)-B(t_i)\big)B(t_{i-1})\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^2-2E\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)^3B(t_{i-1})\Big]\\
&=\tfrac14\big[(t-t_i)(t_i-t_{i-1})+t_1^2EB_1^4+(t_i-t_{i-1})t_{i-1}\big]\\
&=\frac{t^2}{4n^2}[(n-i)+3+i-1]=\frac{(n+2)t^2}{4n^2}.
\end{aligned}
$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
&E\big(\tfrac12 B(t)-B(t_{i-1})\big)\big(\tfrac12 B(t)-B(t_{j-1})\big)\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)\big(B(t_j)-B(t_{j-1})\big)\\
&=E\Big(B(t_i)-B(t_{i-1})\Big)\Big(B(t_j)-B(t_{j-1})\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\tfrac12\big(B(t)-B(t_j)\big)+\tfrac12\big(B(t_j)-B(t_{j-1})\big)\\
&\qquad\qquad+\tfrac12(B(t_{j-1})-B(t_i))+\tfrac12(B(t_i)-B(t_{i-1}))-\tfrac12 B(t_{i-1})\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\tfrac12\big(B(t)-B(t_j)\big)+\tfrac12\big(B(t_j)-B(t_{j-1})\big)\\
&\qquad\qquad-\tfrac12\big(B(t_{j-1})-B(t_i)\big)-\tfrac12\big(B(t_i)-B(t_{i-1})\big)-\tfrac12 B(t_{i-1})\Big)\\
&=\tfrac14(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})-\tfrac14(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})=0.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&E\left(\tfrac12 B(t)-B(t_{i-1})\right)\left(B(t_i)-B(t_{i-1})\right)\\
&=\tfrac12 t\wedge t_i-\tfrac12 t\wedge t_{i-1}-t_{i-1}\wedge t_i+t_{i-1}\wedge t_{i-1}\\
&=\tfrac12(t_i-t_{i-1})=\tfrac{t}{2n}.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E\big(\tfrac12 B^2(t)-\beta t-Y_n^1\big)^2&=\sum_{i=1}^n\frac{(n+2)t^2}{4n^2}-\beta t\sum_{i=1}^n\frac{t}{n}+\beta^2t^2\\
&\to\tfrac14 t^2-\beta t^2+\beta^2t^2,\quad\text{mit } n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Wir lösen die quadratische Gleichung $1/4 - \beta + \beta^2 = 0$ und sehen, dass dann Y_n^1 im L^2-Sinn gegen $\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$ konvergiert.

Analog geht man bei Y_n^0 vor. Es ergibt sich

$$E\left(\tfrac{1}{2}B_t - \beta(0)\right)^2 \to \tfrac{1}{4}t^2 + \beta(0)t^2 + \beta(0)^2,$$

und damit ist $\beta(0) = -\frac{1}{2}$ zu wählen. Da

$$B_t^2 - \beta(\alpha)t - Y_n^\alpha = \alpha(B_t^2 - Y_n^1) + (1-\alpha)(B_t^2 - Y_n^0) - \beta(\alpha)t)$$

ist $\beta(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}(1-\alpha)$ zu wählen.

Man beachte, dass die Riemann-Stieltje-Summen je nach Wahl des Zwischenpunktes gegen unterschiedliche Prozesse konvergieren.

Aufgabe 52: Es seien $F, G, H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig und von lokal beschränkter Totalvariation; es gelte $F(0) = G(0) = H(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\int_0^t F(s) \left(\int_0^{\cdot} G(u)\, H(du) \right) (ds) \;=\; \int_0^t F(s) G(s)\, H(ds).$$

Lösung: Wir nehmen zunächst an, dass H schwach monoton steigend ist. Es sei wie üblich $t_k^n := tk/n$. Nach dem Zwischenwertsatz für Riemann-Stieltje-Integrale existiert für alle k, n ein $\tau_k^n \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$ mit

$$\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} G(u) H(du) = G(\tau_k^n) \left(H(t_{k+1}^n) - H(t_k^n) \right) .$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
\int_0^t F(s) \left(\int_0^{\cdot} G(u)\, H(du) \right) (ds) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k^n) \left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} G(u)\, H(du) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k^n) G(\tau_k^n) \left(H(t_{k+1}^n) - H(t_k^n) \right) \\
&= \int_0^t F(s) G(s)\, H(ds) \, .
\end{aligned}$$

Da Funktionen H lokal beschränkter Variation als Differenz von monotonen Funktionen lokalbeschränkter Ausdrücke geschrieben werden können und die beiden Seiten der Formel linear in H sind, folgt der allgemeine Fall.

Aufgabe 53: Das n-te *Hermite-Polynom* $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$h_n(x) \;:=\; (-1)^n \exp(x^2/2)\, \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R};$$

h_n genügt der Differentialgleichung $h_n''(x) - x h_n'(x) + n h_n(x) = 0$. Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass $\big(t^{n/2}\, h_n(t^{-1/2} B_t)\big)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

(b) Bekanntlich lassen sich $(B_t)_{t\geq 0}$ und $(B_t^2)_{t\geq 0}$ durch einfache Funktionen f in dem Sinne 'kompensieren', dass Subtraktion von f ein Martingal liefert. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $\big(B_t^3 - f(t)\big)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

(c) Finden Sie mit Hilfe von Teil (a) eine möglichst 'einfache' Funktion f von t und B_t mit der Eigenschaft, dass $\big(B_t^3 - f(t, B_t)\big)_{t\geq 0}$ ein nicht-triviales Martingal ist.

Lösung:

(a) Setzt man $f(t,x) := t^{n/2} h_n(t^{-1/2} x)$, so folgt

$$f_t'(t,x) \,+\, \frac{1}{2} f_{xx}''(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\, t^{\frac{n}{2}-1} \big(h_n''(t^{-1/2}x) - t^{-1/2} x h_n'(t^{-1/2}x) + n h_n(t^{-1/2}x) \big) \;=\; 0.$$

Mit der Itô-Formel (Satz 4.32) und der bekannten Gestalt des Klammerprozesses zur Brownschen Bewegung erhält man hieraus, dass $\big(f(t, B_t)\big)_{t>0}$ sich als stochastisches Integral bzgl. der Brownschen Bewegung schreiben lässt, also ein lokales Martingal ist. Zu $B_T^\star := \sup_{0\leq t\leq T} |B_t|$ existieren alle Momente. Ist τ eine Stoppzeit mit $\tau \leq T$, so lässt sich zu $\big|f(\tau, B_\tau)\big|$ eine Oberschranke in Form eines Polynoms in $B_T^\star$ finden, also folgt mit Satz 4.12, dass $\big(f(t, B_t)\big)_{t\geq 0}$ sogar ein „richtiges" Martingal ist.

(c) Ausrechnen liefert $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$ und $h_3(x) = x^3 - 3x$, also sind nach dem bereits erledigten ersten Teil der Aufgabe die Prozesse

$$(B_t)_{t\geq 0}, \quad (B_t^2 - t)_{t\geq 0} \quad \text{und} \quad (B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0}$$

jeweils Martingale. Insbesondere leistet $f(t, B_t)$ mit $f(t,x) := 3tx$ das Verlangte.

(b) Wegen der Symmetrie der Normalverteilungen gilt $EB_t^3 = 0$ für alle $t \geq 0$. Wäre also $\big(B_t^3 - f(t)\big)_{t\geq 0}$ ein Martingal, so müsste f eine konstante Funktion sein, und $(B_t^3)_{t\geq 0}$ wäre selbst ein Martingal. In Verbindung mit Teil (c) ergibt sich, dass dann auch $(tB_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist, denn diese Prozesse bilden einen linearen Raum. Es gilt jedoch für $s < t$

$$E[tB_t|\mathcal{F}_s] \;=\; t\, E[B_t|\mathcal{F}_s] \;=\; tB_s \;\neq\; sB_s$$

auf $\{B_s \neq 0\}$, einer Menge der Wahrscheinlichkeit 1.

Aufgabe 54: (Fundamentalsatz der Algebra) Es seien (B^1) und (B^2) unabhängige Brownsche Bewegungen. Weiter sei p ein Polynom vom Grade größer als 0.

(a) Man zeige: ist $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}h + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}h = 0$, so ist $h(B^1, B^2)$ ein lokales Martingal.

(b) Man zeige: Gilt $p \neq 0$ auf $\mathbb{C}$, so existiert eine Zufallsvariable Z mit

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Re}\frac{1}{p\left(B_t^{(1)} + iB_t^{(2)}\right)} = Z \quad P\text{-f.s.}$$

(c) Ohne Beweis kann angenommen werden, dass es für ein beliebiges $r > 0$ eine Folge Stoppzeiten (τ_n^r) gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^r = \infty, \quad \tau_n^r < \infty, \quad \left(B_{\tau_n^r}^{(1)}\right)^2 + \left(B_{\tau_n^r}^{(2)}\right)^2 \leq r^2 \quad \forall n \quad P\text{-f.s.}$$

Man konstruiere im Falle $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ hieraus einen Widerspruch zu (b) und folgere so den Fundamentalsatz der Algebra.

Lösung: Es sei $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$.

(a) Nach zweidimensionaler Itô-Formel gilt

$$\begin{aligned} dh(B) &= \partial_x h(B)dB^{(1)} + \partial_y h(B)dB^{(2)} \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\left(\partial_x^2 h(B)d\langle B^{(1)}\rangle + \partial_x\partial_y h(B)d\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle\right. \\ &\qquad \left.+\partial_y\partial_x h(B)d\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle + \partial_y^2 h(B)d\langle B^{(2)}\rangle\right) . \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass $E[B_t^{(1)}B_t^{(2)}|\mathcal{F}_s] = B_s^{(1)}B_s^{(2)}$ also ist $B_t^{(1)}B_t^{(2)}$ ein Martingal. Insbesondere ist

$$\langle B^{(1)}, B^{(2)}\rangle = 0 .$$

Die gemischten Terme in der Klammer verschwinden also. Da h harmonisch ist, bleibt nur noch der (lokale) Martingalanteil:

$$dh(B) = \partial_x h(B)dB^{(1)} + \partial_y h(B)dB^{(2)} .$$

Damit ist h ein lokales Martingal.

(b) p ist eine holomorphe Funktion. Unter Annahme $p \neq 0$ ist auch $1/p$ holomorph. Der Realteil, aufgefasst als Funktion von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ist damit harmonisch. Damit ist $M_t = \mathrm{Re}1/p(B)$ nach (a) ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Da $1/p(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, ist M_t beschränkt. Damit ist für alle $t \geq 0$ die Menge

$$\{M_\tau : \ \tau \text{ Stoppzeit}, \ \tau \leq t\}$$

gleichgradig integrierbar und damit M_t ein volles beschränktes und daher gleichgradig integrierbares Martingal mit stetigen Pfaden. Es existiert also eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable Z mit

$$\lim_{t\to\infty} M_t = Z \quad P\text{-f.s. .}$$

Ein analoges Ergebnis erhalten wir, wenn wir den Imaginärteil des Polynoms betrachten.

(c) Wir nehmen wieder $p \neq 0$. Wir betrachten $1/p(0)$ und nehmen o.B.d.A. an, dass $\mathrm{Re}1/p(0) > 0$. dann existiert aus Stetigkeitsgründen ein $r > 0$, so dass $\mathrm{Re}1/p(z) > 1/2\,\mathrm{Re}1/p(0)$ für alle $|z| \leq r$. Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir die Existenz von Stoppzeiten mit den dort angegebenen Eigenschaften. Hieraus folgern wir

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{Re}1/p(B_t) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Re}1/p(B_{\tau_n}) \geq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\frac{1}{p(0)} \quad P\text{-f.s. .}$$

Weiter erhalten wir ein R, so dass $|\,\mathrm{Re}1/p(z)| < 1/4\,\mathrm{Re}1/p(0)$ für alle $|z| > R$, da $1/p(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Es ist bekannt, dass $P(B_t^{(1)} = R, \text{ unendlich oft}) = 1$. Daraus folgern wir

$$\liminf_{t\to\infty} \mathrm{Re}1/p(B_t) \leq 1/4\,\mathrm{Re}1/p(0) \quad P\text{-f.s. .}$$

Es ist also $P(\liminf \mathrm{Re}1/p(B_t) < \limsup \mathrm{Re}1/p(B_t)) = 1$. Damit kann aber eine Zufallsvariable, wie in (b) konstruiert, nicht existieren. Wir haben also die Annahme, dass ein Polynom vom Grade größer 0 keine Nullstelle besitzt auf einen Widerspruch geführt.