Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

1. Übungsblatt zu Stochastische Prozesse

Aufgabe 1: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum E. Man zeige: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine Markov-Kette, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $i_0, ..., i_n \in E$ mit $P(X_0 = i_0, ..., X_n = i_n) > 0$

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0)$$

gilt.

Aufgabe 2: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$. Zeigen Sie:

(a) Die Relation „$\rightsquigarrow$“ ist transitiv.

(b) Zwei kommunizierende Zustände haben dieselbe Periode.

(c) Zwei kommunizierende Zustände sind entweder beide transient oder beide rekurrent.

(d) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}(n) = f_{ji}^{\star} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n).$$

Aufgabe 3:

(a) Auf dem Raum $\mathbb{R}_N$ der N-dimensionalen Zeilenvektoren ($N \in \mathbb{N}$) wird durch

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \; x = (x_1, ..., x_N),$$

bekanntlich eine Norm definiert. Zeigen Sie: Ist P eine stochastische $N \times N$-Matrix, so gilt

$$\|xP\|_1 \leq \|x\|_1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_N.$$

Was bedeutet dies für die Eigenwerte von P?

(b) Es sei $P = (p_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ für $N \in \mathbb{N}$ eine stochastische Matrix mit

$$\kappa := \min_{1\leq i,j\leq N} p_{ij} > 0 \quad \text{und} \quad U := \{x \in \mathbb{R}_N : \sum_{i=1}^{N} x_i = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass P die Menge U wieder in U abbildet, und dass es ein $0 \leq \alpha < 1$ gibt mit

$$\|xP\|_1 \leq \alpha \|x\|_1 \text{ für alle } x \in U.$$

Was bedeutet dies für das Verhalten von $qP^n - rP^n$ mit $n \to \infty$, wenn $q, r \in \mathbb{R}_N$ Wahrscheinlichkeitsvektoren sind, das heißt wenn $q_i, r_i \geq 0$ für $i = 1, ..., N$ und $\sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N r_i = 1$ gilt?

Aufgabe 4: Beweisen Sie Lemma 1.5 der Vorlesung:
Ist der Zustand $i \in E$ aperiodisch, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $p_{ii}(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

2. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 5: Es sei (S_n) die d-dimensionale symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $p_{0,0}(n) = P(S_n = 0 | S_0 = 0)$. Man zeige und folgere:

(a) Im Fall $d = 2$ gilt $p_{0,0}(2n) = \binom{2n}{n}^2 4^{-2n}$. Die zweidimensionale symmetrische Irrfahrt ist rekurrent.

(b) Im Fall $d = 3$ gilt $p_{0,0}(2n) \leq 2^{-2n}3^{-n}\binom{2n}{n}\frac{n!}{(\Gamma(n/3+1))^3}$, wobei Γ die Gammafunktion sei.

Die dreidimensionale symmetrische Irrfahrt ist transient.

(c) Für $d \geq 3$ ist die d-dimensionale symmetrische Irrfahrt transient.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p_{i,i+1} = p$, $0 < p < 1$, im Fall $p \neq \frac{1}{2}$ transient ist. Berechnen Sie f_{00}^* als Funktion von p. Berechnen Sie den Erwartungswert der Rückkehrzeit nach 0 im Falle $p = \frac{1}{2}$. Hinweis: Es gilt $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \left(\frac{x}{4}\right)^j$.

Aufgabe 7: Each morning a student takes one of the three books (labelled $1, 2, 3$) he owns from his shelf. The probability that he chooses the book with label i is α_i (where $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, 3$), and choices on successive days are independent. In the evening he replaces the book at the left-hand end of the shelf. If p_n denotes the probability that on day n the student finds the books in the order $1, 2, 3$, from left to right, show that, irrespective of the initial arrangement of the books, p_n converges as $n \to \infty$, and determine the limit.

Aufgabe 8: Eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P heisst *umkehrbar*, wenn es einen Wahrscheinlichkeitsvektor π gibt mit

$$\pi_i \, p_{ij} \; = \; \pi_j \, p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \tag{$\star$}$$

(a) Zeigen Sie, dass aus $(\star)$ folgt, dass π eine stationäre Verteilung zu P ist.

(b) Eine Urne enthält insgesamt N Kugeln, die rot oder blau sein können. Die Zufallsvariable X_n bezeichne die Anzahl der blauen Kugeln zur Zeit n. Im Zeitintervall $(n, n+1)$ wird eine Kugel der Urne „rein zufällig“ entnommen und gegen eine Kugel der anderen Farbe ausgetauscht. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P und finden Sie eine stationäre Verteilung zu P.

Aufgabe 9: („schwache Markov-Eigenschaft“)
Es sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Startverteilung q, Übergangsmatrix P und Zustandsraum E, desweiteren sei $N \in \mathbb{N}$.

Wir definieren $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $Y_n := X_{N+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und nennen Y den *Post-N-Prozess* zu X. Dies alles spielt sich auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ab, $\mathcal{F}_N := \sigma\{X_1, ..., X_N\}$ sei die von dem „Anfangsstück“ bis N erzeugte σ-Algebra, $\mathcal{F}^Y := \sigma\{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ die vom Post-N-Prozess erzeugte σ-Algbra.

Zeigen Sie: $\mathcal{F}_N$ und $\mathcal{F}^Y$ sind unter X_N bedingt unabhängig in dem Sinne, dass für alle $A \in \mathcal{F}_N$, $B \in \mathcal{F}^Y$ und $i \in E$

$$\mathrm{P}(A \cap B | X_N = i) = \mathrm{P}(A | X_N = i) \cdot \mathrm{P}(B | X_N = i)$$

gilt.

Hinweis: Es reicht, die Gleichheit für A, B aus einem geeigneten $\cap$-stabilen Erzeugendensystem nachzuweisen.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

3. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 10: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine irreduzible aperiodische Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum $E := \{0, ..., N\}$ und Übergangsmatrix P.

(a) Zeigen Sie die Rekurrenz von (X_n).

(b) Es sei $T_0 := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$. Es sei x der Zeilenvektor mit Komponenten $x_i = \sum_{n\geq 1} P(X_n = i,\ n \leq T_0 | X_0 = 0)$. Man zeige, dass $xP = x$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass X_n positiv rekurrent ist.

Aufgabe 11: (X_n) sei eine irreduzible rekurrente Markov-Kette mit Zustandsraum E, und $h : E \to \mathbb{R}$ eine beschränkte harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass h konstant ist.

Aufgabe 12: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Wir nennen $h : E \to \mathbb{R}$ harmonisch auf $A \subseteq E$, wenn $(Ph)(i) = h(i)$, $i \in A$, gilt. Es sei $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 :\ X_n \in A^c\}$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\text{finde } h : E \to \mathbb{R} \text{ mit } h \text{ harmonisch auf } A,\ h \equiv 1 \text{ auf } A^C$$

durch $h(i) := P(\tau < \infty | X_0 = i)$ gelöst wird.

Aufgabe 13: Zeigen Sie mit der in Abschnitt 1.5 der Vorlesung besprochenen Methode, dass die einfache unsymmetrische Irrfahrt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = 1 - P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = p, \quad X_0 = 0$$

mit $p \neq \frac{1}{2}$, transient ist.

Aufgabe 14: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum E. Es sei τ eine endliche Stoppzeit. Ist h eine beschränkte Funktion, so gilt $E[h(X_{\tau+1}) | \mathcal{F}_\tau] = (Ph)(X_\tau)$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

4. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 15: Bei der einfachen symmetrischen Irrfahrt $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Start in 0 sei

$$\tau_r := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = r\} \quad (r \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsgrössen $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \tau_4 - \tau_3, ...$ unabhängig und identisch verteilt sind.

(b) Zeigen Sie, dass zu τ_1 die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g,

$$g(z) = \frac{1}{z}\,(1 - \sqrt{1 - z^2}), \quad 0 \neq |z| \leq 1,$$

gehört. (Hinweis: Zerlegen Sie nach dem Wert von X_1.)

Aufgabe 16: Es sei X wie in der vorangegangenen Aufgabe.

(a) Finden Sie eine Funktion ϕ mit der Eigenschaft, dass

$$(Z_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad Z_n^\theta := \phi(\theta)^{-n} \exp(\theta X_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist.

(b) Verwenden Sie Teil (a) und das OST, um einen alternativen Beweis zu der Aussage von Teil (b) der vorangegangenen Aufgabe zu finden.

Aufgabe 17: Wie in der Vorlesung sei

$$D_0 := \{f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{Z} : \ f(0) = 0, \ f \ \uparrow, \ f \text{ stetig von rechts}\},$$

versehen mit der durch die Projektionen $\pi_t : D_0 \to \mathbb{Z}$, $\pi_t(f) = f(t)$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{B}(D_0) := \sigma(\pi_t : t \geq 0)$. Es sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \mapsto (D_0, \mathcal{B}(D_0))$ eine Zufallsgröße und τ eine endliche Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\sigma(\pi_s(X) : 0 \leq s \leq t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $S_\tau(X) := (\pi_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ und $Z_\tau(X) = (\pi_{\tau+t}(X) - \pi_\tau(X))_{t\geq 0}$ ebenfalls Zufallsgrößen mit Werten in $(D_0, \mathcal{B}(D_0))$, also $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(D_0))$-messbar sind.

Aufgabe 18: Kunden treffen in einer Bank gemäß eines Poisson-Prozesses mit Rate $\lambda > 0$ ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei Kunden im Zeitintervall $(1, 3]$ ankommen, unter der Bedingung, dass im Intervall $(2, 4]$ ein Kunde ankommt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

5. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 19:

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache symmetrische Irrfahrt mit Start in i_0, $a \in \mathbb{N}$ mit $|a| > |i_0|$ und

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, |X_n| \geq a\}.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert zu τ. (Hinweis: $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.)

(b) Können Sie auch die nichtsymmetrische Irrfahrt im Stil von Teil (a) behandeln?

Aufgabe 20:

(a) Es seien $(N_t^i)_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, voneinander unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. Man zeige, dass $(N_t)_{t\geq 0}$ mit $N_t := N_t^1 + N_t^2$ ein Poisson-Prozess ist und ermittele seine Rate.

(b) Es seien $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine davon unabhängige iid-Folge mit $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$. Man zeige, dass die Prozesse $(N^i)_{t\geq 0}$, $i = 1, 2$, mit $N_t^1 := \sum_{l=1}^{N_t} X_l$ und $N_t^2 := N_t - N_t^1$ voneinander unabhängige Poisson-Prozesse sind und ermittle ihre Raten.

Aufgabe 21: Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ durch

$$(M_t^\theta)_{t\geq 0}, \quad M_t^\theta := \exp\bigl(\theta N_t - \lambda t(e^\theta - 1)\bigr) \text{ für alle } t \geq 0,$$

ein Martingal definiert wird.

(b) Skizzieren Sie, wie man mit der Aussage von Teil (a) im Stil von Aufgabe 16 die momenterzeugende Funktion zur Eintrittszeit $\tau_r := \inf\{t \geq 0 \,:\, N_t = r\}$ $(r \in \mathbb{N})$ bestimmen kann.

(c) Finden Sie ein direktes Argument zur Bestimmung der Verteilung von τ_r.

Aufgabe 22: Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ, $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werde definiert durch $X_n := N_{nh}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ($h > 0$ fest).

(a) Zeigen Sie, dass X eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten.

(b) Finden Sie ein heuristisches Argument dafür, dass

$$\Big(f(N_t) - \int_0^t (Af)(N_s)\,ds\Big)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist. Hierbei bezeichne A den Operator, der einer Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$Af : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto \lambda\big(f(i+1) - f(i)\big),$$

zuordnet.

(c) Verifizieren Sie die Aussage von Teil (b) für die Funktionen $f(i) = i$ und $f(i) = i^2$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

6. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 23: Eine Halbgruppe $\{P(t) : t \geq 0\}$ von stochastischen Matrizen $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$ über E heißt *standard*, wenn

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) \;=\; \delta_{ij} \quad \text{für alle } i,j \in E$$

gilt, sie heisst *irreduzibel*, wenn für alle $i,j \in E$ ein $t > 0$ existiert mit $p_{ij}(t) > 0$. Im folgenden sei $\{P(t) : t \geq 0\}$ eine irreduzible Standardhalbgruppe.

(a) Zeigen Sie, dass alle Übergangsfunktionen $t \mapsto p_{ij}(t)$, $i,j \in E$, auf $0 \leq t < \infty$ gleichmäßig stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $h > 0$ die Übergangsmatrix $P(h)$ im Sinne von Abschnitt 1 der Vorlesung irreduzibel und aperiodisch ist.

(c) Der Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ sei stationär zu $\{P(t) : t \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) \;=\; \pi_j \quad \text{für alle } i,j \in E$$

gilt.

Aufgabe 24: Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Zeigen Sie, dass genau dann eine Markov-Kette $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ existiert, in die X im Sinne von

$$X_n = Y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

einbettbar ist, wenn $\alpha > 1/2$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall den Generator zu Y.

Aufgabe 25: Wie in Beispiel 3.2 der Vorlesung sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und Generator

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Verwenden Sie die Formel $P(t) = \exp(tG)$ für eine alternative Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeiten.
(Hinweis: Finden Sie zunächst eine Darstellung $G = ADA^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D.)

Aufgabe 26: Es seien $T = [0, 1]$ oder $T = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}(T)$ die Menge der stetigen Funktionen auf T und $\mathcal{B}^T$ die von den Projektionen erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^T$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{C}(T) \notin \mathcal{B}^T .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß zu jedem $A \in \mathcal{B}^T$ eine abzählbare Menge $S(A) \subset T$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}^T$, $y \in A$ gilt:

$$x(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \in S(A) \Rightarrow x \in A .$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

7. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 27: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine zugehörige Filtration. Es sei $\mathcal{N}$ das System der P-Nullmengen von $\mathcal{A}$ und $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\tilde{\mathcal{F}}_t \;:=\; \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t)$$

die um $\mathcal{N}$ erweiterte Filtration.

(a) Zeigen Sie, dass mit $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auch $(B_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Zeigen Sie, dass mit $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auch $(X_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass zu jedem $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ ein $F \in \mathcal{F}_t$ existiert mit $\tilde{F} \triangle F \in \mathcal{N}$.

Aufgabe 28: Es seien $X = (X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $Y = (Y_t)_{t\in T}$ ein Prozess auf $(\Omega', \mathcal{A}', P')$. Die Prozesse X und Y heißen *äquivalent*, wenn sie dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen haben. Im Falle $(\Omega', \mathcal{A}', P') = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Y eine *Modifikation* von X, wenn $P(X_t = Y_t) = 1$ gilt für alle $t \in T$; X und Y heißen *ununterscheidbar*, wenn es eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \in T$ und für alle $\omega \in \Omega \backslash N$. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten zwischen diesen Begriffen. Geben Sie insbesondere ein Beispiel für äquivalente, auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definierte Prozesse an, die nicht Modifikationen voneinander sind.

Aufgabe 29:

(a) Es sei $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ eine Brownsche Bewegung mit Zeitbereich $[0, 1]$. Zeigen Sie: Der durch

$$X_t := (1 + t)B_{t/(1+t)} - tB_1$$

definierte Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung mit Zeitmenge $[0, \infty)$.

(b) Es seien $a \geq 0$, $c \neq 0$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass mit $(B_t)_{t\geq 0}$ auch die wie folgt definierten Prozesse $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ Brownsche Bewegungen sind:

(i) $\tilde{B}_t := -B_t,\ \forall t \geq 0,$ (ii) $\tilde{B}_t := B_{a+t} - B_a,\ \forall t \geq 0,$ (iii) $\tilde{B}_t := cB_{t/c^2},\ \forall t \geq 0$.

Aufgabe 30: Es sei $(g_{nk})_{(n,k)\in S}$ die im Beweis zu Satz 4.5 verwendete Haar-Basis von $L^2([0,1])$.

(a) Die Funktion $f \in L^2([0,1])$ habe die Eigenschaft

$$\langle f, g_{nk} \rangle = 0 \quad \text{für alle } (n,k) \in S.$$

Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall gilt.

(b) In welcher Beziehung steht Teil (a) zu der in Gleichung (1) des Beweises verwendeten Formel

$$f = \sum_{(n,k)\in S} \langle f, g_{nk} \rangle g_{nk} \quad \text{für alle } f \in L^2([0,1])?$$

Hinweis zu Teil (a): Betrachten Sie die Werte der Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^t f(s)\, ds$, in den Punkten $k2^{-n}$, $(n,k) \in S$.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

8. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 31: (Wiener/Paley-Zugang zur Brownschen Bewegung)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine iid-Folge standardnormalverteilter Zufallsvariablen. Man betrachte die Fourier-Reihe

$$B_t := \frac{t}{\sqrt{\pi}} X_0 + \sum_{n\geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k} X_k \; .$$

Man kann zeigen (hier nicht!), dass diese Reihe mit Wahrscheinlichkeit 1 gleichmäßig auf $[0,\pi]$ konvergiert. Man zeige, dass $(B_t)_{t\in[0,\pi]}$ bzgl. der natürlichen Filtration eine Brownsche Bewegung ist.
Hinweis: Man zeige, dass B_t ein Gauss-Prozess ist und berechne Erwartungswert- und Kovarianzfunktion.

Aufgabe 32: Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, daß für alle $\gamma > 1/2$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\gamma} B_t = 0 \quad \text{fast sicher}$$

gilt, und daß diese Aussage mit $\gamma = 1/2$ nicht gilt. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß fast alle Pfade der Brownschen Bewegung in $t = 0$ nicht Lipschitz-stetig sind.

Aufgabe 33: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ der Pfad von ω auf keinem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ mit $a < b$ monoton ist.

Aufgabe 34: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die quadratische Totalvariation der Brownschen Bewegung auf $[0,t]$ entlang einer deterministischen Folge $(\{t_{n,0},...,t_{n,k_n}\})_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen von $[0,t]$ mit gegen 0 konvergierender Weite mit $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen t strebt. Zeigen Sie, dass man bei der Partition

$$t_{n,j} := \frac{j}{2^n} t, \;\; n \in \mathbb{N}, \, j = 0, ..., k_n := 2^n,$$

sogar fast sichere Konvergenz hat.
Hinweis: Aus Aufgabe 37 zur Stochastik II ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \;\text{ für alle } \varepsilon > 0$$

als hinreichende Bedingung für $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ bekannt.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

9. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 35: Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Start in 0.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit

$$X_t \;:=\; \exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 t/2\right)$$

ein Martingal mit stetigen Pfaden ist.

(b) Für alle $t \geq 0$ sei $M_t := \sup_{0\leq s\leq t}\, B_s$. Zeigen Sie:

$$P(M_t \geq z) \;\leq\; \exp\left(-z^2/(2t)\right) \qquad \text{für alle } z, t \geq 0.$$

(c) Es sei $T_a := \inf\{t > 0 : B_t = a\}$; aus der Vorlesung ist $P(T_a < \infty) = 1$ bekannt. Zeigen Sie, dass für alle $a \neq 0$

$$\liminf_{t\to\infty}\; t\,P(T_a > t) \;>\; 0$$

und damit $ET_a = \infty$ gilt.

Aufgabe 36: Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; wir nehmen einfachheitshalber an, dass <u>alle</u> Pfade stetig sind.

(a) Zeigen Sie, dass B als Abbildung von $[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$, $(t,\omega) \mapsto B_t(\omega)$, $(\mathcal{B}_{[0,\infty)}\otimes\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die zufällige Menge $L_a := \{t \geq 0 : B_t(\omega) = a\}$ mit P-Wahrscheinlichkeit 1 eine Lebesgue-Nullmenge für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 37: (Spiegelungsprinzip für die einfache symmetrische Irrfahrt)
Es sei (X_n) die einfache eindimensionale symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, $M_n := \max_{1\leq k\leq n} X_k$. Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq j \leq i$ gilt

$$P(M_n \geq i,\ X_n = j) = P(X_n = 2i - j)\ .$$

Aufgabe 38: Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein zu $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess. Für alle beschränkten Stoppzeiten τ gelte $E|X_\tau| < \infty$ und $EX_\tau = EX_0$. Zeigen Sie, dass dann $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Stoppzeiten

$$\tau \;:=\; s\cdot 1_A + t\cdot 1_{A^C}, \qquad A \in \mathcal{F}_s,\ s \leq t.$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

10. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 39: Zeigen Sie, dass jede gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen L^1-beschränkt ist, dass aber nicht jede L^1-beschränkte Familie gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 40: Es sei $T = [0, t_0]$ und $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ein Martingal mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass dann für alle $p \geq 1$ und alle $c > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$P\Big(\sup_{t \in T} |X_t| \geq c\Big) \;\leq\; \frac{1}{c^p}\, E|X_{t_0}|^p.$$

Aufgabe 41:

(a) Es sei $M = (M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tau_n \;:=\; \inf\{t \geq 0 :\, |M_t| \geq n\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge zu M ist und dass $(X_{\tau_n \wedge t}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Martingal ist.

(b) Es sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und X_0 eine von $(B_t)_{t \geq 0}$ unabhängige und Cauchy-verteilte Zufallsvariable; für alle $t \geq 0$ sei $\mathcal{G}_t$ die von $\mathcal{F}_t$ und X_0 erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $(M_t, \mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ mit $M_t := X_0 B_t$ ein lokales Martingal, aber kein Martingal ist.

(c) Wir nennen einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *integrierbar*, wenn $E|X_t| < \infty$ gilt für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass ein stetiges lokales Martingal, das nicht-negativ und integrierbar ist, ein Supermartingal ist.

Aufgabe 42: Es sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und, für $a > 0$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 :\, B_t \geq a\}.$$

In der Vorlesung wurde die Verteilung von τ_a mit Hilfe des Spiegelungsprinzips ermittelt. Bestimmen Sie mit Martingalmethoden die Laplace-Transformierte

$$\phi_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto E \exp(-\theta \tau_a),$$

zur Verteilung von τ_a.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

11. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 43:

(a) Als *inverse Gauss-Verteilung* $\mathrm{IG}(a)$ mit Parameter $a > 0$ bezeichnet man das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $((0,\infty), \mathcal{B}_{(0,\infty)})$ mit der Lebesgue-Dichte

$$f_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\Big(-\frac{a^2}{2x}\Big).$$

Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängig, mit $X \sim \mathrm{IG}(a)$ und $Y \sim \mathrm{IG}(b)$, so gilt $X + Y \sim \mathrm{IG}(a+b)$.

(b) Es seien X und Y unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt. Zeigen Sie, dass dann für alle $a, b \geq 0$

$$\frac{a^2}{X^2} + \frac{b^2}{Y^2} =_{\mathrm{D}} \frac{(a+b)^2}{Z^2}$$

mit einer ebenfalls $\mathrm{N}(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen Z gilt.

Aufgabe 44: Für $0 < s < t < \infty$ sei $\rho(s,t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ im Intervall (s,t) eine Nullstelle hat. Zeigen Sie:

$$\rho(s,t) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{s}{t}}\,.$$

Hinweis: Zerlegen Sie nach dem Wert von B_s.

Aufgabe 45:

(a) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine (rechts)stetige Funktion von lokal beschränkter Totalvariation. Zeigen Sie, dass dann die Funktionen

$$x \mapsto V_0^x f, \quad x \mapsto V_0^x f - f(x)$$

(rechts)stetig und isoton sind.

(b) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ genau dann von lokal beschränkter Totalvariation ist, wenn es zwei isotone Funktionen $g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = g - h$.

Aufgabe 46: Es seien $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein progressiv messbarer Prozess und τ eine Stoppzeit; beides bezieht sich auf eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Zeigen Sie, dass dann auch der bei τ gestoppte Prozess

$$X^\tau = (X_t^\tau)_{t \geq 0}, \quad X_t^\tau := X_{\tau \wedge t} \text{ für alle } t \geq 0,$$

progressiv messbar ist.

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

12. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 47: Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{H}$ ein Untervektorraum des Vektorraums $B(\Omega, \mathcal{A})$ der beschränkten, $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $H : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) $H \equiv 1$ ist ein Element von $\mathcal{H}$,

(b) $1_E \in \mathcal{H}$ für alle $E \in \mathcal{E}$,

(c) ist $H \in B(\Omega, \mathcal{A})$ punktweiser Limes einer isotonen Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $H_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $H \in \mathcal{H}$.

Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{H} = B(\Omega, \mathcal{A})$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A} : 1_D \in \mathcal{H}\}$ ein Dynkin-System ist, und verwenden Sie die aus der Maßtheorie bekannte Approximation nicht-negativer Funktionen durch isotone Folgen von primitiven Funktionen.

Aufgabe 48:

(a) Es seien $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, X eine Zufallsvariable und τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass X genau dann bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_\tau$ der τ-Vergangenheit messbar ist, wenn für alle $t \geq 0$ die Zufallsvariable $X 1_{\{\tau \leq t\}}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.

(b) Es sei H ein vorhersehbarer Prozess, τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie, dass dann auch $H 1_{(0,\tau]}$ vorhersehbar ist.

Aufgabe 49: Im folgenden seien $X, Y \in \mathcal{M}_0^2$, τ sei eine Stoppzeit.

(a) Zeigen Sie, dass im Falle $\|X - Y\|_{\mathcal{M}} = 0$ die Prozesse X und Y ununterscheidbar sind.

(b) Es gelte $\langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle$ für alle $Z \in \mathcal{M}_0^2$. Zeigen Sie, dass dann X und Y ununterscheidbar sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle X^\tau, Y \rangle = \langle X, Y^\tau \rangle = \langle X, Y \rangle^\tau$ gilt, also insbesondere $\langle X \rangle^\tau = \langle X^\tau \rangle$.

Aufgabe 50: (Partielle Integration) Es seien $(A_t)_{t\geq 0}$ und $(B_t)_{t\geq 0}$ FV-Prozesse mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A_t B_t \;=\; A_0 B_0 \;+\; \int_0^t A_s \, dB_s \;+\; \int_0^t B_s \, dA_s \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Prof. Dr. R. Grübel
Dipl.-Math. F. Dennert

SS 2005, Institut für
Mathematische Stochastik

13. Übungsblatt Stochastische Prozesse

Aufgabe 51: Es sei $(B_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, und es sei $t > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ sei $t_{ni} := it/n$; Y_n $(n \in \mathbb{N})$ werde definiert durch

$$Y_n^\alpha \;:=\; \sum_{i=1}^{n} (\alpha B(t_{n,i-1}) + (1-\alpha) B(t_{n,i})) \cdot \big(B(t_{n,i}) - B(t_{n,i-1})\big).$$

Zeigen Sie, dass ein $\beta(\alpha) \in \mathbb{R}$ existiert, so dass Y_n^α, $\alpha \in [0,1]$, im quadratischen Mittel (also im L^2-Sinn) gegen $\frac{1}{2} B_t^2 - \beta(\alpha) t$ konvergiert.

Hinweis: Man betrachte zunächst Y_n^0 und Y_n^1.

Aufgabe 52: Es seien $F, G, H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig und von lokal beschränkter Totalvariation; es gelte $F(0) = G(0) = H(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\int_0^t F(s) \left(\int_0^{\cdot} G(u)\, H(du) \right) (ds) \;=\; \int_0^t F(s) G(s)\, H(ds).$$

Aufgabe 53: Das n-te *Hermite-Polynom* $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$h_n(x) \;:=\; (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R};$$

h_n genügt der Differentialgleichung $h_n''(x) - x h_n'(x) + n h_n(x) = 0$. Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass $\big(t^{n/2} h_n(t^{-1/2} B_t)\big)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

(b) Bekanntlich lassen sich $(B_t)_{t\geq 0}$ und $(B_t^2)_{t\geq 0}$ durch einfache Funktionen f in dem Sinne 'kompensieren', dass Subtraktion von f ein Martingal liefert. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $\big(B_t^3 - f(t)\big)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.

(c) Finden Sie mit Hilfe von Teil (a) eine möglichst 'einfache' Funktion f von t und B_t mit der Eigenschaft, dass $\big(B_t^3 - f(t, B_t)\big)_{t\geq 0}$ ein nicht-triviales Martingal ist.

Aufgabe 54: (Fundamentalsatz der Algebra) Es seien (B^1) und (B^2) unabhängige Brownsche Bewegungen. Weiter sei p ein Polynom vom Grade größer als 0.

(a) Man zeige: ist $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} h + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} h = 0$, so ist $h(B^1, B^2)$ ein lokales Martingal.

(b) Man zeige: Gilt $p \neq 0$ auf $\mathbb{C}$, so existiert eine Zufallsvariable Z mit

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Re} \frac{1}{p\left(B_t^{(1)} + iB_t^{(2)}\right)} = Z \quad P\text{-f.s.}$$

(c) Ohne Beweis kann angenommen werden, dass es für ein beliebiges $r > 0$ eine Folge Stoppzeiten (τ_n^r) gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n^r = \infty, \quad \tau_n^r < \infty, \quad \left(B_{\tau_n^r}^{(1)}\right)^2 + \left(B_{\tau_n^r}^{(2)}\right)^2 \leq r^2 \quad \forall n \quad P\text{-f.s.}$$

Man konstruiere im Falle $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ hieraus einen Widerspruch zu (b) und folgere so den Fundamentalsatz der Algebra.